



ENSTA

COURS MFE12

2002-2003

Écoulement supersonique

sur un dièdre,

"interaction libre".

PC 6

L'objet de cette P.C. est de constater la complexité des écoulements compressibles. Le problème étudié est celui de la plaque plane sans incidence suivie d'un dièdre, nous allons voir que l'on peut simplifier les équations pour comprendre le phénomène mystérieux de l'interaction libre qui mène à la séparation de la couche limite. Si ce dispositif représente une aile d'avion supersonique, ce phénomène provoque alors une perte d'efficacité de la gouverne.

Le mystère est le suivant: alors que l'on pense que toutes les perturbations sont emmenées par le flot, en réalité il n'en est rien, des perturbations peuvent remonter le courant et faire sentir l'influence de la gouverne bien avant sa position. Plus incroyable encore, la forme de l'écoulement est en fait indépendante de la forme de la perturbation en aval (gouverne, choc, marche...). On va montrer, en remettant en cause la description classique de Fluide Parfait/ Couche Limite, que l'on peut trouver la naissance de cette interaction qui est de forme exponentielle.

En effet, ce phénomène montre en fait que la description classique où le Fluide Parfait fait se développer la Couche Limite tombe en défaut. Le bon schéma est une description en interaction forte où la couche limite et le fluide parfait interagissent l'un et l'autre.

On rappelle les équations de Navier Stokes en écoulement compressible stationnaire 2D, laminaire.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0.$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}); \quad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy})$$

$$\left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

avec $H = c_p T + \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$ "l'enthalpie totale", $h = c_p T$ enthalpie, et τ_{ij} la partie dissipative du tenseur des contraintes:

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad \tau_{yy} = \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

Pour poursuivre on se donne la dépendance de μ en fonction de T et on suppose que l'air est un gaz parfait ($p = r T$), $c_p = c_v = r / (-1)$:

$$p/p = (T)/(T).$$

Ces équations sont particulièrement compliquées. Nous les simplifions en décomposant en deux domaines: la région de fluide parfait et la région de couche limite. Il s'agit pour l'instant de la démarche classique.

1. partie "FLUIDE parfait"

1.1 En posant $u=U \bar{u}$, $v=U \bar{v}$, $x=L \bar{x}$, $y=L \bar{y}$, $\mu=\mu \bar{\mu}$, $p = p \bar{p}$. Montrer que si on fait tendre le nombre de Reynolds R vers l'infini, on retrouve les équations d'Euler; on rappelle que le nombre de Mach est $M^2 = (U^2)/(p)$.

1.2. Linéarisation de l'écoulement, on suppose que la pente du profil de l'aile est faible (disons d'ordre ϵ) en posant:

$$\bar{u} = 1 + \bar{u}_1, \quad \bar{v} = \bar{v}_1, \quad \bar{p} = 1 + \bar{p}_1, \quad \bar{\rho} = 1 + \bar{\rho}_1, \quad f(x) = L \bar{f}(\bar{x}),$$

en déduire que la solution est de la forme $\bar{p}_1 = -M^2 \bar{u}_1 = -\frac{M^2}{(M^2-1)} \bar{f}'(\bar{x} - \bar{y} (M^2-1))$

On voit donc bien que si l'on se donne un profil $f(x)$, sa pente ($f'(x)$) sera transportée le long des caractéristiques qui sont les droites $y = x / (M^2-1) + \text{cste}$.

On est ici à nombre de Mach modéré, pour un nombre plus élevé, il faut utiliser une autre théorie (cf. PC de révision). On dispose actuellement de codes performants en Euler compressible 3D non linéaire, cependant la théorie linéarisée permet de bien comprendre ce qui se passe.

2. partie "couche limite"

Les conditions aux limites pour la vitesse ne sont plus satisfaites, il faut donc examiner ce qui se passe près de la paroi en changeant d'échelle pour mieux voir. Nous allons exploiter le fait que les variations en x sont lentes mais en revanche les variations en y près de la paroi sont très rapides et se produisent sur une échelle $\delta \ll L$. En posant:

$$u=U \bar{u}, v=V \bar{v}, \quad \rho = \bar{\rho}, T = \bar{T}, x=L \bar{x}, y= \bar{y},$$

trouver par moindre dégradation les jauges inconnues.

