ENSTA

De Poiseuille au panache *via* le jet.

COURS MF201

Transferts thermiques et massiques dans les fluides

20/12/1999

Durée de l'épreuve **3 heures**

Documents autorisés.

Un jet chaud sortant d'une cheminée de machine à vapeur, ou d'une cocotte minute est particulièrement complexe à étudier. Cet écoulement est souvent turbulent et 3D (quoique assez axisymétrique).

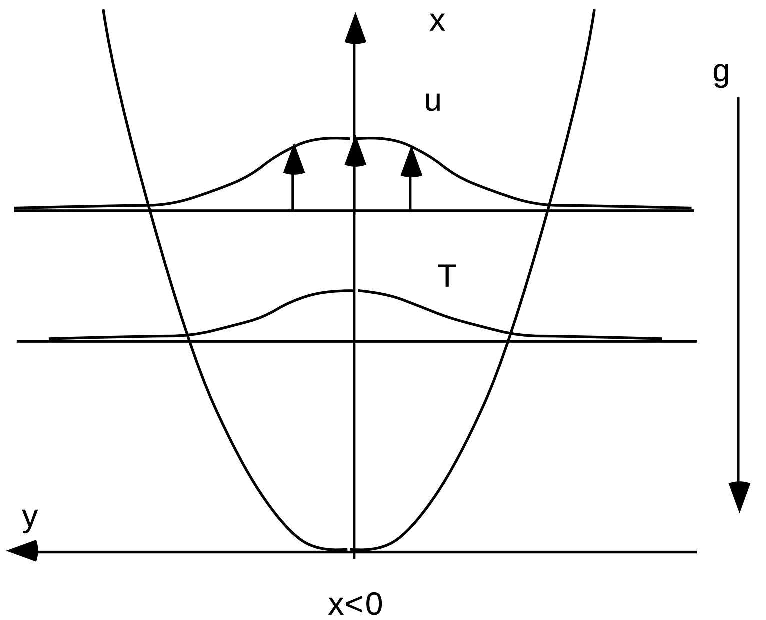


figure 1 un panache dans un champ de pesanteur.

Ici, nous allons simplifier les choses fortement, nous placer en laminaire stationnaire et en 2D plan: la cheminée est en fait une fente. [La méthode est quand même générale, et peut être étendue au cas turbulent axisymétrique en choisissant une loi de viscosité turbulente].

Dans le conduit de cheminée, l'écoulement est un écoulement de Poiseuille établi, il débouche brusquement dans l'air libre qui est à température plus faible. L'écoulement n'y est plus borné

par des parois, et le profil de vitesse va s'adapter pour donner un jet chaud. Mais, ce jet va se déformer sous l'action de la force d'Archimède qui va l'accélérer pour le transformer en beau panache (fig1).
Il y donc passage d'un écoulement interne à un écoulement libre et compétition entre la convection forcée et naturelle...

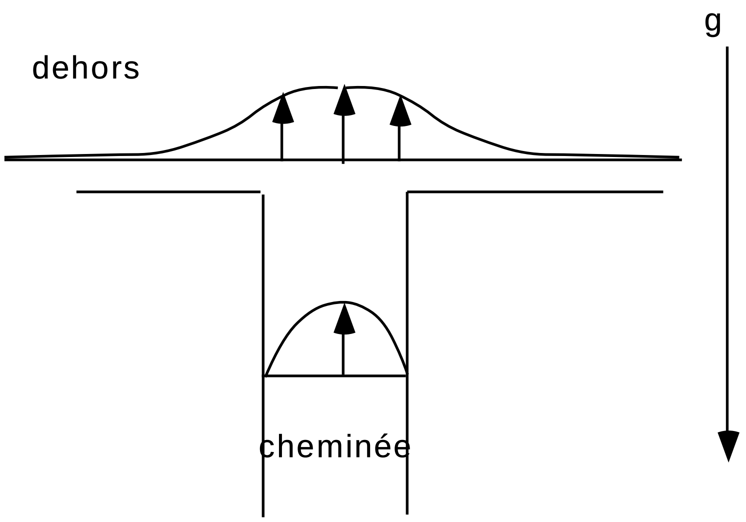


figure 2 la cheminée qui crée le jet et le panache

Dans ce problème subtil, nous allons examiner plusieurs cas simples. Dans la partie (1.) on étudie la solution autosemblable du "Panache plan". Dans la partie (2.) indépendante de (1.), on écrit les équations dans la cheminée. Dans la partie (3.) on regarde le jet issu de l'écoulement de Poiseuille avant qu'il ne soit transformé en panache.
Bien entendu il faut avoir à l'esprit que la viscosité et la conduction thermique vont jouer très peu transversalement. De ce fait l'écoulement va rester confiné près de la ligne y=0, les questions de (1.) ne font que répéter cette évidence.

Les questions (2.) peuvent êtres résolues sans avoir réussi à mener l'analyse complète de (1.).

1. Ecoulement de panache simple autosemblable.

1.1. Rappeler les équations dimensionnées de Navier Stokes stationnaires laminaires et 2D avec l'approximation de Boussinesq. Remarquer que l'axe x est vertical, et que y est horizontal. La pression est ici la perturbation par rapport à la pression hydrostatique.

On posera: $T = T_\infty + \Delta T\, \bar{T}$, où T_∞ est la température uniforme au loin.

