Mardi 13 mars 2007

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2 heures, tout document personnel autorisé

Etude de la convection mixte entre deux vitrages

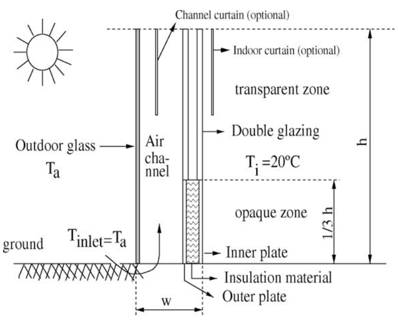


FIG. - la configuration réelle (issue de la bibliographie) que nous allons simplifier en un canal vertical avec deux parois à deux températures différentes. La configuration de l'énoncé est en dernière page.

De nombreux immeubles sont maintenant construits en verre. Cela pose de graves problèmes d'isolation thermique en été. Le double vitrage simple n'est pas suffisant. Aussi de nouvelles solutions sont à l'étude, par exemple, on double la surface vitrée d'une autre surface vitrée extérieure. Cela constitue un canal plan dans lequel on envoie par le bas un courant d'air pour refroidir.
Bien entendu, l'étude de ce problème complet est compliquée, les solutions existantes (c.f. biblio) sont d'ailleurs fondées sur des résolutions intégrales avec des bilans globaux grossiers. L'objet de ce problème est de bien poser une partie des équations et de les résoudre dans deux cas simplifiés dégénérés.

Il s'agit donc d'étudier un problème de convection mixte (convection naturelle + convection forcée) dans un canal plan (x et y pas de z) très élancé d'un fluide newtonien stationnaire faiblement dilatable (de l'air). Le mur vertical de droite est froid à la température T_f, le mur de gauche est chaud à la température T_c. On pose $T_0 = \frac{T_f+T_c}{2}$ qui servira de référence pour le terme de Boussinesq. En bas le fluide est injecté à la température T_a, il sort en haut. Soit w la largeur entre les deux plaques. L'axe des x est dirigé vers le haut, la paroi chaude de gauche est en $y = w/2$, voir la figure 1 (la froide est en $y = -w/2$). Le problème est 2D plan pour simplifier.

On note α le coefficient de dilatation volumique. On supposera que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}). \tag{1}$$

La question 5 est assez indépendante des précédentes.

Equations complètes

1.1 On fait l'approximation de Boussinesq pour la densité du fluide. Écrire le système d'équations dynamiques pour la vitesse notée u et v.
1.2 Écrire les conditions aux limites pour la vitesse.
1.3 Écrire l'équation de la chaleur,énoncer les hypothèses qui permettent de l'écrire sous la forme (1) ?
1.4 Écrire les conditions aux limites pour la température.

Adimensionnement, cas complet

On va écrire toutes les équations sous forme adimensionnée. Pour cela on pose :
$T = T_0 + (T_c - T_0)\bar{T}$, $x = w\bar{x}$, $y = w\bar{y}$ (w, largeur), $u = U_0\bar{u}$ et $v = U_0\bar{v}$, U_0 est l'échelle inconnue de vitesse.
2.1 On choisit pour échelle de vitesse $U_0 = U_i$ l'ordre de grandeur de la vitesse injectée en bas. Montrez que le système final sans dimension est alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + J\bar{T} + \frac{1}{R}(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2})$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{R}(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}) \qquad \bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{R'}(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$$

2.2 Identifier J, R et R' en fonction des paramètres du problème. Identifier le nombre de Richardson $Ri = \frac{g\alpha(T_c - T_0)w}{U_i^2}$. Nommer R et R'.
Attention dans la suite du problème R et R' changent suivant le choix de U_0.
2.3 Écrire les conditions aux limites associées.
2.4 Les nombres R, R' sont grands, pourquoi ? Ri est quelconque, pourquoi ?
2.5 Que se passe-t-il lorsque U_i est nul ?
2.6 Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement incident ($U_i = 0$) quel est le terme moteur des équations ? En déduire la valeur de la jauge de la vitesse U_0 dans ce cas (que vaut J ?).
2.7 Le nombre R (lorsque U_i est nul) est associé à un nombre sans dimension classique, quel est il ?

Cas convection libre pure

La pompe est tombée en panne, il n'y a pas de vitesse d'injection en bas (comme pour les questions 2.5 et suivantes). Lorsque R est très grand, on est donc dans une configuration de convection libre entre deux plaques.
3.1 Écrire le système à résoudre.
3.2 Si R est assez grand, il existe deux couches limites thermiques de convection naturelle qui sont complètement déconnectées. Une qui monte le long d'une paroi et une autre qui descend le long de l'autre paroi. Identifiez ces deux parois.
3.3 En vous aidant des résultats du cours, donner l'expression de l'épaisseur de ces deux couches limites de convection libre.
3.4 Toujours en vous aidant du cours, faites un croquis montrant la solution du champ des vitesses et

la température en coupe le long de y (à x fixé).

