Transferts Thermiques dans les Fluides

Variations autour du refroidissement d'un mur

MF 204 2015/2016
Vendredi 27 novembre 2015

Cette PC est un pot-pourri de problèmes de thermique 1D, la température ne dépend que de x. Les conditions aux limites sont variées, la conductivité thermique aussi.

Exercice 1 : Refroidissement d'un mur.
Soit un mur infini de caractéristiques physiques constantes (c_p, ρ, k) d'épaisseur $2L$, initialement à la température T_0, au temps $t > 0$ on le place dans un écoulement à température constante T_{ext} au loin, soit h le coefficient d'échange associé. Nous nous proposons de résoudre analytiquement ce problème.
1.1 Écrire l'équation de la chaleur et ses conditions aux limites compte tenu du fait qu'ici il s'agit d'une condition mixte avec le coefficient d'échange h. Adimensionner (introduire le nombre de Biot Bi) et résoudre par séparation des variables.
1.2 Montrer que si $Bi \gg 1$ on retrouve le cas de la température imposée de la PC1.
1.3 Montrer que si $Bi \ll 1$, la température est quasi constante dans le solide, (elle varie de $O(Bi)$)
1.4 Examinons maintenant ce problème avec le point de vue des systèmes minces, écrire le bilan global en intégrant sur l'épaisseur, en déduire que la température moyenne est exponentielle en temps, comparer à la question précédente.

Exercice 2 : Mur maintenu à une température constante T_0 d'un côté et avec un coefficient d'échange de l'autre avec une température T_{ext} au loin.
2.1 montrer qu'à stationarisation la température est linéaire dans le solide
2.2 montrer que pour de très petits/ très grands nombres de Biot , la température est soit proche de T_0 soit proche de T_{ext}.

Exercice 3 : Mur constitué d'un grand nombre de murs d'épaisseur e_i et de conduction thermique k_i, homogénéisation
Un mur composite est constitué d'une suite n de murs infinis, le mur de gauche est maintenu à une température constante T_0 sur sa face, le dernier mur est maintenu à une température T_{ext}.
3.1 Calculer en régime stationnaire la température dans chaque mur.
3.2 Montrer que le système complet peut être remplacé par un mur moyen appelé milieu homogénéisé, trouver le coefficient de conductibilité thermique homogénéisé.

Correction, Exercice 1 Refroidissement d'un mur

1.1 Cf cours page 2.15 - 2.16, et PC 1, équation de la chaleur sans dimension et conditions mixtes associées

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = (\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2})$$

avec $\bar{T} = 1$ en $\bar{t} = 0$ et $-(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}) = \pm Bi\bar{T}$ en $\bar{t}$>0 et $\bar{x} = \pm 1$. On cherche la solution sous forme de variables séparées $\bar{T}_k = A_k e^{-k^2\bar{t}} \cos(k\bar{x})$. Avec $ktg(k) = Bi$ on a

$$\bar{T} = \Sigma_{i>0} \frac{2\sin(k_i)}{k_i + \sin(k_i)\cos(k_i)} exp(-k_i^2\bar{t})\cos(k_i\bar{x})$$

- si $Bi = \infty$, il s'agit du cas de la température imposée (cf PC 1)
- si Bi tend vers 0, k_1 tend vers 0 car $k_1 tg(k_1) = Bi$, donc $k_1 \sim Bi^{1/2}$ et $\bar{T} \sim exp(-Bi\bar{t})(1 - Bi\bar{x}^2/2 + ...)$,

En pratique, il est usuel d'évaluer le nombre de Biot et de dire que si Bi>0.1, on utilise la solution complète (milieux dit "thermiquement épais") et que si Bi<0.1 on utilise l'analyse du milieu dit "thermiquement mince").

On voit que rapidement (critère empirique usuel (appelé nombre de Fourier) $\bar{t}$>0.2), il ne reste plus que le premier terme de la série :

$$\bar{T} = A_1 exp(-k_1^2\bar{t})\cos(k_1\bar{x}) + ...,$$

le coefficient A_1 varie peu avec Bi, de 1 ($Bi = 0$) à 1.27 (Bi=∞, A_1=$4/\pi$). Le coefficient k_1 varie un peu plus : pour $Bi = 0.1$ on a k_1=0.3 et pour Bi=∞ on a k_1 =1.57