2.1 En déduire que les termes dominants des E.N.S. sont (on enlève les tildes et on est sans dimensions) (le nombre de Prandtl est posé d'ordre un, c_p constant) à l'échelle δ , h est l'enthalpie "normale":

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y}; \quad \mu = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Les équations turbulentes associées sont du même genre, mais avec des barres au dessus. Attention on néglige certaines corrélations triples:

$$\langle \mu \overline{\overline{u}} \rangle = \langle \mu \rangle \langle \overline{\overline{u}} \rangle \text{ et } \langle k \overline{\overline{T}} \rangle = \langle k \rangle \langle \overline{\overline{T}} \rangle !!!$$

Le frottement sera alors $\tau = \mu \overline{\overline{u}} - \langle u'v' \rangle$

2.2 Établir comment s'écrit de manière intégrale l'équation de conservation de la masse.

2.3 Si on met en oeuvre une méthode intégrale, on admet que l'on trouve

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) + \left(\frac{1}{H} \right) (2+H - M_e^2) \frac{du_e}{u_e dx} = (e u_e)^{-2} (\mu_w \overline{\overline{u}})_w$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e u_e} \right) + \left(\frac{1}{e u_e} \right) \frac{d}{dx} (e u_e) = (e u_e h_e)^{-1} k_w \overline{\overline{T}}_w$$

avec $\int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$; $\int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$; $\int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right) dy$

$$H = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, H^* = \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad = \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(\frac{h}{h_e} - 1\right) dy$$

$$\frac{C_f}{2} = (e u_e)^{-2} (\mu_w \overline{\overline{u}})_w \quad \tau_w = -k_w \overline{\overline{T}}_w$$

Vérifier toutefois la cohérence avec le cas incompressible classique.

3. le paradoxe de l'influence amont (supersonique)

En supersonique, on observe, en amont de l'endroit où la perturbation a été créée la déflexion des lignes de courant: ceci devrait être impossible car les équations sont paraboliques dans la couche limite et hyperboliques dans le fluide parfait. Montrer à partir des équations précédentes que des solutions perturbées en $\exp(Kx)$ peuvent exister.

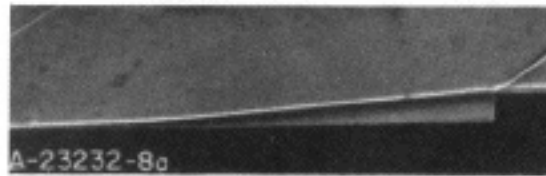
4. méthodes pratiques:

- Équations PNS "Parabolized Navier Stokes". Les équations PNS consistent à enlever les termes de dérivée longitudinale dans les équations.

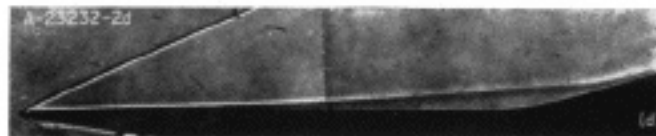
- Équations IBL "Intertacting Boundary Layer Theory" consistent à faire la décomposition couche limite fluide parfait.



(a)



(b)



(c)

Examples of shock-wave laminar boundary-layer interaction
(Chapman, 5)

