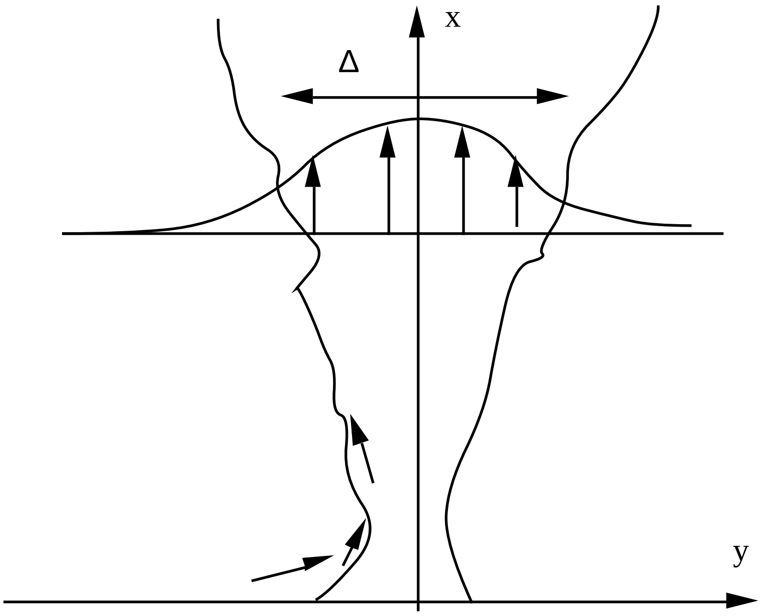
ENSTA

Panache turbulent

1998-99

PC de révision

Une tache thermique située sur le sol crée par l'élévation de température une zone de fluide moins dense que l'atmosphère ambiante: un mouvement ascensionnel est généré. Ce phénomène de panache s'obtient par exemple avec la fumée d'une cigarette ou avec la cheminée d'une machine à vapeur. En anglais il s'agit des "*thermal plumes*", en allemand d'"*Auftriebsstrahlen*". Un panache laminaire est très instable aussi nous allons le supposer pleinement turbulent et nous allons déterminer l'épaisseur de cette couche limite libre de convection naturelle.



Les équations de Navier Stokes moyennées (équations aux tensions de Reynolds) s'écrivent dans le cas de l'approximation de Boussinesq:

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial}{\partial y}V = 0.$$

$$(2)\qquad \rho\left(U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}) + \alpha\theta g$$

$$(3)\qquad \rho\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy})$$

$$(4)\qquad \rho c_p\left(U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x) - \frac{\partial}{\partial y}(q_y)$$

P est la moyenne de pression de perturbation par rapport à la pression hydrostatique, et U est la moyenne de la vitesse $\langle u\rangle=U$, $u=U+u'$ et bien entendu $\langle u'\rangle=0$. $\theta=\langle T\rangle$, $V=\langle v\rangle$. On a posé:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho\langle u'u'\rangle, \qquad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \rho\langle u'v'\rangle, \qquad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} - \rho\langle v'v'\rangle$$

$$q_x = - k \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho c_p\langle\theta'u'\rangle \text{ et } q_y = - k \frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho c_p\langle\theta'v'\rangle$$

On suppose que les ordres de grandeurs des corrélations sont les mêmes:

$$O(\langle u'u'\rangle) = O(\langle u'v'\rangle) = O(\langle v'v'\rangle) = O(u^{*2})$$

On suppose qu'au loin l'atmosphère est au repos complet.

Le but de la PC est de résoudre ce système en le simplifiant par l'analyse phénoménologique. On montrera qu'il existe même une solution semblable (si on se donne une hypothèse de fermeture).

1) Nous commençons par la solution extérieure, montrer qu'à nombre de Reynolds infini il ne se passe rien sauf en y=0. Conclusion?

2) Soit L la distance le long du panache qui nous sert par la suite de longueur caractéristique, et soit Δ l'ordre de grandeur de la largeur du jet. Le rapport $\varepsilon=\Delta/L$ sera un petit paramètre. Si U_0 est l'ordre de grandeur de la vitesse longitudinale, trouver l'ordre de grandeur de la vitesse transverse.

3) En examinant 1 et 3, montrer que $\partial P/\partial y$ n'est pas nul, Soit Π l'ordre de grandeur de la pression, on suppose que l'intensité de la turbulence est importante, montrer que $\Pi=\rho u^{*2}$. En déduire P.

