Mardi 11 mars 2008

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2 heures, tout document personnel autorisé

Etude de la convection forcée externe instationnaire

L'objet de ce problème est l'étude d'une plaque chauffée sur toute sa longueur. Cette configuration, ici toute académique, se rencontre dans les cas suivants :
• dégivrage d'une vitre arrière de voiture
• dégivrage d'une gouverne d'avion
• préchauffage d'un gaz
• ...

La configuration que nous étudions est donc une simple plaque plane (de longueur par exemple $2L$) plongée dans un écoulement uniforme 2D stationnaire laminaire établi.

$$(u, v) = (U_\infty, 0).$$

Le nombre de Reynolds sera supposé grand. Initialement, la plaque et l'écoulement sont à la température T_∞. Au temps choisi comme origine des temps ($t = 0$), on chauffe la plaque en imposant une densité de flux ϕ_0 uniforme :

$$\phi_0 = -k\frac{\partial T}{\partial y}(x > 0, y = 0).$$

On note $T_p(x, t)$ la température sur la plaque (voir FIG 1).

Hypothèses sur l'écoulement :

1.1 Quelles sont les hypothèses qui permettent de découpler la "thermique" de la "dynamique" ?
1.2 Quelles sont les hypothèses qui permettent de dire que l'écoulement est celui de Blasius (ce que l'on admet par la suite).
1.3 Quelle est la limite en Reynolds pour que l'écoulement reste laminaire ?
1.4 Pourquoi n'étudions nous ni le bord d'attaque, ni le bord de fuite ?

Equations complètes

On ne perdra pas de temps dans ces questions, mais on répondra aux questions en utilisant le cours.
2.1 Ecrire (sans démonstration) l'équation complète de la chaleur pour le fluide en n'oubliant pas le terme instationnaire.
2.2 Ecrire (sans démonstration) l'équation de la chaleur adimensionnée, on utilise dans un premier temps :

$$x = L\bar{x}, \quad \text{et} \quad y = L\bar{y} \quad \text{et} \quad T = T_\infty + (\Delta T)\bar{T},$$

Faites apparaître le nombre de Reynolds (Re), le nombre de Prandtl (Pr) et le nombre d'Eckert (E) que l'on suppose très petit (on le néglige en fait dans la suite).
2.3 Montrer que l'on peut choisir deux échelles de temps *a priori*, on choisit celle associée à la vitesse U_∞ et L uniquement (Strouhal unitaire). Discuter.
2.4 Suggérez une échelle pour la température (ce ne sera peut être pas celle que l'on prendra par la suite en question 2.8).
2.5 Ecrire les conditions au limites et les conditions initiales pour tous les champs.
2.6 On suppose que $E << 1$ et $Pr = 0(1)$, pourquoi dit on que le problème précédent écrit sans dimension est singulier en $\bar{x} > 0$ et $\bar{y} = 0$ lorsque $Re >> 1$.
2.7 Ecrire l'équation de la chaleur adimensionnée en variables de couche limite de Blasius (on mettra des tildes sur les nouvelles variables). Ne pas oublier le terme temporel.
2.8 En écrivant la condition de flux, en déduire que l'échelle de température est reliée au flux pariétal donné et à l'épaisseur de couche limite dynamique, on choisira l'échelle telle que $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = -1$ en $\tilde{y} = 0$.

Résolution aux temps courts

On regarde ce qui se passe lorsque l'on commence à chauffer. En fait, c'est comme s'il n'y avait pas d'écoulement. On va montrer que le problème est de la forme :

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{y}^2};\;\; \hat{q}(\hat{t}=0,\hat{y}) = 0,\;\; \hat{q}(\hat{t},\hat{y}=0) = 1,\;\; \hat{q}(\hat{t},\hat{y}=\infty) = 0, \text{ avec } \hat{q} = -\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}.$$