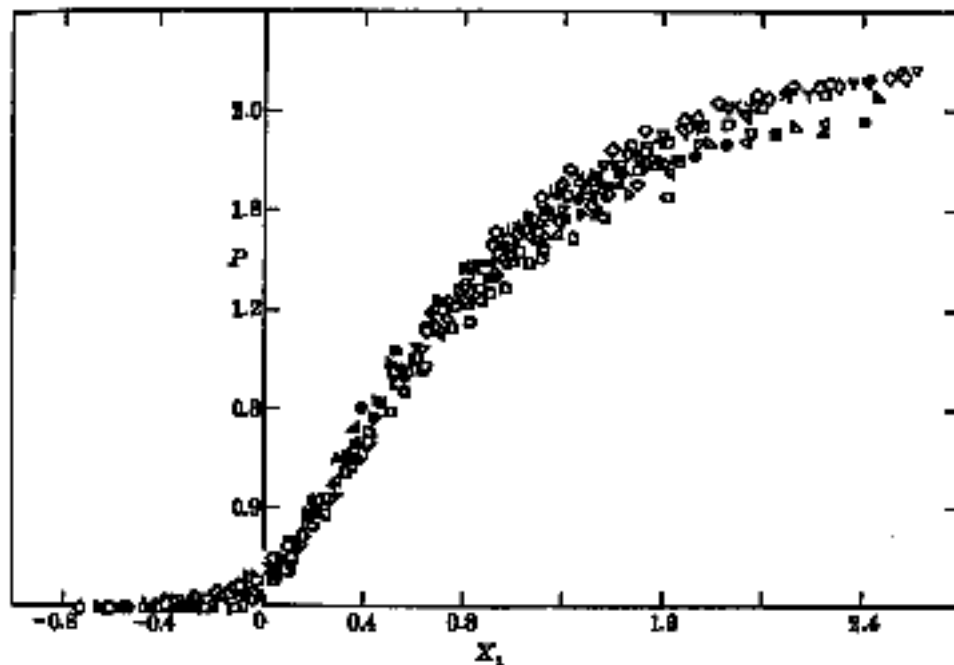


FIGURE 5. Collapse on to a single curve of the curves of pressure against distance, at various Mach numbers between 4 and 5 and for both adiabatic and cooled walls, by using the correlation formula devised by Curle (1961) (see 9.3) and (9.4). (From Lewis, Kubota & Loos 1959.)

On constate que des interactions différentes ont la même loi de similitude.

Correction PC 6 Écoulement supersonique sur un dièdre, "interaction libre"

Toutes les équations sont couplées: on ne peut plus supposer l'écoulement connu puis résoudre l'équation de la chaleur. On commence cependant par faire disparaître les termes visqueux dont l'ordre de grandeur est $1/Re$.

Équation de l'énergie, on sait que:

$$\frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + \nabla \cdot (\mathbf{q} - \rho \mathbf{u} e) = 0, \quad \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (-\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = -p I + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + 2\mu \nabla^2, \quad \rho = -(2/3)\mu.$$

de/dt = $(-p \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$, compte tenu de l'incompressibilité $\rho^{-1} d(\rho)/dt = -\nabla \cdot \mathbf{u}$ et de la définition de l'enthalpie: $e + p(\rho^{-1}) = h$ et l'enthalpie totale $H = h + \frac{1}{2} u^2$.

1°) Fluide parfait. La linéarisation des équations de fluide parfait adimensionnées donne

$$\bar{u} = 1 + \bar{u}_1 + \dots \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \dots \quad \bar{p} = 1 + \bar{p}_1 + \dots \quad \bar{T} = 1 + \bar{T}_1 + \dots$$

d'où
$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{y}} + \frac{\bar{u}_1}{\bar{x}} + \frac{\bar{v}_1}{\bar{y}} = 0 \quad \frac{\bar{u}_1}{\bar{x}} = -M^{-2} \frac{\bar{p}_1}{\bar{x}}$$

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{x}} = -M^{-2} \frac{\bar{p}_1}{\bar{y}} \quad \frac{\bar{T}_1}{\bar{x}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{x}} \quad \text{et} \quad \bar{p}_1 = \bar{T}_1 + \bar{T}_1$$

les deux derniers donnent par élimination de la température $\frac{\bar{p}_1}{\bar{x}} = \frac{\bar{v}_1}{\bar{x}}$, l'élimination des

perturbations de vitesses donne:
$$\frac{2}{\bar{x}^2} \bar{v}_1 - M^{-2} \frac{2}{\bar{x}^2} \bar{p}_1 - M^{-2} \frac{2}{\bar{y}^2} \bar{p}_1 = 0$$

donc
$$(M^{-2}-1) \frac{2}{\bar{x}^2} \bar{p}_1 - \frac{2}{\bar{y}^2} \bar{p}_1 = 0.$$