4) Montrer que le système final est:

$$\frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} V = 0.$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle + \alpha\theta g$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y}\langle\theta'v'\rangle$$

5) En examinant le second ordre, trouver une relation pouvant lier l'intensité de la turbulence au nombre de Reynolds.

6) Remarquer que l'on peut construire une relation de conservation intégrale à partir de l'équation de la chaleur.

7) Pour continuer la résolution, on va faire une hypothèse de type longueur de mélange pour fermer le système:

$$-\langle u'v'\rangle = \chi_t \, Y \, U(x,0) \frac{\partial U}{\partial y} \text{ et } -\langle\theta'v'\rangle = Pr_t^{-1} \chi_t \, Y \, U(x,0) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

où Y est la valeur de y telle que U(x,Y)/U(x,0)=0.5. χ_t est un coefficient empirique...

Montrer que l'on peut chercher la solution sous forme semblable.

PC de Révision
Correction Panache turbulent.

1) Solution extérieure: tout est nul: ligne singulière en y=0.
2) Pour conserver l'incompressibilité et la dérivée totale on a comme d'habitude:

$$V_0=\Delta L^{-1}U_0=\varepsilon U_0$$

Examinons la pression transverse dans (3)

on pose $R=U_0L/\nu$, et dans $\tau_{yy} = \nu \frac{\partial V}{\partial y} - \langle v'v'\rangle = O(U_0^2 R^{-1}) + O(u^{*2})$

car $\langle u'u'\rangle = \langle u'v'\rangle = \langle v'v'\rangle = O(u^{*2})$

$$(3)\qquad U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\rho\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial V}{\partial x} - \langle u'v'\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \langle v'v'\rangle\right)$$

on adimensionne et on divise tout par $U_0^2/(L\varepsilon)$

$$\varepsilon^2 \qquad \varepsilon^2 \qquad \Pi/(\rho U_0^2) \qquad R^{-1}\varepsilon^2 \qquad \varepsilon(u^*/U_0)^2 \qquad R^{-1} \qquad (u^*/U_0)^2$$

le terme le plus grand (autre que la pression) est le dernier, donc par moindre dégénérescence:

$$\Pi=(u^*/U_0)^2(\rho U_0^2)$$

(on suppose que le terme de viscosité turbulente est prépondérant, on ne fait pas de laminaire!!, $R^{-1} \ll (u^*/U_0)^2$) on en déduit (ici avec les dimensions) que la pression varie transversalement dans le panache:

$$\frac{\partial P}{\rho\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\langle v'v'\rangle)$$

donc $P = -\rho \langle v'v'\rangle$, car il n'y a pas de constante d'intégration (à l'∞: la pression est 0). (2) devient:

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\langle u'u'\rangle - \langle v'v'\rangle) - \frac{\partial}{\partial y}(\langle u'v'\rangle) + \alpha\theta g$$

on adimensionne et on divise tout par U_0^2/L

$$1 \qquad 1 \qquad = R^{-1} + \varepsilon^{-2}R^{-1} \qquad (u^*/U_0)^2 \qquad \varepsilon^{-1}(u^*/U_0)^2 \qquad \alpha\Theta gL/U_0^2$$

On travaille à R très grand, et ε petit, la moindre dégénérescence suggère donc de prendre pour contrebalancer les termes convectifs le terme $\frac{\partial}{\partial y}(\langle u'v'\rangle)$, donc $\varepsilon=(u^*/U_0)^2$. On suppose que le nombre de Reynolds est assez grand pour que $\varepsilon^{-2}R^{-1}$ soit petit (on retrouve la condition de terme de viscosité turbulente prépondérante $R^{-1} \ll (u^*/U_0)^2 \iff \varepsilon^{-2}R^{-1} \ll 1$, on a donc $\varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg R^{-1}$). Ce terme est le terme suivant dans le développement:

$\varepsilon^{-2}R^{-1}=(L/\Delta)(\nu/(\Delta u^*))(u^*/U_0)=R_\Delta^{-1}\varepsilon^{-1/2}$, est à comparer à ε, on en déduit que si $R_\Delta=(\Delta/L)^{-3/2}$ les termes de diffusion moléculaire sont du même ordre de grandeur que les termes turbulents négligés.

