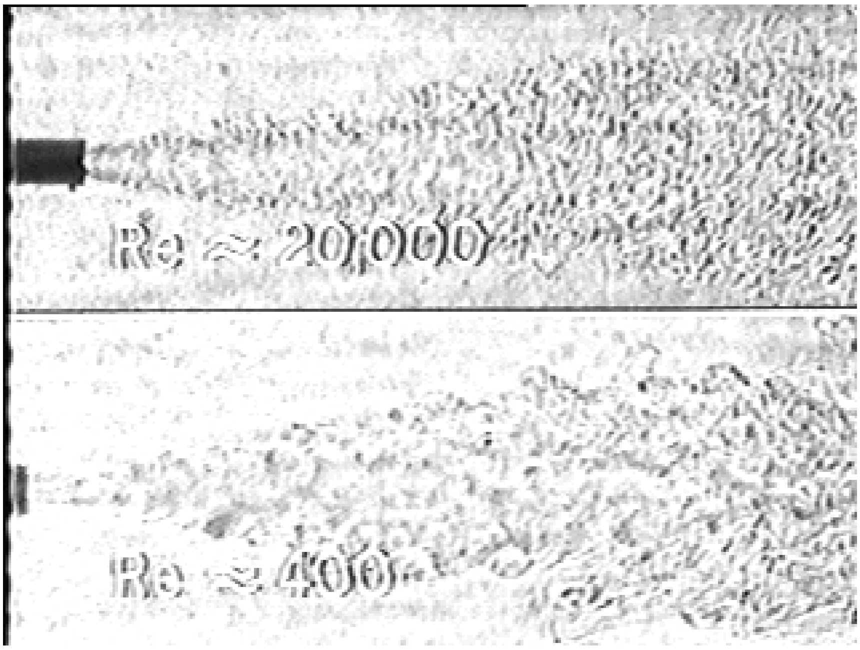
ENSTA

Jet turbulent plan

PC de révision

Par une fente très fine on éjecte un fluide incompressible de densité constante ρ dans le même fluide initialement au repos (de viscosité ν). Cet écoulement sera supposé plan (fente infiniment longue), c'est un "jet" 2D. Un jet laminaire est très instable (car le profil présente des points d'inflexions) aussi nous allons le supposer pleinement turbulent et nous allons déterminer l'épaisseur de cette couche limite libre de convection forcée.



Les équations de Navier Stokes moyennées (équations aux tensions de Reynolds) s'écrivent:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial}{\partial y}V = 0.$$

$$(2) \qquad \rho\left(U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy})$$

$$(3) \qquad \rho\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy})$$

$$(4) \qquad \rho c_p\left(U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x) - \frac{\partial}{\partial y}(q_y)$$

P est la moyenne de pression de perturbation par rapport à la pression de référence, et U est la moyenne de la vitesse $<u>=U$, $u=U+u'$ et bien entendu $<u'>=0$. $\theta=<T>$, $V=<v>$. On a posé:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho<u'u'>, \qquad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \rho<u'v'>, \qquad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} - \rho<v'v'>$$

$$q_x = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho c_p<\theta'u'> \quad \text{et} \quad q_y = -k \frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho c_p<\theta'v'>$$

On suppose que les ordres de grandeurs des corrélations sont les mêmes:

$$O(<u'u'>) = O(<u'v'>) = O(<v'v'>) = O(u^{*2})$$

On suppose qu'au loin le fluide est au repos complet.

Le but de la PC est de résoudre ce système en le simplifiant par l'analyse phénoménologique. On montrera qu'il existe même une solution semblable (si on fait une hypothèse de fermeture).

1) Nous commençons par la solution extérieure, montrer qu'à nombre de Reynolds infini il ne se passe rien sauf en y=0. Conclusion?

2) Soit L la distance le long du jet qui nous sert par la suite de longueur caractéristique, et soit Δ l'ordre de grandeur de la largeur du jet. Le rapport $\varepsilon=\Delta/L$ sera un petit paramètre. Si U_0 est l'ordre de grandeur de la vitesse longitudinale, trouver l'ordre de grandeur de la vitesse transverse.

3) En examinant 1 et 3, montrer que $\partial P/\partial y$ n'est *a priori* pas nul, en axaminant (2) en déduire que la pression ne joue en fait aucun rôle.