$Bi = \infty$ on a $\bar{T} = 1.27324e^{-(1.5708)^2\bar{t}}cos(1.5708\bar{x})$

$Bi = 5$ on a $\bar{T} = 1.2402e^{-(1.3138)^2\bar{t}}\cos(1.3138\bar{x})$ $Bi = 1$ on a $\bar{T} = 1.1192e^{-(0.8603)^2\bar{t}}\cos(0.8603\bar{x})$

$Bi = .1$ on a $\bar{T} = 1.0160e^{-(0.3111)^2\bar{t}}\cos(0.3111\bar{x})$ $Bi < .1$ on a $\bar{T} = 1.e^{-Bi\bar{t}}$

cette formule est utile pour avoir une bonne approximation du champ des températures. On voit que plus Bi est petit plus k_1 est petit : un système qui échange peu de chaleur se refroidit lentement ($1/k_1$ est grand).

1.4 L'équation intégrée sur l'épaisseur donne $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_{-1}^{1} \bar{T} d\bar{x} = [\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}]_{-1}^{1}$, avec $[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}]_{-1}^{1} = -Bi\bar{T}(1,\bar{t}) - Bi\bar{T}(-1,\bar{t})$

Dans le point de vue "système mince" on suppose que la température est quasi constante en espace dans le milieu considéré et varie en temps selon :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\bar{T}(\bar{t}) = -Bi\bar{T}(\bar{t})$$

donc la température varie en $\bar{T} = 1.e^{-Bi\bar{t}}$ la température est constante en espace.

Quand on est dans l'approximation des "système minces" ($Bi \ll 1$), on suppose que la température est uniforme en espace, et on fait directement le bilan d'énergie : variation d'énergie interne égale flux aux bornes. La variation d'énergie interne de toute la tranche par unité de hauteur et de profondeur (symbolisé par S) est $\rho c_p(2LS)\frac{\partial}{\partial t}T(t)$ le flux par unité de hauteur et de profondeur sur les deux faces extérieures $2h(T - T_{ext})S$. On retrouve bien la même expression avec dimensions. Dans le cas des systèmes minces, le temps n'est plus le temps diffusif $L^2/a = \rho c_p L^2/k$ mais bien $(L^2/a)/Bi = \rho c_p L/h$, il ne dépend plus de k, il est plus long. La température a donc le temps de diffuser dans l'objet pour que la température soit à peu près uniforme (à l'ordre Bi près).

Exercice 2

A stationarisation $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} = 0$, avec $\bar{T} = 1$ en $\bar{x} = -1$ et $-(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}) = Bi\bar{T}(1)$ en $\bar{x} = 1$.
Donc $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = cst$ ce flux est $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\bar{T}(1)-\bar{T}(-1)}{2} =$ mais la condition aux limites donne que c'est aussi $Bi\bar{T}(1)$ donc comme $\bar{T}(-1) = 1$ on a $\bar{T}(1) = \frac{1}{1+2Bi}$ si Biot est petit : $Bi << 1$ alors $\bar{T}(1) \simeq 1$ donc la température de paroi est presque la température de gauche $T_p \simeq T_0$, le champ de température dans la paroi peut être considéré comme uniforme (systèmes minces). Si le nombre de Biot est grand, $Bi >> 1$ alors $\bar{T}(1) \simeq 0$ ou $T_p \simeq T_{ext}$, c'est au contraire le fluide extérieur qui impose sa température.

Lors de la PC 5 nous allons en fait nous placer dans une situation similaire (PC point d'arrêt).

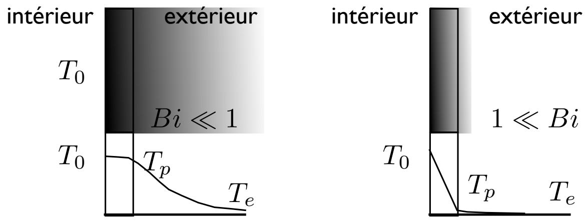

FIGURE 1 – Si $Bi << 1$ (faible échange) alors $T_p \simeq T_0$ en revanche Si $Bi >> 1$ alors $T_p \simeq T_{ext}$

Exercice 3

Un matériau composite est constitué d'un assemblage de matériaux différents. En général, il y a une structure périodique qui définit la structure fine du matériau (fibre, lamelle, coque...). Cette petite structure est bien plus petite que le matériau lui même. En général, on ne peut pas résoudre numériquement car il faudrait trop de points de maillage. On définit alors un milieu moyen "homogénéisé". On veut obtenir ce milieu par moyenne de la petite structure et en déduire la loi de comportement moyenne. Le système homogénéisé est alors un système homogène. Par exemple, pour un matériau constitué de tranches de haute et basse conductivité, le comportement moyen ne sera pas la moyenne des conductivités.