1.2. On se place à une distance donnée L de la naissance du panache, en x>0 (cette distance est bien plus grande que h la demi largeur du conduit). Soit U_0 l'ordre de grandeur de la vitesse du jet à cet endroit, soit ΔT (la faible élévation de température) à cet endroit.

Adimensionner les équations dynamiques en utilisant U_0 et L comme jauges pour (u,v) et (x,y) (Pourquoi?). On mettra des barres au dessus des variables ($x = L\, \bar{x}$...$u = U_0\, \bar{u}$...). Justifier que la jauge de pression (en fait la perturbation de pression par rapport à la pression hydrostatique) est liée à U_0, et que $g\, \alpha \Delta T\, L = U_0^2$.

Montrez que devant les termes diffusifs on peut exhiber un nombre sans dimensions noté $R_L = U_0 L/\nu$ (ce n'est pour l'instant pas la peine d'exprimer R_L en fonction de ΔT).

1.3. Adimensionnement de l'équation de la chaleur.

Faites apparaître le nombre sans dimensions Pe devant le terme de diffusion. Pour écrire cette équation on a supposé qu'un certain nombre sans dimensions était négligeable. Lequel et quelle est son expression en fonction de U_0 et ΔT. On suppose que Pr, le rapport de Pe et de R_L est d'ordre un. Quel est le nom des nombres R_L, Pe et Pr ? Valeur de Pr pour l'eau?

1.4. Nous commençons par la solution extérieure ($R_L = \infty$), on observe que loin du panache en $y = \pm\infty$ la vitesse est nulle et la température uniforme. Constater que la solution de repos est solution des équations, que vaut la température? Conclure qu'à nombre R_L infini on peut admettre qu'il ne se passe "rien" pour tout $\bar{y}$ dont la valeur absolue est supérieure à h/L où h est la demi largeur du canal (on suppose de plus que $h/L \ll 1$, h/L tend vers 0: l'écoulement ne se produit que sur une ligne singulière $\bar{y}=0$).

1.5. Ayant dégagé par l'adimensionnement la ligne singulière $\bar{x}>0$, $\bar{y}=0$, nous allons l'étudier en faisant un changement d'échelle transverse. C'est la solution intérieure. Pour l'instant on oublie ce qui se passe en $\bar{x}=0$, et donc on ne parle plus de h la demi largeur du canal en $\bar{x}<0$ dans cette partie 1.

1.5.1. On va bien entendu garder $\bar{x}$ comme échelle longitudinale mais poser $\tilde{y} = (\delta/L)^{-1}\, \bar{y}$.

En déduire la jauge de la vitesse transverse sachant que l'on garde U_0 longitudinalement

($u = U_0\tilde{u}$). On remarque que l'on garde ρU_0^2 pour la jauge d'écart de pression et ΔT pour la jauge d'écart de température.

1.5.2. En écrivant l'équation de $\tilde{u}$ en déduire le lien entre (δ/L) et R_L.

1.5.3. En écrivant l'équation de $\tilde{v}$ en déduire que la pression ne varie pas avec $\tilde{y}$. Puis, montrer que la perturbation de pression par rapport à la pression hydrostatique est en fait nulle dans cette couche.

1.5.4. En déduire le système d'équations de couche limite dynamique et thermique "libre" qui permet de garder le maximum de termes près de ligne $\bar{y}=0$ (on rappelle que $Pr=O(1)$).

1.5.5. Si on résout pour $\tilde{y}$ entre 0 et ∞, justifier que $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\tilde{u}(\bar{x},\tilde{y}=0)=0$ et $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\tilde{T}(\bar{x},\tilde{y}=0)=0$, que vaut $\tilde{v}(\bar{x},0)$? Quelle est la valeur de $\tilde{u}(\bar{x},\infty)$ et de $\tilde{T}(\bar{x},\infty)$?

1.6. Invariants

1.6.1 En écrivant l'équation de la chaleur sous forme conservative et en l'intégrant transversalement, montrer que: $\int_0^\infty \tilde{u}\tilde{T}\, d\tilde{y}$ est une constante que l'on peut poser égale à 1/2 par le choix de la normalisation.

1.6.2. Poser le système complet d'équations aux dérivées partielles avec ses conditions aux limites en $\tilde{y}=0$ et $\tilde{y}=\infty$. On ne pose pas de conditions en $\bar{x}=0$ pour l'instant.

1.6.3. Par dilatations de toutes les variables montrer que la variable de similitude est:
$\eta=\tilde{y}\,(\bar{x})^{-2/5}$, on posera $\xi=\bar{x}$, $\tilde{u}(\bar{x},\tilde{y}) = \xi^\alpha f'(\eta)$, et $\tilde{T}(\bar{x},\tilde{y}) = \xi^\beta g(\eta)$. Valeurs de α et β?

1.6.4. Poser le problème autosemblable (équation différentielle du troisième ordre pour f et du second pour g). On admet que l'on peut résoudre numériquement ce système couplé et tracer les profils de f' et de g. Tracer grossièrement ce que pourraient être ces profils à votre avis.

