Lundi 7 mars 2005

Transferts Thermiques dans les fluides

MF 204

durée 2 heures, tout document personnel autorisé

Etude de la convection libre verticale dans un milieux poreux

Il s'agit d'étudier un problème issu de la géophysique. On étudie une remontée verticale de magma très chaud. Le terrain traversé par cette montée verticale de lave est un mélange de plusieurs constituants, sables, roches, morceaux de lave durcie, le tout est saturé en eau. L'eau est plus froide que le magma qui la réchauffe. C'est ce réchauffement que nous allons étudier de manière très simplifiée.

Un milieu poreux est un milieu compliqué constitué d'un matériau non homogène. Il y a de nombreux "trous" et "canaux" à l'intérieur. L'eau peut donc y circuler, mais très lentement. Un exemple simple d'un tel matériau est le sable d'une plage qui peut se gorger d'eau. Ici, c'est le sol saturé en eau.

Nous allons étudier un problème idéalisé de convection naturelle stationnaire avec approximation de Boussinesq le long d'une plaque plane imperméable qui borde un milieu poreux. On travaille en 2D plan (le problème de la remontée serait axi-symétrique, mais on reste ici en plan avec x et y). Cette plaque sera supposée être à température T_w constante et supérieure à la température T_∞ du milieux poreux très loin de la plaque.
L'axe des x est dirigé vers le haut, la plaque plane est en $y = 0$, elle limite un demi espace semi infini en $y > 0$ rempli d'un milieu poreux. On ne s'occupe pas de la partie $y < 0$. La plaque commence en $x = 0$, elle est de longueur infinie. Voir figure 1 pour les notations.

La mécanique de ces milieux est complexe, mais on peut simplifier en moyennant les équations. Le fluide est incompressible. Pour l'équation de la dynamique, on aboutit à la loi de Darcy, qui stipule que la vitesse (u, v) est proportionnelle à la somme des forces qui sont le gradient de pression (p) et le poids $(-\rho g e_x)$:

$$u = -(K/\mu)(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g) \quad v = -(K/\mu)\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1}$$

K est la perméabilité du milieu poreux. **Attention** cette vitesse n'est pas nulle sur la plaque, elle glisse (comme pour les fluides parfaits). Comme ici il y a en plus la gravité on écrira que $p = p_\infty + P - \rho_0 g x$. On supposera que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \tag{2}$$

Hypothèses et conditions aux limites

1.1 Pourquoi n'étudions nous pas la partie $y < 0$?
1.2 Quelles sont toutes les hypothèses qui ont servi à écrire cette dernière équation (2) sous cette forme ?
1.3 On suppose que le fluide est légèrement dilatable. On applique donc l'approximation de Boussinesq. Réécrire u, v compte tenu de cette approximation.
1.4 Que représente P ?
1.5 Quelle est la dimension de K ?
1.6 Quelles sont les conditions aux limites pour la température en $y = 0$ et $y = \infty$?
1.7 Quelles sont les conditions aux limites pour la vitesse en $y = 0$ et $y = \infty$?
1.8 Quelles sont les conditions aux limites pour la pression en $y = \infty$?

Adimensionnement

2.1 On va écrire toutes les équations sous forme adimensionnée. Pour cela, dites pourquoi on pose :

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty)\bar{T}, \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}.$$

2.2 Quel est le terme moteur dans les équations ?
2.3 On ne connaît pas U_0 l'ordre de grandeur de la vitesse, estimez le à partir du terme moteur.
2.4 Montrez que le système final sans dimension est alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{u} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \bar{T} \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

2.5 Ecrire les conditions aux limites associées (attention au glissement).
2.6 Identifier G en fonction des paramètres du problème.
2.7 G est grand, pourquoi ?
2.8 Que se passe t 'il si l'on fait tendre G vers l'infini dans les équations ?

Couche limite

3.1 On va poser $\varepsilon\tilde{y} = \bar{y}$, $\tilde{x} = \bar{x}$. Pourquoi ?
3.2 On pose $T = T_\infty + (T_w - T_\infty)\tilde{T}$, pourquoi ?
3.3 Quelle échelle prend on pour la vitesse u ? Et pour v ?
3.4 Montrer que le système s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{T} \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

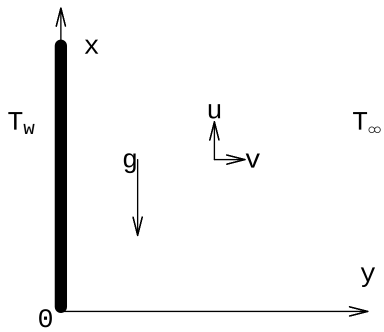
3.5 justifiez de votre choix de ε.
3.6 Ecrire toutes les conditions aux limites.
3.7 Justifiez que $\tilde{P} = 0$.