Longueurs d'établissement

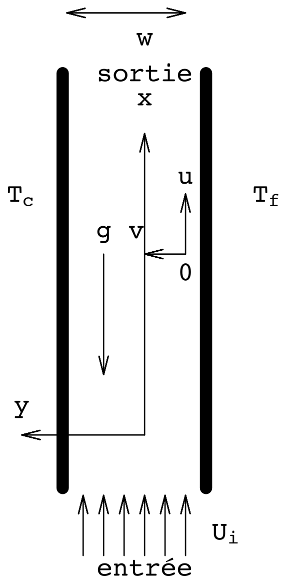
Si le nombre R n'est pas trop grand et que la longueur du canal est assez grande, que l'on fasse marcher ou non la pompe, il finit par y avoir une région où les deux couches limites ont envahi le canal. Nous allons ici estimer cette longueur d'établissement.
Pour cela, revenons au système complet de la question 1 avec dimensions, et posons cette fois :
$T = T_0 + (T_c - T_0)\bar{T}, \quad x = L_e\tilde{x}$ (L_e longueur d'établissement à estimer), $y = w\bar{y}$ (w, largeur), $u = U_0\bar{u}$
4.1 Dites pourquoi il suffit de regarder l'ordre de grandeur des termes $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $g\alpha(T - T_0)$ et $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pour pouvoir espérer estimer la longueur d'entrée.
4.2 Dans le cas où la pompe est arrêtée, (pas de U_i), et qu'il y a convection naturelle uniquement sur chaque plaque, exprimer L_e en fonction de g, α, w, $T_c - T_0$ et ν. Cette longueur est elle bien la même pour l'équation dynamique et l'équation thermique ?
4.3 Dans le cas où α est nul ou négligeable (et on fait marcher la pompe $U_0 = U_i$), exprimer L_e en fonction de w, ν et U_i (peut on l'exprimer en fonction d'un nombre sans dimension connu ?). Cette longueur est elle bien la même pour l'équation dynamique et l'équation thermique ?

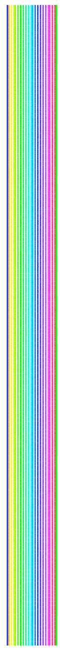
Cas établi : cas invariant par translation

Lorsque la longueur du canal est bien supérieure à L_e (cas avec ou sans pompe), les effets de bouts ne se font plus sentir sur une grande partie du canal (excepté aux deux bouts : en haut et en bas !). L'écoulement est alors invariant par translation.
5.1 On fait marcher la pompe, montrez que le système final sans dimension est alors :

$$0 = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + K\tilde{T} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \qquad\qquad 0 = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

5.2 Identifier K en fonction des nombres introduits dans les questions précédentes
5.3 Justifiez que $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}}$ est une constante que l'on peut prendre égale à -1 par un choix judicieux de l'échelle de gradient de pression que l'on précisera.
5.4 Résoudre $\tilde{T}$ compte tenu des conditions aux limites.
5.5 Si la pompe est très forte, K est il grand ou petit ?
5.6 Résoudre la vitesse $\tilde{u}$ compte tenu des conditions aux limites dans le cas $K = 0$. De quel écoulement classique s'agit il ? Comment appelle-t-on ce type de convection ?
5.7 Tracer la vitesse et la température sur un même graphe.
5.8 Si K est non nul, résoudre $\tilde{u}$ en remarquant que la solution précédente est solution particulière.
5.9 Tracer la solution complète pour K de plus en plus grand.
5.10 Que devient la solution pour K très grand ? La tracer.
5.11 Si K est très grand que peut on dire sur le type de convection en jeu ? Que devient le système (5.1) précédent ? Quelle est la bonne échelle pour la vitesse ?
5.12 Conclure que le régime établi ne modifie pas le transfert thermique dans ce cas particulier.
5.13 Quels sont les phénomènes oubliés ?





Gauche : notations, l'axe x est vertical dirigé vers le haut. La paroi verticale de droite est à la température T_f uniforme (intérieur froid de l'immeuble). La paroi de gauche est chauffée à la température T_c uniforme (température chaude extérieure). En bas en entrée on peut envoyer un courant de vitesse caractéristique U_i

Droite : solution numérique du problème cas pompe arrêtée ($G = 100$), iso températures.