1.6.5. Retour aux données physiques. La conservation de l'intégrale $\int_0^\infty \tilde{u}\tilde{T}\, d\tilde{y}$ laisse supposer que c'est cette quantité qui est fondamentale pour le jet. On pose $\Phi=2\int_0^\infty u\,(T-T_\infty)dy$, il s'agit là d'une quantité dimensionnée. En déduire que $\Phi/(U_0\Delta T\delta)$ est une valeur numérique d'ordre un. Montrer que l'on peut alors en déduire les expressions de δ, ΔT, et U_0 en fonction de la position choisie L de ν, de ($g\alpha$) et de la valeur Φ uniquement.

2. Écoulement de Poiseuille avant la sortie loin en aval.

2.1. L'écoulement est invariant par translation (figure 2).

Bien entendu, il n'y a pas de force de Boussinesq dans cette partie de l'écoulement. Vérifiez que si la vitesse est de la forme: $u = U_p (1- (y/h)^2)$ et $v=0$, alors on peut en déduire le gradient de pression qui provoque cet écoulement. Exprimez le en fonction du nombre de Reynolds Re construit avec la vitesse au centre et la demi largueur h du canal.

2.2. Les parois sont maintenues à la température T_0 constante.

Ecrivez l'équation de la chaleur associée et vérifiez rapidement que si on suppose que E=0, alors $T = T_0$ est solution partout entre les deux plans.

2.3. Ordre de grandeur longitudinal de la destruction de Poiseuille (formation du jet).

Cet écoulement canalisé ($x<0$) débouche brusquement dans un espace semi infini (figure 2).

L'étude précise de la discontinuité est compliquée, elle fait intervenir une sophistication que nous passons sous silence. Nous supposons simplement que l'écoulement précédent de Poiseuille est toujours vrai en $x<0$. Il devient une condition initiale en $x=0$ d'un écoulement de jet/ panache. Ce dernier écoulement se produit dans le demi espace $x>0$ et $-\infty<y<\infty$.

A priori, on garde h (pourquoi?) comme échelle de longueur transverse. De même la vitesse est mesurée par U_p.

Montrer, pour $x>0$, qu'il existe une échelle de longueur L telle que l'on puisse garder les deux termes suivants:

$$u \frac{\partial}{\partial x} u \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} u.$$

en déduire l'expression de L en fonction de Re et h.

Avant de continuer, examinons le problème extérieur: c'est en fait le même que dans la question 1. La longueur L que nous venons de dégager pouvant être celle de la question 1. La vitesse caractéristique étant ici U_p.

3. Equation du jet

3.1. Montrer rapidement que l'on peut adimensionner les équations dynamiques avec L et h (de la question 2.3. Faites apparaître le nombre sans dimensions $J = g \alpha \Delta T \; L/U_p^2$ (que l'on suppose pour l'instant d'ordre un, mais que l'on ne pose pas égal à 1), quelles sont les jauges de la pression de la température qui donnent:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{u} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{v} = 0$$

$$\hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{u} + \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{u} = \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} \hat{u} + J \hat{T}.$$

$$\hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{T} + \hat{v} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{T} = Pr^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} \hat{T}$$

$\hat{v}(\hat{x},0)=0$, $\dfrac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{u}(\hat{x},\hat{y}=0)=0$ et $\dfrac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{T}(\hat{x},\hat{y}=0)=0$, $\hat{u}(\hat{x},\infty) = 0$ et $\hat{T}(\hat{x},\infty) = 0$.

On fait J=0 dans la question 3.2 et 3.3.

3.2 Avec J=0, le système précédent est celui qui décrit un jet libre. Montrer que le système précédent conserve l'intégrale $\int_0^\infty \hat{u}^2 d\hat{y}$. Il s'agit de l'impulsion du jet.

3.3. Montrer (si J=0, et si on oublie ce qui se passe en $\hat{x}=0$) que la variable de similitude est $\hat{y}/\hat{x}^{2/3}$ et que la vitesse est en $\hat{x}^{-1/3}$.

4. Passage de Poiseuille au Panache via le Jet.

On peut maintenant se poser la question de la résolution du "problème complet"

Dans la question 2, on a vu que la solution de Poiseuille débouchait dans l'atmosphère en x=0. Dans la question 3 on a étudié le jet sortant sans effet de force de Boussinesq. On la réintroduit (par le paramètre J). On choisit l'échelle L de la question 2, comme échelle de longueur longitudinale et que l'on choisit U_p comme échelle de vitesse.

4.1. En déduire que les valeurs initiales de vitesse et de température pour le système (3.1) sont: $\hat{u}(\hat{x}=0, \hat{y}) = (1-\hat{y}^2)$ pour $0<\hat{y}<1$ et $\hat{u}(\hat{x}=0, \hat{y})=0$ pour $1<\hat{y}$, et $\hat{v}(\hat{x}=0, \hat{y})=0$.

quelle est la température en $\hat{x}=0$?

4.2. Les dessins suivants sont des résolutions numériques complètes des équations 3.1 avec toutes les conditions aux limites (dont celles en $\hat{x}=0$ de 4.1.). On y représente la solution calculée $\hat{u}(\hat{x}, \hat{y})$ en $\hat{y}=0$. Commenter les graphes, vérifier les différents comportements asymptotiques.

Note: les graphes sont en log -log. Sur la figure 3, il y a deux courbes correspondant à J=0 et J=0.01, elles sont confondues jusqu'à $\hat{x}$~5, la courbe J=0.01 remonte, l'autre reste confondue avec la droite notée ("pente= -1/3"). Sur la figure 4, il n'y a qu'une courbe correspondant au cas J=0.01 (et deux droites notées "pente= -1/3" et "pente= 1/5", attention on est en log log!)