4) Montrer que le système final est:

$$\frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} V = 0.$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}<u'v'>$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}<\theta'v'>$$

5) En examinant le second ordre, trouver la relation liant l'intensité de la turbulence au nombre de Reynolds.

6) Remarquer que l'on peut construire une relation de conservation intégrale à partir de l'équation de la quantité de mouvement ainsi que de celle de la chaleur.

7) Pour continuer la résolution, on va faire une hypothèse de type longueur de mélange pour fermer le système:

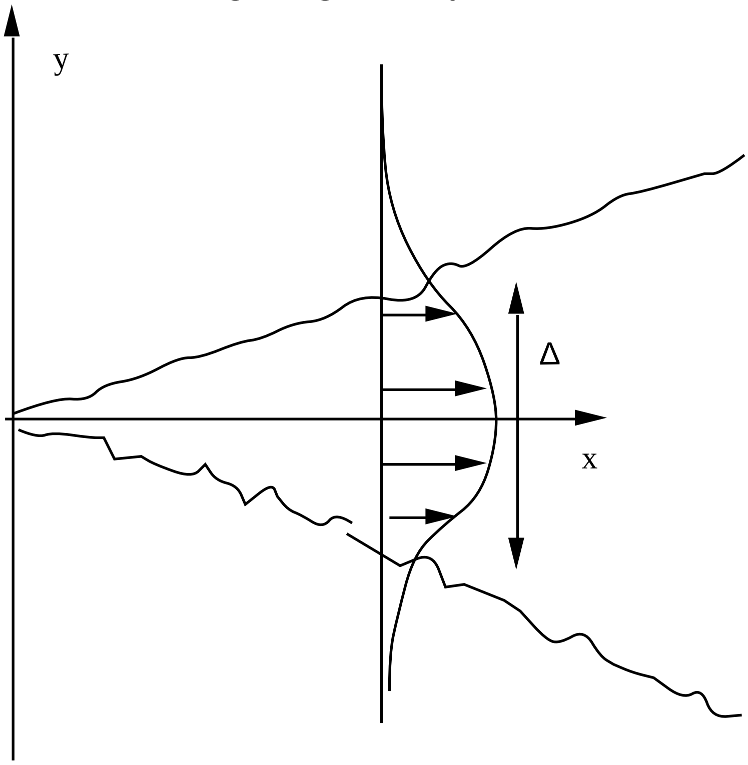
$$-<u'v'> = \chi_t\, Y\, U(x,0) \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad -<\theta'v'> = Pr_t^{-1} \chi_t\, Y\, U(x,0) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

où Y est la valeur de y telle que $U(x,Y)/U(x,0)=0.5$. χ_t est un coefficient empirique...

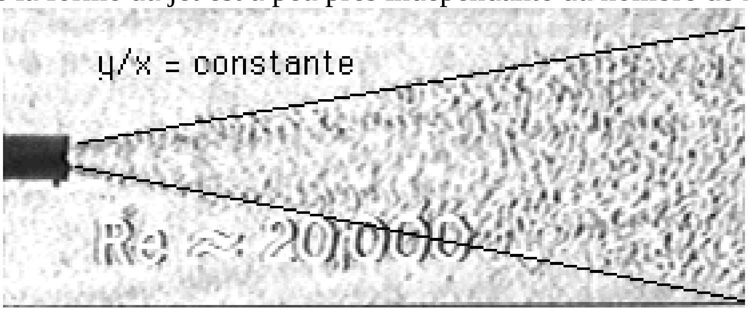
Montrer que l'on peut chercher la solution sous forme semblable.

PC de révision Correction Jet turbulent.

1) Solution extérieure: tout est nul: ligne singulière en y=0.



On observe que la forme du jet est a peu près indépendante du nombre de Reynolds.



et que l'ouverture est constante.