On empile les murs e_i et k_i avec $1 \leq i \leq n$.... soit T_0, T_1 à T_n les températures sur les faces, l'équation de la chaleur stationnaire est :

$$-\frac{d}{dx}(-k(x)\frac{dT}{dx}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad -\frac{dq}{dx} = 0$$

q est bien constant dans chaque tranche. Donc $q = -k_1\frac{T_1-T_0}{e_1}$ puis $q = -k_2\frac{T_2-T_1}{e_2}$ puis $q = -k_n\frac{T_n-T_{n-1}}{e}$

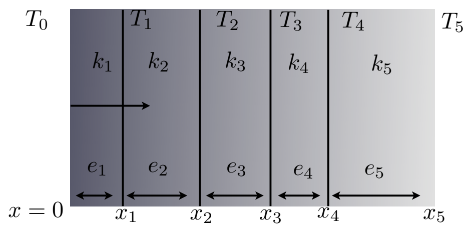

FIGURE 2 – Un mur infini, soumis à T_0 en $x = 0$ et T_n en $x = x_n$ composé de n tranches homogènes.

d'où les différentes relations pour les températures :

$$0 < x < x_1,\ T = T_0 - \frac{x}{k_1}q \quad \text{et} \quad T_1 = T_0 - \frac{e_1}{k_1}q$$

$$x_1 < x < x_2,\ T = T_1 - \frac{x - x_1}{k_2}q \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 - \frac{e_2}{k_2}q$$

$$x_{n-1} < x < x_n,\ T = T_{n-1} - \frac{x - x_{n-1}}{k_n}q \quad \text{et} \quad T_n = T_{n-1} - \frac{e_n}{k_n}q$$

dans chaque tranche intermédiaire la température est linéaire. Dans chaque cellule $T_i = T_{i-1} - \frac{e_i}{k_i}q$ l'incrément de température est $-\frac{e_i}{k_i}q$, en sommant

$$T_n = T_0 - q(\Sigma_1^n e_i/k_i) \quad \text{avec } e = \Sigma_1^n e_i$$

Le flux de part et d'autre lié à la variation globale de température

$$q = -\frac{T_n - T_0}{e_1/k + ... + e_n/k_n},$$

peut être identifié à $q = -k_H \frac{T_n - T_0}{e}$, où $k_H = \frac{\Sigma_1^n e_i}{\Sigma_1^n e_i/k_i}$ est le coefficient effectif de diffusion thermique. C'est une moyenne géométrique, pas une moyenne simple $\frac{\Sigma_1^n k_i e_i}{\Sigma_1^n e_i}$.

Une vision heuristique de l'homogénéisation

Ce serait de prendre un matériau périodique de périodicité e dans lequel k change à cette période. On parle alors d'échelle rapide de variation de la température, contrairement à une échelle lente globale du matériau complet. Dans cette tranche la température est $T^{slice}(x)$, la température globale est $T(x)$, donc d'une tranche à l'autre, si on oublie les petits détails dans la tranche, la variation de température est plus ou moins le gradient :

$$T^{slice}(x + e) - T^{slice}(x) \simeq e\frac{dT}{dx}$$

et sur tout le matériau, où k^H le coefficient de conductivité thermique que l'on cherche à établir : $q = -k^H \frac{dT}{dx}$ Mais, aussi localement, sur une tranche $\frac{dT^{slice}}{dx} = -\frac{q}{k(x)}$ donc, par intégration sur la longueur de la tranche

$$T^{slice}(x + e) - T^{slice}(x) = \int_x^{x+e} -\frac{q}{k(x)}dx$$

que l'on compare à l'expression précédente $T^{slice}(x + e) - T^{slice}(x)$:

$$\int_x^{x+e} -\frac{q}{k(x)}dx \simeq e\frac{dT}{dx}$$

avec $dT/dx = -q/k^H$, donc, nous trouvons que la moyenne harmonique de k donne k^H

$$\frac{1}{k^H} = \frac{1}{e}\int_x^{x+e} \frac{1}{k(x)}dx.$$

Bien entendu, il s'agit ici du cas le plus simple, dans le cas général il faut introduire la "méthode des échelles multiples".

Bibliographie

J. Kevorkian & J.D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer (1981)