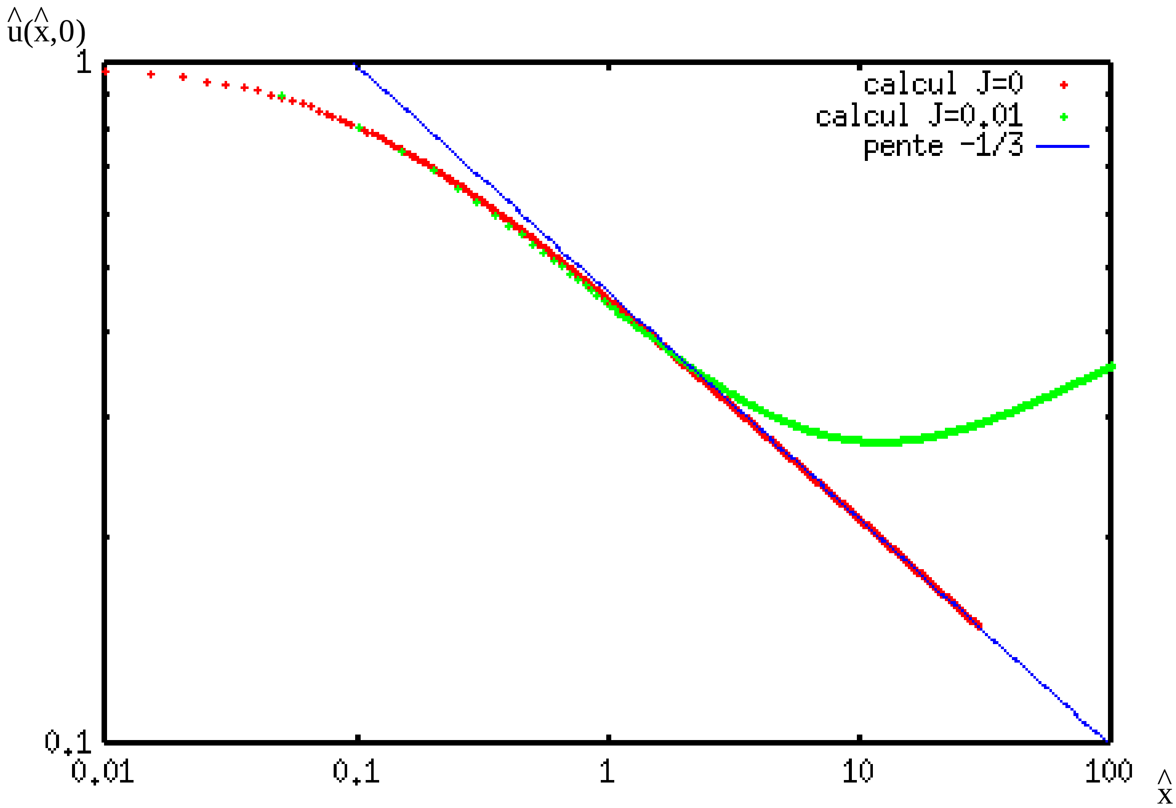


fig 3: vitesse au centre calculée $\hat{u}(\hat{x},0)$ (à J=0.01 et J=0) en échelles log-log.