2) Pour conserver l'incompressibilité et la dérivée totale on a comme d'habitude:

$$V_0=\Delta L^{-1}U_0=\varepsilon U_0$$

Examinons la pression transverse dans (3)

on pose $R=U_0L/\nu$, et dans $\tau_{yy} = \nu \dfrac{\partial V}{\partial y} - \langle v'v'\rangle = O(U_0^2\, R^{-1}) + O(u^{*2})$

car $\langle u'u'\rangle = \langle u'v'\rangle = \langle v'v'\rangle = O(u^{*2})$

(3) $$U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\rho\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial V}{\partial x} - \langle u'v'\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \langle v'v'\rangle\right)$$

on adimensionne et on divise tout par $U_0^2/(L\varepsilon)$

$$\varepsilon^2 \qquad \varepsilon^2 \qquad \Pi/(\rho U_0^2) \qquad R^{-1}\,\varepsilon^2 \quad \varepsilon(u^*/U_0)^2 \qquad R^{-1} \quad (u^*/U_0)^2$$

le terme le plus grand (autre que la pression) est le dernier, donc par moindre dégénérescence:

$$\Pi=(u^*/U_0)^2(\rho U_0^2)$$

(on suppose que le terme de viscosité turbulente est prépondérant, on ne fait pas de laminaire!!, $R^{-1} << (u^*/U_0)^2$) on en déduit (ici avec les dimensions) que la pression varie transversalement dans le jet:

$$\frac{\partial P}{\rho \partial y} = - \frac{\partial}{\partial y}(<v'v'>)$$

donc $P = -\rho <v'v'>$, car il n'y a pas de constante d'intégration (à l'∞: la pression est 0). (2) devient:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial U}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x}(<u'u'> - <v'v'>) - \frac{\partial}{\partial y}(<u'v'>)$$

on adimensionne et on divise tout par U_0^2/L

$$1 \qquad 1 \qquad = R^{-1} + \varepsilon^{-2}R^{-1} \qquad (u^*/U_0)^2 \qquad \varepsilon^{-1}(u^*/U_0)^2$$

On travaille à R très grand, et ε petit, la moindre dégénérescence suggère donc de prendre pour contrebalancer les termes convectifs le terme $\frac{\partial}{\partial y}(<u'v'>)$, donc $\varepsilon=(u^*/U_0)^2$. On suppose que le nombre de Reynolds est assez grand pour que $\varepsilon^{-2}R^{-1}$ soit petit (on retrouve la condition de terme de viscosité turbulente prépondérante $R^{-1}<<(u^*/U_0)^2 \Leftrightarrow \varepsilon^{-2}R^{-1}<<1$, on a donc $\varepsilon>>\varepsilon^2>>R^{-1}$). Ce terme est le terme suivant dans le développement:

$\varepsilon^{-2}R^{-1}=(L/\Delta)(\nu/(\Delta u^*))(u^*/U_0)=R_\Delta^{-1}\varepsilon^{-1/2}$, est à comparer à ε, on en déduit que si $R_\Delta=(\Delta/L)^{-3/2}$ les termes de diffusion moléculaire sont du même ordre de grandeur que les termes turbulents négligés.

La température

On pose tΘ l'ordre de grandeur de la fluctuation de T,

$$(U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(k/\rho c_p)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(k/\rho c_p)\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}<\theta'u'> - \frac{\partial}{\partial y}<\theta'v'>$$

on adimensionne et on divise tout par U_0/L

$$1 \qquad Pr^{-1} R^{-1} \qquad \varepsilon^{-2} Pr^{-1} R^{-1} \qquad t(\varepsilon^{1/2}) \quad t(\varepsilon^{1/2})/\varepsilon$$

Le nombre de Prandtl étant d'ordre un, les termes à retenir sont $\frac{\partial}{\partial y}<\theta'v'>$ et le terme de dérivée totale dans l'équation de la chaleur. Donc $t=(\varepsilon^{1/2})$ (comme u^*/U_0). On arrive donc bien au système proposé à l'échelle ε proposée.

5) le terme de viscosité moléculaire le plus grand est $\varepsilon^{-2}R^{-1}$, à comparer à $(u^*/U_0)^2$. Donc: $\varepsilon=R^{-1/3}$, ce qui donne comme nous l'avons déjà vu: $R_\Delta=(\Delta/L)^{-3/2}$

$$(u^*/U_0)=R^{-1/6},\ \theta'/\Theta = R^{-1/6},\ \Delta/L=R^{-1/3}$$

on vérifie que $R^{-1/6}>>R^{-1}$ et $R^{-1/3}>>R^{-1}$.