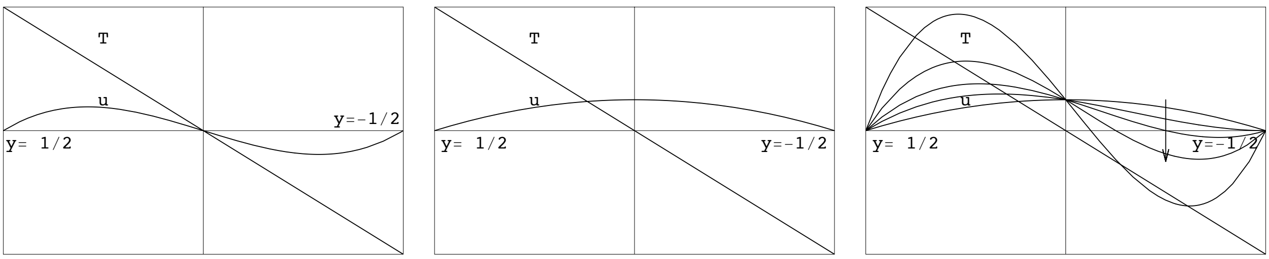
Bibliographie

D. Faggembauu, M. Costa, M. Soria, A. Oliva (2003) :
Numerical analysis of the thermal behaviour of ventilated glazed facades in Mediterranean climates.
Part I : development and validation of a numerical model
Solar Energy 75 (2003) 217–228
et :
Part II : applications and analysis of results
Solar Energy 75 (2003) 229–239
F. Sacadura (1993) :
"Initiation aux tranferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.

Etude de la convection mixte entre deux vitrages : indications

1. Cours et données de l'énoncé.
2. On identifie facilement $J = Ri$ le nombre de Richardson, $R = U_i w/\nu$ le nombre de Reynolds et $R' = U_i w/\nu/Pr$ le nombre de Péclet.
Les Reynolds et Péclet sont grands car dans les configurations industrielles $U_i w >> \nu$ et $Pr = 0.7$, en revanche le nombre de Richardson est quelconque (la vitesse U_i peut être variée à volonté).
Lorsque U_i est nul, c'est uniquement le terme de Boussinesq qui est moteur. Le bon choix pour U_0 est $\sqrt{\alpha g \Delta T w}$ (ce qui revient à avoir $J = 1$ et pas de nombre de Richardson) .
Le nombre R est la racine du nombre de Grashof construit sur w, $G = \frac{\alpha g \Delta T w^3}{\nu^2}$.
3. On se retrouve exactement dans la configuration du cours puisque chaque plaque développe une couche limite thermique de convection libre, ascendante sur la paroi chaude et descendante sur la paroi froide. Ces couches étant bien plus fines que la largeur entre les plaques et d'épaisseur relative $G^{-1/4}$.

4. On compare le terme d'inertie qui est le terme d'établissement longitudinal par rapport au terme de poussée d'Archimède et au terme de freinage visqueux. Pour l'équation de la chaleur les mêmes termes d'inertie et de freinage sont en compétition ($Pr = 0.7$), les longueurs d'établissement sont les mêmes pour les équations dynamique et thermique.
Dans un cas $Le = w^4(\alpha g \Delta T/\nu^2)$ et dans l'autre $L_e = w(wU_i/\nu)$.
5. On a $\frac{\partial P}{\partial x} = (\nu U_i/w^2)\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}}$. On identifie $K = (\alpha g \Delta T)/(\nu U_i) = RiRe = GRe^{-1}$.
La température est indépendante de l'écoulement : $\tilde{T} = 2\tilde{y}$ (aux parois $\tilde{T}(\pm 1/2) = \pm 1$).
Cas $K = 0$, c'est le cas Poiseuille on trouve $\tilde{u} = \frac{1-4y^2}{8}$.
Dans le cas K non nul ; par combinaison $\tilde{u} = \frac{1-4y^2}{8} + K\tilde{u}_l$, d'où $0 = 2\tilde{y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_l}{\partial \tilde{y}^2}$ soit $\tilde{u}_l = \frac{1}{12}(y - 4y^3)$.
Il s'agit de la convection naturelle pure (à K grand, la convection forcée devient de plus en plus négligeable, en $1/K$; c'est la convection libre qui domine).



A gauche, tracé de la vitesse et de la température au travers du canal dans le cas sans pompe de convection libre uniquement. Au centre, cas avec pompe ; mais à dilatation négligeable, il n'y a que de la convection forcée. A droite, convection mixte, tracé de la vitesse et de la température pour différentes valeurs de K (flèche dans le sens des K croissants).