

Convection libre induite par le chauffage impulsif d'une plaque.

PC 4 MF 204 2016/2017

Lundi 27 février 2017

Chauffage impulsif

Il s'agit d'étudier la couche limite de convection thermique naturelle instationnaire. Nous introduisons le temps pour observer quelle est l'évolution d'une couche de fluide chauffée de manière impulsive par une plaque plane. Nous attendons ensuite jusqu'à l'établissement du régime stationnaire. (On peut imaginer différents phénomènes physiques qui sont modélisés par ce problème, le cas de la brise thermique bien connue des marins, le cas d'un panneau solaire brusquement éclairé, ou une plaque électrique de cuisinière, c'est ce dernier exemple que nous étudions en fait...).

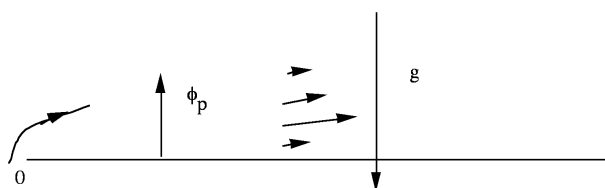


FIGURE 1 – La plaque et le flux.

Pour simplifier, on va étudier un problème plan avec une plaque plane semi infinie (plaque en $x > 0$, $y = 0$). Soit donc un mur semi infini au dessus duquel se trouve un fluide dilatable initialement au repos à la température initiale T_0 .

À l'instant initial, on impose instantanément un flux ϕ_p à la paroi : ceci peut être réalisé par effet Joule en supposant que la plaque est munie d'une résistance chauffante asservie de manière *ad hoc*.

On veut étudier la mise en mouvement du fluide par ce chauffage impulsif. On va voir qu'il y a en fait au moins deux régions. Une loin du bord d'attaque qui ne sait pas que le mouvement existe et qui est un régime de conduction pure ; une autre région près du bord d'attaque où l'écoulement est établi et qui a oublié l'instant initial.

Parmi les hypothèses :

On pourrait montrer que le temps caractéristique d'établissement du flux fourni par la plaque au liquide est infiniment court devant les temps caractéristiques hydrodynamiques, de sorte que la condition de flux

constant à imposer à la paroi est valable dès l'instant initial.

On admettra que les propriétés du fluide varient de manière négligeable avec la température, excepté la masse volumique. On a affaire à un fluide que l'on décrira dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, avec la loi d'état : $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$.

Les autres notations sont classiques : k est la conductivité thermique, ρ_0 la masse volumique de référence et c la chaleur spécifique). Pour simplifier on admet que le nombre de Prandtl est strictement égal à 1 ($\nu = k/(\rho_0 c_p)$). On admettra aussi que la chaleur dégagée par frottements visqueux est négligeable devant tout autre phénomène, ce que l'on peut toujours vérifier ultérieurement. On utilisera directement l'excès de pression adimensionné \bar{p} par rapport au nivellement barométrique : $p = p_0 - \rho_0 g y + (\delta p)\bar{p}$, et on écrira pour la ture : $T = T_0 + (\delta T)\bar{T}$. Ces deux jauges sont pour l'instant inconnues et seront déterminées par l'analyse phénoménologique.

Les équations à résoudre sont donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\delta p}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\delta p}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \alpha g (\delta T) \bar{T} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Il est recommandé de bien suivre sur les équations, dans leur ordre de transmission, les divers mécanismes qui causent le mouvement du fluide :

- i) Le flux ϕ_p imposé à la paroi engendre par conduction, un accroissement (δT) de la température,
- ii) cette variation de température engendre la création d'un $((\delta p))$ dû à la gravité. iii) ce (δp) engendre dans la direction x (et dans le sens positif) un mouvement principalement longitudinal (les effets se produisant près de la paroi).

1ère partie : cas du mur infini.

On considère le demi espace supérieur ($y > 0$) de fluide au repos à la température initiale T_0 .

1.1 Mettre en évidence une solution de repos pour le fluide en présence de gravité qui ne dépende que des variables y et t .

1.2 Soit τ le temps nécessaire pour qu'une épaisseur d de fluide ressente l'influence de l'apport de chaleur, exprimer τ , la jauge de la température et la jauge de la pression en fonction de d (et des autres données).

1.3 Montrer qu'il existe une solution semblable, vues les conditions aux limites de flux pour le problème et de temps pour la PC, on ne cherchera pas à résoudre.

2ème partie : cas du mur semi infini : (mur en $x > 0$ on se place à une certaine distance L du bord.

2.1. On se donne une échelle de longueur L assez grande pour ne pas être juste au bord de la plaque. Estimer la vitesse longitudinale créée par le chauffage au bout d'un temps τ (associé à la distance d).