On rappelle la fonction erreur $erf(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-s^2} ds$, la complémentaire $erfc(x) = 1 - erf(x)$ et on remarque que $\frac{d}{dx}(x \;\; erfc(x) - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}) = erfc(x)$.
Pour ce faire :
3.1 On se place aux temps courts (temps petit par rapport à 1 en adimensionné, $\hat{t} = (tU_\infty/L)/\varepsilon$) sans changer l'échelle longitudinale (on reste en $x = O(L)$). Montrer qu'à ces temps courts, les termes de dérivation spatiale dans la dérivée totale disparaissent dans l'équation de la chaleur de la question 2.7.
3.2 Montrer que la couche chauffée transversement est fine. Donner son échelle en fonction de ε.
3.3 Montrer que l'on obtient le problème ci dessus en $\hat{q}$.
3.4 Montrer que le système obtenu est un problème de similitude, on peut résoudre $\hat{q}$ en fonction de la fonction $erfc$ ou erf de la variable de similitude que l'on précisera.
3.5 En déduire la température $\hat{T}$ explicitement. Constater que la température croît en racine du temps.
3.6 Comment varie le nombre de Nusselt ?

Résolution aux temps longs

On se place maintenant aux temps longs .
4.1 On étudie les temps $\check{t} = \bar{t}\varepsilon$ (le ε est différent de la question précédente). Montrer qu'à ces temps longs, le terme de dérivation temporelle dans la dérivée totale disparaît.
4.2 Montrer que l'échelle de température n'est pas fonction de ε.
4.3 Montrer que le système obtenu est un problème de similitude, on ne cherchera pas à le résoudre explicitement. Constater que la température croît en racine de la distance $\bar{x}$.
4.4 Comment varie le nombre de Nusselt ?

Résolution

Lorsque l'on chauffe impulsivement la plaque, il y a deux régimes asymptotiques. A position $\bar{x}$ fixée aux temps courts, on est dans la question 3, puis lorsque le temps augmente, on arrive au problème complet de la question 2, et enfin aux temps longs au problème de la question 4.
Commentez les figures ci dessous FIG2 et FIG 3 extraites de la référence 1. Il s'agit d'une application dans le cas de l'air, avec $U_\infty = 1m/s$ et $\phi_0 = 100W/m^2$ initialement à température ambiante.
5.1 Interpréter la figure 2 compte tenu de 3.5 et 4.3.
5.2 Définir un facteur d'échange local. Interpréter la figure 3 compte tenu de 3.6 et 4.4.

Résolution à petit Prandtl

On reprend le système complet (questions 2 et 3). Montrer que si le nombre de Prandtl est très petit, le système dégénère. En déduire qu'il faut introduire une nouvelle échelle associée à la variable $\tilde{y}$ et que l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{Y}^2}$$

6. Discuter la solution de cette équation pour $\tilde{t} < \tilde{x}$ c'est à dire résoudre $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{Y}^2}$ (on utilisera les résultats du 3.). Puis pour $\tilde{t} >> \tilde{x}$, c'est à dire résoudre $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{Y}^2}$ (on utilisera encore les résultats du 3. !). Tracer l'équivalent des figures 2 et 3 dans ce cas.

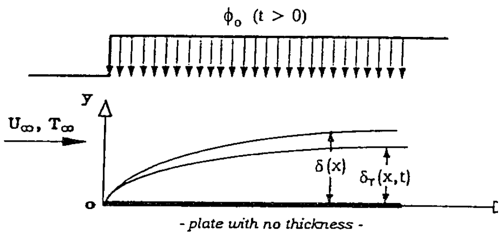

FIG. 1
Scheme of the considered problem

We will just consider the reference case where U_∞ = 1m/s and ϕ_o = 100W/m
will be air, initially at the room temperature.

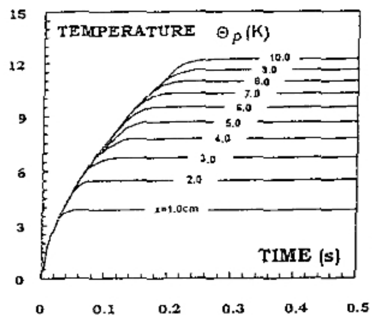

FIG. 2
Temporal thermogramms

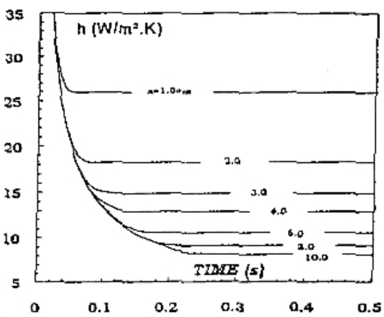

FIG. 3
Temporal convective exchange coefficient

Les légendes sont celles de l'article de Polidori et al.