6)

En intégrant de -∞ à ∞ en y, l'équation de la quantité de mouvement:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(<u'v'>) = 0$$

écrite sous forme conservative donne:

$$\frac{\partial (U^2)}{\partial x} + \frac{\partial (UV)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}<u'v'>=0$$

et en permutant l'intégration et la dérivation (ce qui est possible car le domaine est fixe), et compte tenu du fait que U(±∞)=0 (au loin on est au repos complet). En revanche, V(±∞)=0 n'est pas certain, en fait on calcule qu'il y a aspiration). On a aussi $\theta(\pm\infty)=0$ (au loin la température est constante) et surtout $<u'v'>(\pm\infty)=0$ (au loin on est au repos complet, donc pas de fluctuations), on voit facilement que: $\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy$ est une constante de l'écoulement. C'est donc le flux total de quantité de mouvement du jet.

En intégrant de -∞ à ∞ en y, l'équation de l'énergie:

$$U\frac{\partial\theta}{\partial x} + V\frac{\partial\theta}{\partial y} + \theta\left(\frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial}{\partial y}V\right) + \frac{\partial}{\partial y}<\theta'v'>=0,$$

écrite sous forme conservative donne:

$$\frac{\partial(\theta U)}{\partial x}+\frac{\partial(\theta V)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}<\theta'v'>=0$$

et en permutant l'intégration et la dérivation (ce qui est possible car le domaine est fixe), et compte tenu du fait que que $\theta(\pm\infty)=0$ (au loin la température est constante). En revanche, $V(\pm\infty)=0$ n'est pas certain, en fait on calcule qu'il y a aspiration). On a aussi $<\theta'v'>(\pm\infty)=0$ (au loin on est au repos complet, donc pas de fluctuations), on voit facilement que: $\int_{-\infty}^{\infty}\theta U dy$ est une deuxième constante de l'écoulement. C'est le flux de chaleur total du jet.

7) l'ordre de grandeur de ν_t est $(u^*/U_0)^2$, le Prandtl turbulent est d'ordre un.

les équations <u>sans dimensions</u> sont

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} YU\frac{\partial U}{\partial y}\ ;\ U\frac{\partial\theta}{\partial x} + V\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}Pr_t^{-1}\ Y\ U\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

par dilatation $U=U^*U$, $x=x^*x$, $y=y^*y$ ... l'invariance des équations donne:

$$x^*=y^*,\ V^*=U^*,$$

donc $F_1(UU^*,\theta\theta^*,xx^*,yx^*)=0$

l'invariance du flux de u^2 donne $U^{*2}y^*=1$, donc $U^*=x^{*-1/2}$; pour la température $\theta^*U^*y^*=1$ donc $\theta^*=x^{*-1/2}$ aussi:

$F_2(Ux^{*-1/2},\theta x^{*-1/2},xx^*,yx^*)=0$, par élimination de x^*, $F_3(Ux^{1/2},\theta x^{1/2},xx^*,y/x)=0$, vrai pour tout x^*, donc:

$\theta=\xi^{-1/2}g(\eta)$, $U=\xi^{-1/2}f'(\eta)$ et $\eta=y/x$, $\xi=x$. $\psi=\xi^{1/2}f(\eta)$, $V=-f+\eta f'//2$

Pour les jets turbulents, la variable de similitude est y/x.

la transformation des dérivées

$\partial_x = (\partial\xi/\partial x)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial x)\partial_\eta$ et $\partial_y = (\partial\xi/\partial y)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial y)\partial_\eta$ donne:

$\partial_x = \partial_\xi -\eta\xi^{-1}\partial_\eta$ et $\partial_y =\xi^{-1}\partial_\eta$ d'où:

$$-\ ff'' - f'^2 = \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta_{0.5}f'')\ \&\ \ -\ fg'' -f'g' = Prt^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta_{0.5}g')$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty}f'^2d\eta=1$, $f''(0)=0$, $f'(\infty)=0$ et $g'(\infty)=0$. et $\eta_{0.5}$ tel que $f'(\eta_{0.5})=0.5$

$g'(0)=1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g f' d\eta = 1$

calcul numérique du jet: on résout ici $0 = f'^2 + ff'' + f'''$, l'équation est non linéaire, avec des conditions aux limites en 0 et ∞. On la réécrit sous la forme de "l'équation de la chaleur" instationnaire et on en cherche une solution stationnaire en temps (en fait tous les coups sont permis!):