2.2 Montrer qu'il existe une jauge de temps telle que la distance chauffée transversalement δ induise une convection importante qui couple les équations.

2.3 On introduit donc une couche limite près de la paroi. Déterminer son épaisseur ainsi que le jeu d'équations instationnaires.

2.4 Que se passe t'il si on attend plus longtemps encore ?

Conclure et discuter la validité de ce qui précède dans le cas du mur de largeur finie.

Correction de la PC 4 chauffage impulsif & convection libre

Les problèmes de départ impulsif sont très courants en mécanique des fluides, on a par exemple vu le problème de départ impulsif d'une plaque plane infinie, problème connu sous celui de "premier problème de Stokes" problème de Rayleigh (188X), $\partial_t u = \nu \partial_y^2 u$ avec $u(y, t = 0) = 0$ et $u(0, t > 0) = 1$. Ici nous allons étudier l'équivalent du problème de mise en température impulsive d'une couche de fluide au repos, $\partial_t T = \alpha \partial_y^2 T$ avec $T(y, t = 0) = 0$ et $T(0, t > 0) = 1$, mais ici, nous allons compliquer. premièrement, en imposant un flux à la paroi et deuxièmement en nous intéressant à l'écoulement généré : ici le couplage thermique va créer un vent.

On pourrait démontrer que le résultat de flux imposé est juste, en remarquant que le temps caractéristique d'établissement de température est très rapide pour un métal... Le problème obtenu est manifestement invariant par translation en x . Les équations d'évolution ainsi que la condition de flux à la paroi deviennent, si on mesure le temps avec τ , et la distance chauffée avec d :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\delta p}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = g\alpha(T - T_\infty) \quad \& \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = \phi_p.$$

on a immédiatement $\tau = d^2/\nu$, $(\delta T) = \phi_p d/k$ et $(\delta p) = d^2 \rho g \alpha \phi_p/k$. Le problème à résoudre est donc :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \bar{T} \quad \& \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -1$$

On en cherche une solution invariante par toute dilatation... La solution est immédiate si on remarque que le problème sur le flux est le même que celui de l'équation de la chaleur de la PC1, au signe près. Donc la solution pour le flux est $\frac{\partial T}{\partial y} = -erfc(\eta/2)$, ce qui s'écrit $\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\sqrt{t} erfc(\eta/2)$, puis par intégration, comme $\int_0^\eta erfc(\xi) d\xi = \frac{e^{-\eta^2}}{\pi} - \eta erfc(\eta)$, cette dernière fonction est appelée $-ierfc$,

$$T(y, t) = 2\sqrt{t}(ierfc(\frac{y}{2\sqrt{t}}))$$

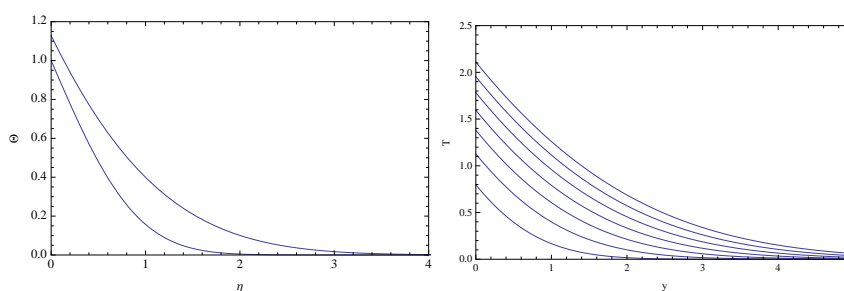


FIGURE 2 – Gauche : Solution de l'équation de la chaleur $\partial_t T = \alpha \partial_y^2 T$ avec $T(y, t = 0) = 0$ et $T(\infty, t > 0) = 0$, tracé de $erf(\eta/2)$ (courbe inférieure) solution avec une condition de Dirichlet $T(0, t) = 1$ et $ierfc(\eta/2) = \frac{2e^{-\eta^2}}{4\pi} - \eta erfc(\eta/2)$ (courbe supérieure) solution avec une condition de Neumann $\partial_y T(0, t) = -1$. Droite : Solution du problème à flux imposé en fonction de x pour différents temps $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ et 3.5 , la température à la paroi est $\frac{\sqrt{t}}{2\pi}$.