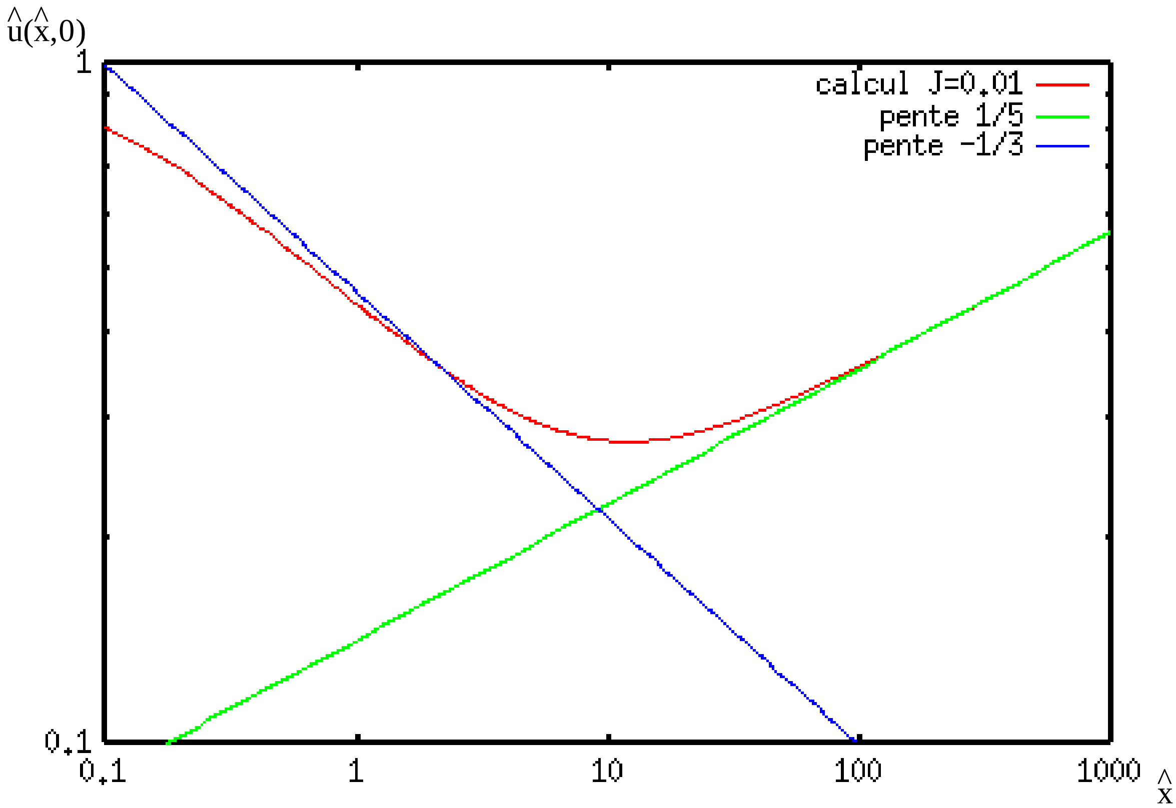


fig 4: vitesse au centre calculée $\hat{u}(\hat{x},0)$ (à J=0.01) en échelles log-log.

De Poiseuille au panache via le jet. correction simplifiée

1.1. Le système se lit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha g\Delta T\,\bar{T}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nu Pr^{-1}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

1.2. et 1.3. on mesure u et v avec U_0; x et y avec L,

$$u = U_0\bar{u},\ v = U_0\bar{v},\ x = L\,\bar{x},\ y = L\,\bar{y},\ T = T_0 + \Delta T\,\bar{T}$$

si on pose $p = p_0 + (\rho U_0^2)\bar{p}$, et $\alpha g\Delta T = U_0^2$ cela permet de mettre en relief le caractère moteur de la force de Boussinesq pour cet écoulement, la pression s'adaptant alors. Devant les termes visqueux, il vient l'inverse de $(U_0L)/\nu = R_L$:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0 \qquad \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + R^{-1}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\right) + \bar{T}$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + R_L^{-1}\left(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}\right),\quad \bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} = R_L^{-1}\,Pr^{-1}\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2}\right)$$

1.4. Si $R_L=\infty$, le système devient:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0,\ \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \bar{T},\ \bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}},\ \bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} = 0.$$

alors $\bar{u}=0$, $\bar{T}=0$ et $\bar{v}=0$ est triviale pour $\bar{x}>0$ et $\bar{y}>h/L$, pour $\bar{y}<h/L$ on aurait l'écoulement initial de Poiseuille qui continue sur sa lancée. Ni la vitesse ni la température ne peuvent diffuser de cette région (qui est la ligne singulière $\bar{y}=0$ si on suppose que $h/L\to0$), elles restent nulles partout.

1.5.1. démarche classique, pour garder le maximum de termes dans l'incompressibilité et la dérivée totale il faut poser $\tilde{u}(\bar{x},\tilde{y})=\bar{u}(\bar{x},\bar{y})$, $(\delta/L)\,\tilde{v}(\bar{x},\tilde{y})=\bar{v}(\bar{x},\bar{y})$ et $(\delta/L)\tilde{y}=\bar{y}$.

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\tilde{u} + \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{v} = 0,\quad \tilde{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}$$

1.5.2. $\tilde{u}\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}} \sim R_L^{-1}(L/\delta)^{-2}\dfrac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}\tilde{u}$. pour retrouver le terme de diffusion disparu, il nous faut prendre $\delta/L = R_L^{-1/2}$. D'où: $\tilde{u}\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}\tilde{u} + \tilde{v}\dfrac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{u} = -\dfrac{\partial}{\partial\bar{x}}\tilde{p} + \dfrac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}\tilde{u} + \tilde{T}$.

1.5.3. L'équation transverse est passive

$$\left(\tilde{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\tilde{v} + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{v} - \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}\tilde{v}\right) R_L^{-1} - \frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\tilde{v}\ R_L^{-2} = -\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{p}$$ donne $\tilde{p}$ ne dépend que de $\bar{x}$, mais comme à l'infini la perturbation de pression est nulle le raccord donne $\tilde{p}=0$.

1.5.4. l'équation de la chaleur devient simplement

$$\tilde u \frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde T + \tilde v \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde T = Pr^{-1}\frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2}\tilde T.$$

et on a: $\frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde u + \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde v = 0$, et $\tilde u \frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde u + \tilde v \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde u = \frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2}\tilde u + \tilde T$.

1.5.5. La condition $\frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde u(\bar x,\tilde y=0)=0$ peut s'interpréter comme une condition de symétrie par rapport à $\tilde y=0$. Elle traduit aussi le fait qu'il n'y a pas de contraites de cisaillement entre le haut et le bas, de même le profil de température est symétrique...

Le raccord asymptotique $\tilde u(\bar x,\infty) = \bar u(\bar x,0)$ et $\tilde T(\bar x,\infty) = \bar T(\bar x,0)$

nous donne $\tilde u(\bar x,\infty) = 0$ et $\tilde T(\bar x,\infty) = 0$.

La vitesse est nulle sur l'axe par symétrie $\tilde v(\bar x,0)=0$.