On reconnaît une équation d'onde de solution classique:

$$\bar{p}_1 = F(\bar{x} - \bar{y} (M^{-2}-1)) + G(\bar{x} + \bar{y} (M^{-2}-1))$$

il faut prendre les solutions qui s'éloignent de la paroi car c'est de la paroi que viennent les

perturbations. Sur la paroi, le glissement de la vitesse $\frac{\bar{v}_1(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))}{1 + \bar{u}_1(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x}))} = \bar{f}'(\bar{x})$ (la vitesse est

tangente à la surface) se linéarise au premier ordre en $\bar{v}_1(\bar{x}, 0) = \bar{f}'(\bar{x})$. C'est le fameux aplatissement des conditions aux limites. Le profil est aplati en $\bar{y}=0$ et se traduit par une vitesse normale de transpiration. Donc $\frac{\bar{v}_1}{\bar{x}} = -M^{-2} \frac{\bar{p}_1}{\bar{y}}$ donne:

$$(M^{-2}-1) F'(\bar{x}) = M^{-2} \bar{f}'$$

Lorsqu'il n'y a pas de perturbations qui viennent de l'amont la variation de pression est liée à la pente du profil.

$$\bar{p}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{M^{-2}}{(M^{-2}-1)} \bar{f}'(\bar{x} - \bar{y} (M^{-2}-1))$$

Comme $\bar{u}_1 = -M^{-2} \bar{p}_1$ on en déduit la vitesse de glissement sur la paroi qui sera la vitesse en lisière de couche limite:

$$u_e = 1 - \frac{\bar{f}'(\bar{x})}{(M^{-2}-1)}$$

2.1 Couche limite

Pour annuler sur la paroi la vitesse de glissement u_e que l'on vient de calculer il faut introduire une couche limite. On fait la démarche classique, on trouve les mêmes équations qu'en incompressible, mais avec le ρ en plus et on les écrit avec l'enthalpie. Attention μ dans les équations de l'énoncé est adimensionné avec μ , et il dépend de la température (ainsi que ρ et T ...), on a écrit $\tilde{T} = T/T$,

$\tilde{\mu} = \mu/\mu_w$, La raison pour laquelle on choisit T comme jauge de température provient du caractère multiplicatif introduit par la loi d'état. C'est en fait le choix usuel, la température de paroi est $\tilde{T}_w = T_w/T$, $\tilde{\mu}_w$ est la valeur de $\tilde{\mu}$ pour \tilde{T}_w . La loi de Fourier est aussi adimensionnée. On enlève ensuite tous les \sim dans les équations... Elles sont donc implicitement sans dimensions.

On note ρ_e la densité de glissement. Bien entendu la jauge d'épaisseur de couche limite est $Re^{-1/2}$.

Le terme en $u dp/dx$ est normalement $u_x p + v_y p$, $y p = 0$ mais dans la couche limite. Ce terme provient de l'écriture de l'énergie: $de/dt = (-p \underline{u} + \underline{D}) - \underline{q}$, compte tenu de l'incompressibilité $-1/d(\underline{u})/dt = \underline{u}$ et de la définition de l'enthalpie: $e + p(-1) = h$.

Les équations turbulentes associées sont du même genre, mais avec des barres au dessus (!). Les théories les plus simples de turbulence compressible sont calquées sur la démarche incompressible.

2.2 Équation intégrale de conservation de la masse,

On écrit $\frac{1}{y} v = -\frac{1}{x} (u - \rho_e u_e) + \frac{1}{x} (\rho_e u_e)$ donc en supposant que Y ne dépend pas de x . On

peut remplacer $\frac{1}{x} (\rho_e u_e)$ par $\frac{d}{dx} (\rho_e u_e)$ ce qui donne:

$$(Y)v(Y) = \frac{1}{x} (\rho_e u_e (1 - \int_0^Y \frac{u}{\rho_e u_e} dy)) + Y \frac{d}{dx} (\rho_e u_e).$$