2.1 On se donne la longueur L , on se place loin du bord. Entre la région avant le bord d'attaque et la région jaugée par l'échelle L (et pour l'instant d'épaisseur d associée au temps $\tau = d^2/\nu$), la pression varie de 0 à $\delta p = \rho g \alpha \phi_p / k d^2$ (question 1.2). La vitesse induite est telle que $\partial \bar{u} / \partial \bar{t} \sim -\partial \bar{p} / \partial \bar{x}$, donc sa jauge est $\tau(\delta p)/L = \rho g \alpha \phi_p k \nu d^4 L$, le terme de dérivée seconde transverse est toujours présent par construction. On a donc le système suivant :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ puis } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{T}, \text{ puis } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ puis } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} = 0.$$

Le problème dynamique est découplé du problème thermique. La solution du problème thermique ne dépendant pas de \bar{x} , $\partial \bar{p} / \partial \bar{x} = 0$, \bar{p} est constante en \bar{x} , donc la vitesse reste nulle! Il n'y a pas de mouvement...

2.2 la jauge vitesse augmente avec d (donc avec la jauge de temps τ), il existe donc un temps au bout duquel une épaisseur $\delta = d$ a été chauffée telle que le terme non linéaire devient de même ordre de grandeur que le terme linéaire (la vitesse est donc $\rho g \alpha \phi_p k \nu \delta^4 L$) :

$$O\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) = O\left(\bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) \text{ i.e. } \left(\frac{\nu}{\delta^2}\right) = (\rho g \alpha \phi_p k \nu d^4 L) \frac{1}{L}, \text{ donc } \delta = L^{1/3} \left(\frac{\nu^2 k}{g \alpha \phi_p}\right)^{1/6}, \text{ ou } (\delta/L) = G^{-1/6}$$

avec un nombre de Grashoff construit avec le flux $G = \frac{g \alpha \phi_p L^4}{k \nu}$.

2.3 La dérivée totale est à considérer. Il faut alors résoudre :

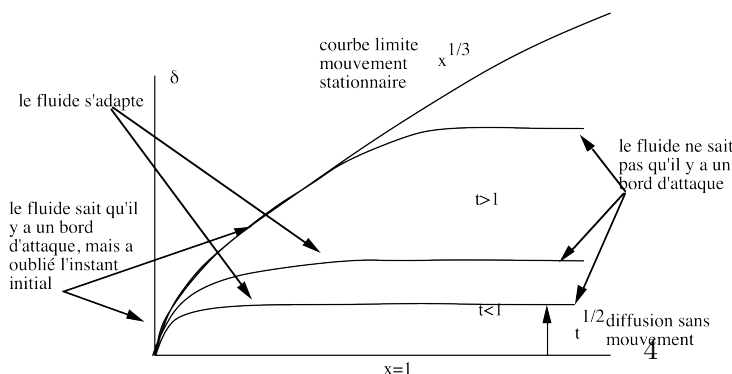
$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} = 0, \text{ et } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ puis } \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{T} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{T} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ et } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{T},$$

La jauge de temps $L^2 \nu^{-1} G^{-1/3}$ est la valeur du temps au bout de laquelle une épaisseur δ a été chauffée. Les jauges sont telles que les vitesses induites sont colossales par rapport aux vitesses au niveau du bord d'attaque. La jauge de vitesse et de temps sont telles qu'à la position considérée L , le fluide est averti de l'existence du bord d'attaque.