Bibliographie

Polidori G., Laci M., & Padet J. (1998) Unsteady convective heat transfer on a semi infinite flat surface impulsively heated. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* Vol 25 No 1 pp 33-42.
S. D. Harris, D. B. Ingham, and I. Pop (2008) Unsteady Heat Transfer in Impulsive Falkner–Skan Flows : Constant Wall Heat Flux Case, to appear in ACTA MECHANICA

Convection forcée impulsive. Indications

1.1-1.3 Cours (ne pas oublier ρ et ν constants, sur la plaque$Re \sim 10^5$.
1.4 Des échelles spéciales sont à considérer près des bords de fuite et d'attaque.
2.1 - 2.3 Cours. On va faire attention et ne pas oublier $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U_\infty}{L}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ dans l'équation de la chaleur. On peut choisir deux échelles pour le temps $t = \bar{t}L/U_\infty$ (ce que sous entend l'écriture précédente), ou $t = \bar{t}PrL^2/\nu$, mais ce n'est pas le bon choix, comme on le verra dans la couche limite.
On finit par écrire l'équation générale de la chaleur en variables de couche limite :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + E(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}})^2.$$

2.5 Pour la ture : Flux donné à la paroi, donné à l'infini, donné au temps $t = 0$. La température de paroi est un résultat !. Ensuite on enlève le terme avec E.
2.8 On écrit $T = T_\infty + (\Delta T)\tilde{T}$, donc $\phi_0 = -k\frac{\partial T}{\partial y}(x > 0, y = 0)$ puisque $LRe^{-1/2}\tilde{y} = y$ devient $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = -1$ en $\tilde{y} = 0$. en choisissant $(\Delta T) = L(Re)^{-1/2}\phi_0/k$
3.1 Pour les temps courts on a $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$, la dérivée totale devient : $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + (\hat{u}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}})$ manifestement ; le terme temporel domine.
3.2 Par moindre dégénérescence on choisit une échelle en $(\varepsilon)^{1/2}$ pour $\tilde{y}$ et pour $\tilde{T}$, ainsi :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + (\hat{u}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}) = \frac{1}{((\varepsilon)^{1/2})^2}\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2}, \text{ devient } \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2}$$

C'est l'équation de la chaleur instationnaire. On voit que si l'on dérive par rapport à $\hat{y}$ on a le problème suggéré en $\hat{q}$.
La solution est donc avec la variable de similitude $\eta = \hat{y}/\sqrt{\hat{t}}$ on a alors $\hat{q} = erfc\left(\frac{(\sqrt{Pr})\eta}{2}\right)$ soit $\hat{q} = erfc\left(\frac{\sqrt{Pr}\hat{y}}{2\sqrt{\hat{t}}}\right)$ qui vérifie bien $\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{y}^2}$; $\hat{q}(\hat{t} = 0, \hat{y}) = 0$, $\hat{q}(\hat{t}, \hat{y} = 0) = 1$, $\hat{q}(\hat{t}, \hat{y} = \infty) = 0$, On intègre $\hat{T} = (\sqrt{\hat{t}})\ \int_0^\eta (\hat{q})d\eta$. Ce qui donne : $\hat{T} = (\sqrt{\hat{t}})\ (\hat{y}/\sqrt{\hat{t}}\ erfc\left(\frac{\sqrt{Pr}\hat{y}/\sqrt{\hat{t}}}{2}\right) - \frac{2e^{-\frac{\Pr(\hat{y}/\sqrt{\hat{t}})^2}{4}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\Pr}})$. On voit que la température à la paroi est en racine du temps.
4.1- à 4 C'est le cours en stationnaire

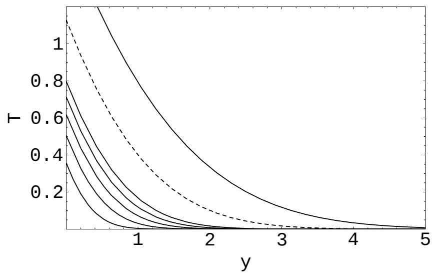

Fig. 1 – Température $\hat{t} = 0.1, .2, .3, .4, .5$ puis 1 (pointillé) et 2

5. noter l'équivalence $t <-> x$!.