Lorsque Y devient assez grand, l'intégrale converge vers 1, et par le raccord de densité tend vers ρ_e . On obtient ainsi le comportement de la vitesse transverse pour Y , en remplaçant Y par y la valeur courante et grande:

$$\rho_e v(y) \sim \frac{d}{dx} (\rho_e u_e) - y \frac{d}{dx} (\rho_e u_e).$$

cette vitesse se raccorde ensuite exactement à la vitesse de fluide parfait pour $\bar{y} \rightarrow \infty$, (avec la relation $\bar{y} = Re^{-1/2} y$, $\bar{x} = x$). Auparavant il faut l'écrire avec la jauge $Re^{-1/2}$:

$$Re^{-1/2} \rho_e v(y) \sim Re^{-1/2} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e) - y Re^{-1/2} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e).$$

Or la vitesse transverse de fluide parfait a pour développement de Taylor:

$$\bar{v}(x, \bar{y}) \bar{v}(x, \bar{y}) = \bar{v}(x, 0) \bar{v}(x, 0) + \bar{y} \frac{d}{d\bar{y}} (\bar{v}(x, 0) \bar{v}(x, 0)) + \dots$$

mais comme $(\frac{d}{d\bar{y}} \bar{v})(x, 0) = -\frac{d}{dx} (\bar{u})(x, 0) = -\frac{d}{dx} \rho_e u_e$, le vrai raccord asymptotique est que la limite

de $Re^{-1/2} \rho_e v(y)$ pour y tendant vers l'infini est la limite de $\bar{v}(x, \bar{y}) \bar{v}(x, \bar{y})$ pour \bar{y} tendant vers 0. On en déduit que l'épaississement de l'épaisseur de couche limite se traduit par la vitesse de transpiration pour le fluide parfait:

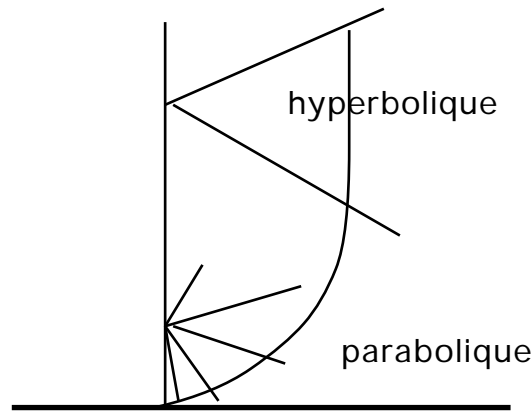
$$\bar{v}(x, 0) \bar{v}(x, 0) = Re^{-1/2} \frac{d}{dx} (\rho_e u_e)$$

cette vitesse de transpiration provoque en fait un effet de second ordre de couche limite. On interprète cette relation en disant que le fluide parfait est perturbé à l'ordre $Re^{-1/2}$ par l'épaississement de la couche limite caractérisé par 1.

2.3 Les équations ressemblent formellement à celles de l'incompressible...

3. Paradoxe de l'influence aval/amont (ou interaction libre)

Sur les images fournies on voit que la couche limite commence à réagir avant que la perturbation ne soit atteinte (bien entendu, dans le cas de la première photo, on voit une onde incidente qui se développe selon $\bar{x} + \bar{y} (M^2 - 1)$ taper la paroi, mais la perturbation remonte le point d'impact), ceci ne peut se comprendre dans le cadre initial de la théorie de fluide parfait couche limite...



Il faut en fait maintenant autoriser les perturbations d'ordre $Re^{-1/2}$ venant de l'épaississement de l'épaisseur de couche limite rétroagir. La paroi n'est plus $\bar{f}(x)$ mais $\bar{f}(x + Re^{-1/2}(\cdot))$. Il s'agit du couplage fort.

Les équations de couche limite intégrale en couplage fort (*Interacting Boundary Layer*) sont les équations "classiques":

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) + \left(\frac{1}{H} \right) ((2+H - M_e^2) \frac{du_e}{u_e dx} = (u_e)^{-2} (\mu_w - u)_w$$

$$\frac{d}{dx} (\cdot) + \left(\frac{\cdot}{e u_e} \right) \frac{d}{dx} (u_e) = (u_e h_e)^{-1} k_w \left(\frac{-T}{y} \right)_w$$

mais avec la condition de raccord qui tient compte de l'épaississement de l'épaisseur de déplacement.

$$u_e = 1 - \frac{1}{(M^2 - 1)} (\bar{f}'(x) + Re^{-1/2} \frac{d}{dx}(\cdot))$$

Ces équations sont un mélange d'ordres de grandeur, dans l'expression de u_e des termes en ϵ et u_e devraient apparaître associés à la vitesse de transpiration $\frac{d}{dx}(\cdot - u_e)$, on les néglige...