Solution semblable

On cherche une solution du système de couche limite sous une forme autosemblable.
4.1 Montrer que $\xi = \tilde{x}$ et $\eta = \tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}}$ sont les variables de similitude, on posera $\tilde{u} = f'(\eta)$ et $\tilde{T} = \theta(\eta)$.
4.2 Quelle est l'expression de $\tilde{v}$?
4.3 En déduire que le système devient : $f' - \theta = 0, \quad 2\theta'' + f\theta' = 0.$
4.4 Quelles sont les conditions aux limites pour résoudre ce problème ?
4.5 Montrer que l'on peut exprimer la vitesse f' en fonction de la température θ.

Solution numérique

La résolution numérique nous fournit : $\theta(5.89) = 0.01$ et $\theta'(0) = -.52002$.
5.1 En déduire l'expression du flux de chaleur à la paroi avec dimensions.
5.2 En déduire le nombre de Nusselt pour une plaque à une longueur L.
5.3 Donner l'expression $y = f(x)$ de l'isotherme correspondant à 1 % de la valeur à l'infini.
5.4 La résolution numérique nous donne aussi l'expression de f' (figure 2). Tracer la température $\theta(\eta)$.
5.5 Tracer le champ des vitesses $u(x, y), v(x, y)$ et des températures $T(x, y)$ à main levée.



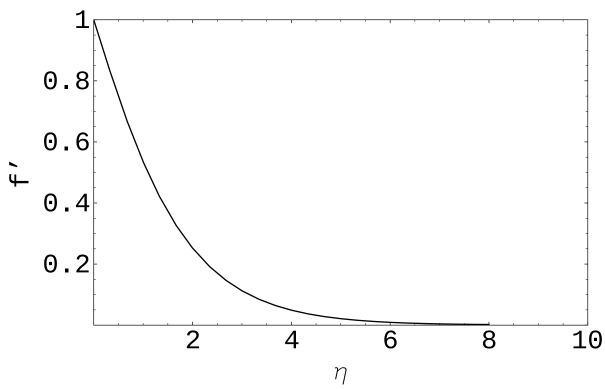


FIG. 1 – Gauche : notations, l'axe x est vertical. La paroi verticale (semi infinie, commençant en $x = 0$) est à la température T_w, au loin en $y >> 1$ la température est uniforme et vaut T_∞.

FIG. 2 – Droite : solution numérique du problème autosemblable pour f' en fonction de la variable de similitude η.

Bibliographie

P. Cheng, & W.J. Minkowycz (1977), Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike. Journal of geophysical research Vol 82, no 14.

correction

Etude de la convection libre verticale dans un milieux poreux : Correction Le milieu poreux est bien en $y > 0$, en $y < 0$ on a le magma chaud.

Dans ce milieu la vitesse (u, v) est proportionnelle au gradient de pression (p), $[u] = [K][p]/[L]$, avec K qui est la perméabilité du milieu poreux. Comme $[p] = [\rho][[u][u]$, et que $[\rho][[u][L]/[\mu]$ est sans dimension, on a $[K] = [L]^2$, homogène à une surface, celle des pores. On admet que l'équation de la chaleur a la forme classique dans laquelle on a négligé l'élévation de chaleur par les effets visqueux et on suppose que les coefficients sont constant (et aussi problème stationnaire).

Le terme moteur est bien entendu le terme de gradient de pression (dû à l'écart au nivellement baraométrique) : $\alpha\rho_0 g\Delta T$. Donc $U_0 = \frac{K}{\mu}\alpha\rho_0 g\Delta T$. est le terme moteur. Pour les conditions, outre la température imposée à la paroi et loin à l'infini, il faut dire que la vitesse est nulle au loin, et qu'elle glisse sur la paroi.
$G = \frac{K\alpha\rho_0 g Pr\Delta TL}{\mu^2}$ en fonction des paramètres du problème.
G est grand car la viscosité est faible.

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial\xi}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \frac{\partial\xi}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{-\eta}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{4}$$

$u = f'(\eta)$, $\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{v} = -\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{u}$ soit $\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{v} = \frac{\eta}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}f'$, soit $\tilde{v} = \frac{\eta}{2\xi}\int_0^\eta \eta f' d\eta$, par parties : $\tilde{v} = \frac{\eta}{2\xi}(\eta f' + f)$.