1.6. $\tilde u \frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde T + \tilde v \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde T = \frac{\partial}{\partial \bar x}(\tilde u \tilde T) + \frac{\partial}{\partial \tilde y}(\tilde T\tilde v) = Pr^{-1}\frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2}\tilde T.$

On intègre de 0 à ∞, $\frac{\partial}{\partial \bar x}\left(\int_0^\infty \tilde u\tilde T\, d\tilde y\right) + [(\tilde T\tilde v)]_0^\infty = [Pr^{-1}\frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde T\,]_0^\infty$

or la température est nulle en ∞, la vitesse est nulle en 0, la pente de la température est nulle en 0 et en l'infini. L'intégrale est donc conservée.

1.6.2.

$$\frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde u + \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde v = 0; \qquad \tilde u \frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde u + \tilde v \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde u = \frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2}\tilde u + \tilde T.$$

$$\tilde u \frac{\partial}{\partial \bar x}\tilde T + \tilde v \frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde T = Pr^{-1}\frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2}\tilde T, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar x}\left(\int_0^\infty \tilde u\tilde T\, d\tilde y\right)=0 \text{ (conséquence des équations)}$$

$\tilde v(\bar x,0)=0$, $\frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde u(\bar x,\tilde y=0)=0$ et $\frac{\partial}{\partial \tilde y}\tilde T(\bar x,\tilde y=0)=0$, $\tilde u(\bar x,\infty) = 0$ et $\tilde T(\bar x,\infty) = 0$.

1.6.3. Nous utilisons la méthode classique: par dilatation (on oublie les chapeaux et autres tildes...) $u=u^*u$, $T=T^*T$ $x=x^*x$, $y=y^*y$ ... l'invariance des équations donne :

$$u^* = x^*/y^{*2}, \quad v^* = x^* u^*/y^*, \quad u^{*2} = T^*x^*$$

L'invariance de flux de uT donne $u^*=1/(T^*y^*)$, donc après calcul:

$$y^* = x^{*2/5}. \quad T^*= x^{*-3/5} \quad u^* = x^{*1/5}$$

donc $F_1(uu^*,xx^*,yx^*)=0$ la relation implicite liant la vitesse et ses coordonnées devient $F_1(ux^{*1/5},xx^*,yx^{*2/5})=0$, par élimination de x^*, elle s'écrit $F_2(u/x^{1/5},xx^*,y/x^{2/5})=0$, vrai pour tout x^*, donc cet argument n'existe pas: $u/x^{1/5}$ est fonction de $y/x^{2/5}$.

$\xi=x$, $u=\xi^{1/5}f'(\eta)$ et $\eta=y/x^{2/5}$, on en déduit $\psi=\xi^{3/5}f(\eta)$, $v = \xi^{-2/5} V(\eta)$. De m^me, on en déduit que $T=\xi^{-3/5}g(\eta)$. Pour les panaches laminaires plans, la variable de similitude est $y/x^{2/5}$.

1.6.4. la transformation des dérivées s'écrit:

$$\partial_x = (\partial\xi/\partial x)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial x)\partial_\eta \text{ et } \partial_y = (\partial\xi/\partial y)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial y)\partial_\eta$$

ce qui donne: $\partial_x = \partial_\xi -(2/5)\eta\xi^{-1}\partial_\eta$ et $\partial_y =\xi^{-2/5}\partial_\eta$ d'où:

$$u = \xi^{1/5}f'(\eta) \text{ donc } \psi=\xi^{3/5}f(\eta) \quad \text{et} \quad v = 5^{-1}\xi^{-2/5}(2\eta f' - 3 f)$$

d'où l'on tire

$$u\,\partial_x u = \frac{\xi^{-3/5}}{5}(f'f' - 2 f''f'\eta) \quad \text{et} \quad v\partial_y u = \frac{\xi^{-3/5}}{5}(-f''f + 2 f''f'\eta) \text{ et } \partial_y^2 u = \xi^{-3/5} f'''$$

$$u\,\partial_x T = \frac{1}{5}\,\xi^{-7/5}(-3 f' g - 2 \eta f' g') \text{ et } v\partial_y T = \frac{1}{5}\,\xi^{-7/5}(2 \eta f' g' - 3 f g') \text{ et } \partial_y^2 T = \xi^{-7/5} g''$$

puis, on obtient le problème autosemblable:

$$\frac{1}{5}(f'^2 - 3 ff'') = f''' + g \quad \& \quad \frac{-3}{5}\, f' g = g''.$$

avec $\int_0^\infty f'g\,d\eta = 1/2$, $f''(0)=0$, $f'(\infty)=0$, $g'(0)=0$ $g(\infty)=0$.

1.6.5. L'integrale du flux de chaleur $\Phi=2 \int_0^\infty u\,(T-T_\infty)dy = 2 \int_0^\infty \tilde{u}\tilde{T}\, d\tilde{y}\ U_0\, \Delta T\delta$, par définition des jauges, donc si on pose $2 \int_0^\infty \tilde{u}\tilde{T}\, d\tilde{y} = 2 \int_0^\infty f'g\,d\eta = 1$, donc $\Phi=U_0\, \Delta T\delta$.