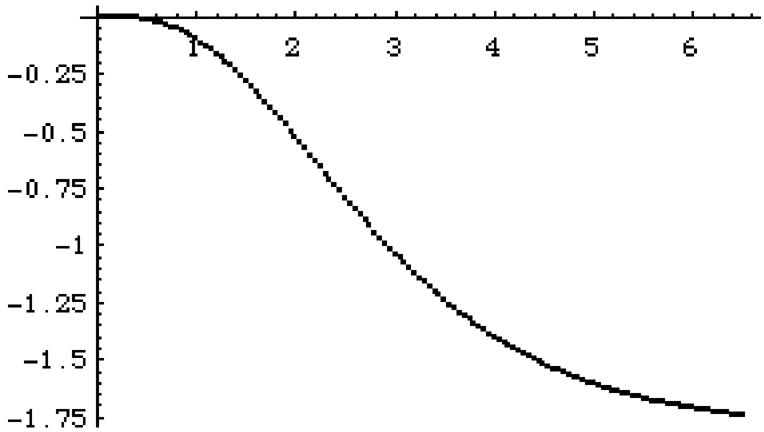
$$\partial f'/\partial t = f'^2 + ff'' + \nu f''' \text{ avec } (f' = u) \text{ cela donne } \partial u/\partial t = u^2 + fu' + \nu u''.$$

soit n l'itération en temps $\partial u/\partial t$ se discrétise en $(u^{n+1} - u^n)/\Delta t$, et on résout l'équation implicite en temps. La dérivée seconde est discrétisée par différences finies, et le système tridiagonal obtenu est inversé par la méthode Thomas.

$$\nu^n u^{n+1''} + f^n u^{n+1'} - u^{n+1}/\Delta t - u^n u^{n+1} = u^n/\Delta t \text{ puis } f^{n+1'} = u^{n+1}$$

on donne u_0^{n+1} et $u_N^{n+1}=0$. Comme $u=u'=f=0$ est solution du problème, on renormalise à chaque pseudo pas de temsp pour éviter de tomber sur la solution nulle, donc u_0^{n+1} est tel que $u_0^{n+1}=u_0^n/\Sigma u^{n2}\Delta\eta$. Ensuite on prend pour ν^{n+1} la valeur telle que $u(\nu^{n+1})/u(0)=1/2$.

profil de vitesse longitudinale



profil de vitesse transversale, on note l'aspiration.

=> On peut faire la même PC en laminaire, mais le régime laminaire n'a pas beaucoup d'existence (le profil est instable pour une valeur faible du Reynolds, or le profil n'existe que pour les valeurs grandes de Reynolds). En laminaire, le profil est $u(\eta) = x^{-1/3}f'(\eta)$ avec $\eta=y/x^{2/3}$ $3f'''+ff''+f'^2=0$, on le nomme "jet de Bickley".

=> On constate qu'il existe une vitesse de "transpiration". Cette aspiration c'est l'effet Coanda, s'il y a une paroi, le jet est attiré par la paroi.

Note sur la méthode intégrale

On retiend que la vitesse à l'infini est non nulle, et que l'on peut l'exprimer au moins formellement comme $U(x,0)\partial\delta/\partial x$ fois un coefficient (que l'on détermine ici numériquement).

$$\text{où } \delta=\int_0^\infty u\,dy/U(x,0)$$

donc

$$v(x,\infty) = \alpha \; U(x,0)\partial\delta/\partial x.$$

α est donc un sous produit de tout le calcul. D'où les méthodes de coefficient d'entraînement...

à retenir

- le processus de moyenne des équations
- la notion de fermeture de type longueur de mélange:

jet/ panache $\nu_t \sim \Delta u$ différente du cas des écoulements avec paroi ou couche de mélange, où $\nu_\tau \sim \Delta^2|\partial u/\partial y|$.

Biblio:

Cousteix (1989): "turbulence et couche limite" Ed Cepadues

J. Piquet (1983): "La turbulence et sa modélisation" cours ENSTA.

H.Tennekes & J.L Lumley (1978): "A first course in turbulence" MIT Press.

H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.

Notes pédagogiques
bien jongler avec les ordres de grandeurs supplémentaires introduits par la turbulence...
faire passer le message de la longueur de mélange