La température (dernier terme qui doit être d'ordre 1) donne alors $\alpha\Theta g=U_0^2/L$, donc aussi $\Theta=(g/\alpha)(u^{*2}/\Delta)$. On pose $t\Theta$ l'ordre de grandeur de la fluctuation de T,

$$\left(U\frac{\partial \theta}{\partial x} + V\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(k/\rho c_p)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(k/\rho c_p)\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\langle\theta' u'\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\langle\theta' v'\rangle$$

on adimensionne et on divise tout par U_0/L

$$1 \qquad Pr^{-1}R^{-1} \qquad \varepsilon^{-2}Pr^{-1}R^{-1} \qquad t(\varepsilon^{1/2}) \qquad t(\varepsilon^{1/2})/\varepsilon$$

Le nombre de Prandtl étant d'ordre un, les termes à retenir sont $\frac{\partial}{\partial y}\langle\theta' v'\rangle$ et le terme de dérivée totale dans l'équation de la chaleur. Donc t=($\varepsilon^{1/2}$) (comme u^*/U_0). On arrive donc bien au système proposé à l'échelle ε proposée.

5) le terme de viscosité moléculaire le plus grand est $\varepsilon^{-2}R^{-1}$, à comparer à $(u^*/U_0)^2$. Donc:
$\varepsilon=R^{-1/3}$, ce qui donne comme nous l'avons déjà vu: $R_\Delta=(\Delta/L)^{-3/2}$

$$(u^*/U_0)=R^{-1/6},\ \theta'/\Theta = R^{-1/6},\ \Delta/L=R^{-1/3}$$

on vérifie que $R^{-1/6}>>R^{-1}$ et $R^{-1/3}>>R^{-1}$.
En fait, expérimentalement, on constate que pour une assez grande plage de nombre de Reynolds, ε est constant est vaut environ 0.01.

6) En intégrant de -∞ à ∞ en y, l'équation de l'énergie:

$$U\frac{\partial\theta}{\partial x} + V\frac{\partial\theta}{\partial y} + \theta\left(\frac{\partial}{\partial x}U + \frac{\partial}{\partial y}V\right) + \frac{\partial}{\partial y}\langle\theta' v'\rangle=0,$$

écrite sous forme conservative donne:

$$\frac{\partial(\theta U)}{\partial x}+\frac{\partial(\theta V)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\langle\theta' v'\rangle=0$$

et en permutant l'intégration et la dérivation (ce qui est possible car le domaine est fixe), et compte tenu du fait que que $\theta(\pm\infty)=0$ (au loin la température est constante). En revanche, $V(\pm\infty)=0$ n'est pas certain, en fait on calcule qu'il y a aspiration). On a aussi $\langle\theta' v'\rangle(\pm\infty)=0$ (au loin on est au repos complet, donc pas de fluctuations), on voit facilement que: $\int_{-\infty}^{\infty}\theta U dy$ est LA constante de l'écoulement. C'est donc le flux total du panache.

7) l'ordre de grandeur de ν_t est $(u^*/U_0)^2$, le Prandtl turbulent est d'ordre un.
les équations <u>sans dimensions</u> sont

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} YU\frac{\partial U}{\partial y} + \theta;\ U\frac{\partial\theta}{\partial x} + V\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}Pr_t^{-1}\, Y\, U\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

par dilatation $U=U^*U$, $x=x^*x$, $y=y^*y$ ... l'invariance des équations donne:

$$\theta^*=U^{*2}x^{*-1},\ x^*=y^*,\ V^*=U^*,$$

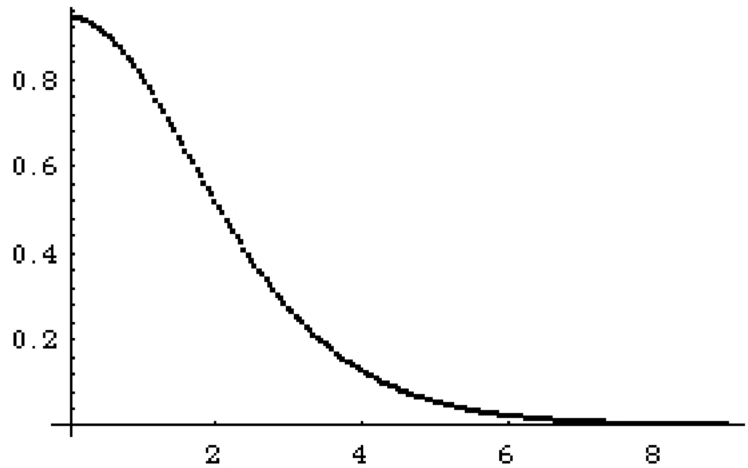
donc $F_1(UU^*,\theta U^{*2}x^{*-1},xx^*,yx^*)=0$
l'invariance du flux donne $\theta^*U^*y^*=1$, donc $U^*=1$, d'où:
$F_2(U,\theta x^{*-1},xx^*,yx^*)=0$, par élimination de x^*, $F_3(U,\theta x,xx^*,y/x)=0$, vrai pour tout x^*, donc:
$\theta=\xi^{-1}g(\eta)$, $U=f'(\eta)$ et $\eta=y/x$, $\xi=x$. $\psi=\xi f(\eta)$, $V=-f+\eta f'$
Comme dans les jets turbulents, la variable de similitude est y/x.
la transformation des dérivées
$\partial_x = (\partial\xi/\partial x)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial x)\partial_\eta$ et $\partial_y = (\partial\xi/\partial y)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial y)\partial_\eta$ donne:
$\partial_x = \partial_\xi -\eta\xi^{-1}\partial_\eta$ et $\partial_y =\xi^{-1}\partial_\eta$ d'où:

$$-\ ff''= g + \frac{\partial}{\partial\eta}(\eta_{0.5}f'')\ \&\ -(fg)'=Prt^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta_{0.5}g')$$

avec $f'(0)=u_0$, $f''(0)=0$ $g(0)=g_0$, $g'(0)=0$ $f'(\infty)=0$ et $g(\infty)=0$. et u0 et g_0 et $\eta_{0.5}$ tel que $f'(\eta_{0.5})=0.5\, f'(0)$ et $\int_{-\infty}^{\infty} g f' d\eta=1$,

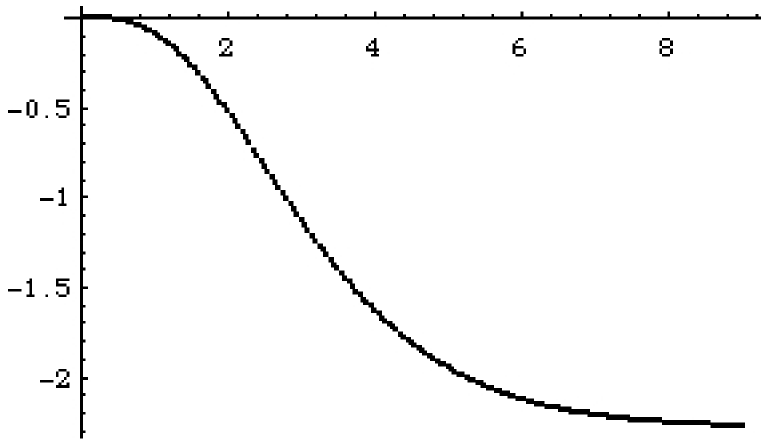
Comme pour le jet, on résout par une méthode instationnaire:

$$\eta_{0.5} f''' + f f'' + g = \partial f'/\partial t \quad \text{et} \quad \eta_{0.5} g'' + Pr\, f g' + Pr\, f' g = \partial g/\partial t.$$



vitesse u

température



vitesse transverse

Le flux de quantité de mouvement augmente sous l'action de la force de flottaison, le flux de masse augmente aussi: le panache entraîne le fluide ambiant.
=> On peut faire la même PC en laminaire

=> grave problème en cas d'incendie (Hiroshima/ Dresdes...), l'appel d'air créé attise les flammes. L'incendie de vient de plus en plus grand. L'air est de plus en plus accéléré vers le foyer, il se détend: il finit par pleuvoir. Cela limite enfin le sinsitre.
=> Une bonne manière d'être écœuré de fumer: penser au cours de Méca Flu en observant le panache de fumée de sa cigarette.

Note allusive:
Si on passe aux méthodes intégrales on écrira:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int U^2 dy + \int \theta dy = 0 \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta U dy = 0$$

et on pourra résoudre en supposant une fermeture du type $y/x=\alpha$ *etc.*

à retenir
- le processus de moyenne des équations
- la notion de fermeture de type longueur de mélange:

jet/ panache $\nu_t \sim \Delta u$ différente du cas des écoulements avec paroi ou couche de mélange, où $\nu_\tau \sim \Delta^2 |\partial u/\partial y|$.

Biblio:

Cousteix (1989): "turbulence et couche limite" p 83 belles photos de panaches.

E.J. List (1982): "Turbulent jets and plumes", Annual Review of Fluid Mech. 1982. 14:189-212.

J. Piquet (1983): "La turbulence et sa modélisation" cours ENSTA.

H.Tennekes & J.L Lumley (1978): "A first course in turbulence" MIT Press.

Y. Rocard "thermodynamique".

J. Walker "le carnaval de la physique".

PPL 99 de A.S. Coince et O. Etienne

Hinze "Turbulence"