Or, $g\, \alpha \Delta T L = U_0^2$ et $U_0 = (\nu/L)\,(L/\delta)^2$ donc $\Phi=U_0\, \Delta T\delta = U_0\,(U_0^2/(g\alpha L))\,\delta$ et donc:

$$\frac{\delta}{L} = \left(\frac{\nu^3}{(\Phi\, g\alpha L^3)}\right)^{1/5}$$

donc $U_0 = (\nu L)(\delta)^{-2}$ et $\Delta T = (\Phi/\nu)\,(\delta/L)$. On retrouve bien entendu, que δ est en $L^{2/5}$ puis que U_0 est en $L^{1/5}$, puis que ΔT est en $L^{-3/5}$…
et le problème autosemblable est complètement résolu.

2. l'incompressibilité est vérifiée, la vitesse transverse donne $\partial p/\partial y=0$ donc:

$$0 = -\frac{d}{\rho dx}\, p + \nu \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\, u \quad \Rightarrow \quad -\frac{d}{dx}\, p = 2\, \mu U_p\, h^{-2} = 2\,(\rho U_p^2)\,\frac{Re^{-1}}{h}, \text{ avec } Re=U_p h/\nu.$$

$u\,\frac{\partial}{\partial x}\, u$ et $\nu\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\, u$ sont d'ordres de grandeur U_p^2/L et $\nu U_p/h^2$. Si on garde ces deux termes c'est que la longueur est telle que $L = h\,(hU_p/\nu)$.

3. 1 est résolu par l'énoncé lui même. Notons que la jauge de v est hU_p/L.
3.2. s'obtient en intégrant transversalement par rapport à $\hat{y}$ (de 0 à ∞) l'équation de quantité de mouvement réécrite sous forme conservative:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{u}^2 + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{u}\hat{v} = \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2}\hat{u}. + \text{les cl: } \hat{v}(\hat{x},0)=0,\ \ \frac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{u}(\hat{x},\hat{y}=0)=0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{u}(\hat{x},\hat{y}=\infty)=0 \text{ et } \hat{u}(\hat{x},\infty)=0$$

3.3. Nous utilisons la méthode classique (on oublie ici les chapeaux): par dilatation $u=u^*u$, $x=x^*x$, $y=y^*y$ ... l'invariance des équations donne: $u^* = x^*/y^{*2}$ et $v^* = x^*\, u^*/y^*$
donc $F_1(uu^*,xx^*,yx^*)=0$
L'invariance du flux de u^2 donne $u^{*2}y^*=1$, donc $x^{*2}/y^{*3}=1$, $u^*=x^{*-1/3}$; $v^* = x^{*-2/3}$
$F_2(ux^{*-1/3},xx^*,yx^{*2/3})=0$, par élimination de x^*, $F_3(ux^{1/3},xx^*,y/x^{2/3})=0$, vrai pour tout x^*, donc:

$$u=\xi^{-1/3}f'(\eta) \text{ et } \eta=y/x^{2/3},\ \xi=x.\ \psi=\xi^{1/3}f(\eta),\ \ v = \xi^{-2/3}\, V(\eta)$$

Pour les jets laminaires, la variable de similitude est $y/x^{2/3}$.
la transformation des dérivées s'écrit:

$\partial_x = (\partial\xi/\partial x)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial x)\partial_\eta$ et $\partial_y = (\partial\xi/\partial y)\partial_\xi+(\partial\eta/\partial y)\partial_\eta$ donne:
$\partial_x = \partial_\xi -(2/3)\eta\xi^{-1}\partial_\eta$ et $\partial_y =\xi^{-2/3}\partial_\eta$ d'où:

$$U = \xi^{-1/3}f'(\eta) \qquad V = \frac{\xi^{-2/3}}{3}(2\eta f'-f)$$

d'où l'on tire

$$U\,\partial_x U = -\frac{-\xi^{-5/3}}{3}(f'f' - 2\,f''f'\eta) \qquad V\partial_y U= \frac{\xi^{-5/3}}{3}(-f''f'+ 2\,f''f'\eta)$$