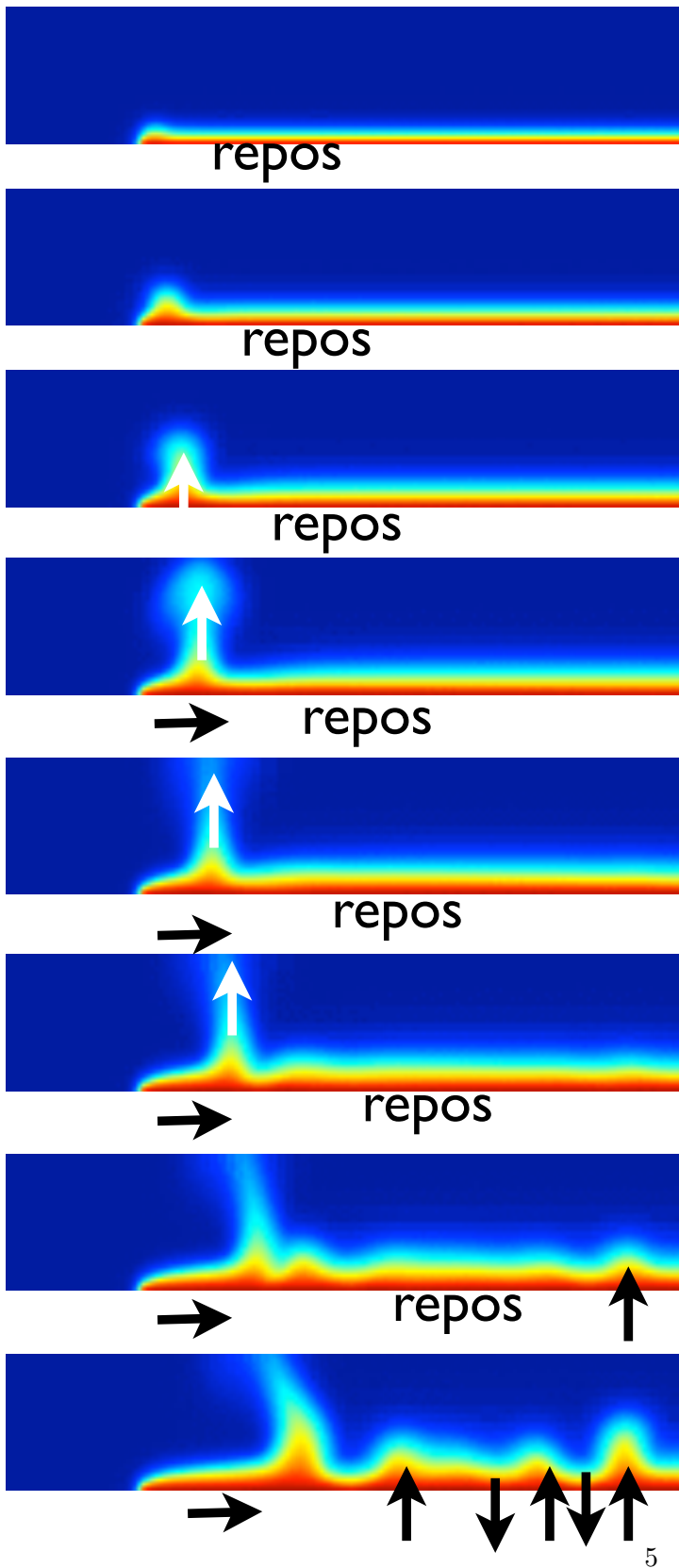
2.4 Si la jauge de temps est encore plus longue, supérieure à $L^2 \nu^{-1} G^{-1/3}$, l'échelle δ ne change pas, la vitesse longitudinale reste $L/(\nu \delta)^{1/2}$. On est à stationnarisation. Il faut résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} = 0, \text{ et } \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ puis } \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{T} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{T} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ et } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{T},$$

On peut en trouver une solution semblable...



Sur la figure ci contre on a tracé une ligne iso température à différents temps. Pour les temps courts ce sont des droites (qui s'incurvent avant d'arriver en $x = 0$) et pour des temps longs on a la courbe en $x^{1/3}$. On passe donc de la solution instationnaire sans variation en x à la solution stationnaire en $x^{1/3}$



Sur la figure ci contre on trace la solution numérique (iso -T) de ce problème avec **gerris** un solveur Navier Stokes, le temps augmente de bas en haut, on représente la température (rouge chaud, bleu froid).

En fait cette configuration n'est pas stable, à la fois on va voir monter un panache thermique et on va observer une déstabilisation lente de la couche chauffée par le bas et initialement immobile.

Pour les temps courts (première et deuxième image) on voit bien que la plaque chauffe le fluide de manière uniforme. On voit l'évolution vers une couche limite de convection libre, mais, le passage cette solution stationnaire à la solution instationnaire initiale (notée "repos") est marqué par un panache léger qui s'élève (*a plume* en anglais, marqué par une flèche blanche symbolisant la mise en mouvement d'un "spot" chaud vers le haut), tant que ce panache n'est pas passé, il n'y a pas de "vent", dès qu'il est passé, il y a un écoulement marqué par une flèche noire horizontale. A partir de la 6ème figure, on voit que la couche en \sqrt{t} se déstabilise : des ondulations apparaissent à droite. Sur la dernière image en bas, le vent a bien progressé à droite, mais après le pied du panache, des oscillations importantes apparaissent (d'un point de vue météo cette déstabilisation correspond à la formation des nuages de beau temps, les cumulus, courants ascendants et descendants, flèches verticales noires). à retenir :

- le principe du mécanisme : le moteur est ici le chauffage. La partie thermique crée l'écoulement.
- à une position fixée, L , il faut attendre un certain temps, pour que l'information de l'existence du bord d'attaque arrive. La couche diffusait jusqu'alors en $(\nu t)^{1/2}$. Ensuite la thermique et la dynamique sont couplées fortement. Au bout d'un certain temps, on aboutit ensuite à un régime établi.

- dans ce cas, ce régime est instable et crée des panaches.

Biblio : Schlichting Gersten 8th Edition (2000)
Solution de Wickern (1987)