problème autosemblable. L'équation différentielle à résoudre

$$3\,f''' + f\,f'' + f'^2 = 0.$$

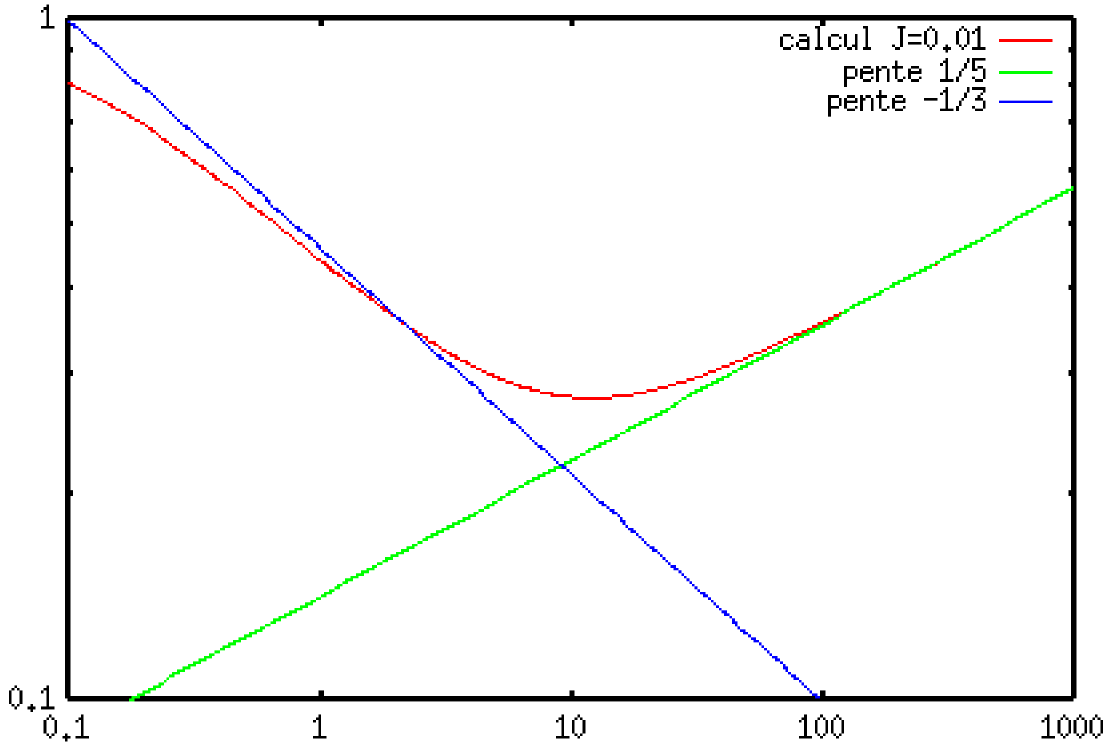
avec comme conditions aux limites f(0)=0 f''(0)=0, f'(∞)=0 et la normalisation: $\int_0^\infty f'^2 d\eta=1/2$,

4.1. La température initiale est celle qui sort du canal:
$\hat{T}(\hat{x}=0, \hat{y}) = 1$ pour $0<\hat{y}<1$ et $\hat{T}(\hat{x}=0, \hat{y}=0)=0$ pour $1<\hat{y}$. On résout alors le système complet paramétré par J la force relative de la "force de Boussinesq" par rapport à "l'élan conféré par l'écoulement de Poiseuille dans la conduite"; on regarde donc comment évolue la vitesse. On note bien que la largeur du canal est l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite.
4.2. On peut alors interpréter les figures comme suit. Figure 3, l'écoulement de Poiseuille débouche du canal en $\hat{x}=0$, là où les conditions aux limiotes changent; si J=0, l'écoulement évolue peu à peu vers un écoulement de jet, et on vérifie bien qu'assez loin ($\hat{x}>1$) la vitesse au centre est en $\hat{x}^{-1/3}$, d'où la pente -1/3: $\hat{y}=A\,\hat{x}^{-1/3}$, donne $\mathrm{Log}(\hat{y}) = (-1/3)\,\mathrm{Log}\,(\hat{x}) + \mathrm{Log}A$). En revanche si on a mis un peu d'effet de flottaison (J=0.01), l'écoulement commence par se transformer en jet (il a la pente -1/3 de $\hat{x}\sim1$ jusqu'à $\hat{x}\sim5$). Mais ensuite, la force d'Archimède l'accélère, la vitesse réaugmente après être passée après un minimum en $\hat{x}\sim10$. Pour $\hat{x}>100$ on obtient le régime de panche avec une vitesse en $(\hat{x})^{1/5}$.
On constate donc que la solution semblable est obtenue assez loin de l'entrée (d'où l'utilité de connaître ce type de solutions...)

Notons que si l'on reprend le système de la question 3.1 et que l'on cherche les échelles telles que tous les termes soient avec un facteur 1. C'est à dire que l'on cherche les échelles telles que J disparait:
$Y = J^{-1/5} X^{2/5}$
$\theta=J^{-1/5} X^{-3/5}$
$U = J^{2/5} X^{1/5}$.
Ces équations (3.1) sont écrites avec l'échelle transverse mesurée avec h et l'échelle logitudinale mesurée avec $L = h\,(U_p h/\nu)$. Lorsque $Y = J^{-1/5} X^{2/5}$, J disparait des équations, donc cela veut dire que l'on a en fait adimensionné les équations avec l'échelle $\mathcal{L}$ et δ telle que δ=Yh, et $\mathcal{L}$=XL.
Comme $J = g\alpha\Delta T_0\, L /U_p^2 = g\alpha\Delta T_0\, h^2 /(\nu U_p)$, le rapport:
$(\delta/\mathcal{L}) = (h/L)\, J^{-1/5} X^{-3/5}$
devient $(\delta/\mathcal{L}) = (U_p h/\nu)^{-1}\ (g\alpha\Delta T_0\, h /(\nu U_p))^{-1/5}\, (\mathcal{L}/(h\,(U_p h/\nu)))^{-3/5}$,
ce qui revient, après substitution à avoir pris

$$\frac{\delta}{\mathcal{L}} = \left(\frac{\nu^3}{((U_p\ h\ \ \Delta T_0)\ g\alpha \mathcal{L}^3)}\right)^{1/5}.$$

Autrement dit, on étudie le jet qui sort du canal, il est alors naturel de prendre comme échelles h la demi largeur et U_p. Le terme d'Archimède se traduit par le paramètre J. On n'est pas dans les échelles du panache, mais on retrouve bien le panache et son scaling.
Si on se trompe d'échelles, ce n'est pas grave, on retombe sur elles plus loin!!!



vitesse au centre pour les grandes valeurs de $\hat{x}$: on retrouve le comportement en puissance -1/5.