Nous montrons ici que les équations couplées fortement permettent de faire apparaître des solutions en exponentielle croissante. Il s'agit de solutions propres (au sens des valeurs propres) d'où le terme interaction libre évoquant la naissance spontanée des perturbations. La couche limite donne si on suppose que \bar{f}_0 est la solution de plaque plane qui varie lentement en x (en fait en $x^{1/2}$), là où la perturbation démarre $\bar{f}_1 \sim \bar{f}_0$ mais $d\bar{f}_1/dx \gg d\bar{f}_0/dx$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) \sim \left(\frac{1}{H} \right) ((2+H - M_e^2) \frac{d}{dx} \bar{p}_1(\bar{x}, 0)$$

soit à la louche: les variations de \bar{f}_1 sont proportionnelles aux variations de $\bar{p}_1(\bar{x}, 0)$. On a vu que pour le fluide parfait en supposant le couplage fort et la plaque plane $f'=0$:

$$\bar{p}_1(\bar{x}, 0) = \frac{M^2}{(M^2 - 1)} \frac{d}{dx} (\cdot) Re^{-1/2}$$

donc:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) \sim \left(\frac{1}{H} \right) ((2+H - M_e^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{M^2}{(M^2 - 1)} \frac{d}{dx} (\cdot) Re^{-1/2} \right) \text{ soit}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{M^2} \right) \sim 10 \left((2+H - M_e^2) \frac{M^2}{(M^2-1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) \right)$$

on voit que le comportement de $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{M^2} \right)$ est en exponentielle croissante, des solutions explosives apparaissent lorsque l'on résout les équations en marchant vers les x croissants.

Le caractère laminaire ou turbulent n'est pas important dans le mécanisme en lui même mais il l'est dans les échelles finales et dans les valeurs de H.

Si on résout très proprement (avec les équations de couche limite complètes non linéaires), on montre que l'on peut tracer une courbe qui se superpose à celle des résultats expérimentaux (cf. courbe). Il y a un plateau de pression, et séparation de la couche limite.

4°) Les équations IBL

Navier Stokes en écoulement compressible stationnaire 2D.

$$\frac{d}{dx} \left(\rho u \right) + \frac{d}{dy} \left(\rho v \right) = 0, \quad u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} = - \frac{dp}{dx}; \quad u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} = - \frac{dp}{dy}$$

$$\left(u \frac{dH}{dx} + v \frac{dH}{dy} \right) = 0 \quad \text{avec } H = c_p T + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \text{ "l'enthalpie totale",}$$

+ les équations de couche limite près de la paroi.

$$\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v = 0,$$

$$\left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \right) = \mu_e \frac{du_e}{dx} + \frac{d}{dy} \left(\dots \right), \quad \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\left(u \frac{dh}{dx} + v \frac{dh}{dy} \right) = u \frac{dp}{dx} + \left(\frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{dh}{dy} \right); \quad = \mu \frac{du}{dy}$$

Mais avec la relation suivante simplifiée (dite "relation de couplage"):

$$v(x,0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} + f \right)$$

On voit que par rapport à la théorie classique on a un couplage fort entre le fluide parfait et la couche limite. La couche limite en s'épaississant perturbe le fluide parfait qui lui même remodifie la couche limite. C'est ce mécanisme qui est celui de l'interaction décrite auparavant.

La théorie classique de la couche limite est à nombre de Reynolds infini et donc

$$v(x,0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} + f \right) \text{ devient simplement } \frac{d}{dx} (f)$$

L'entorse qui consiste à prendre un terme petit est en fait levée dans un cadre théorique nommé la triple couche (*Triple Deck*). Dans le cas de la PC de révision l'onde de choc devient tellement penchée qu'elle est du même ordre que $\frac{1}{Re^{1/2}}$, le couplage fort réapparaît alors naturellement.

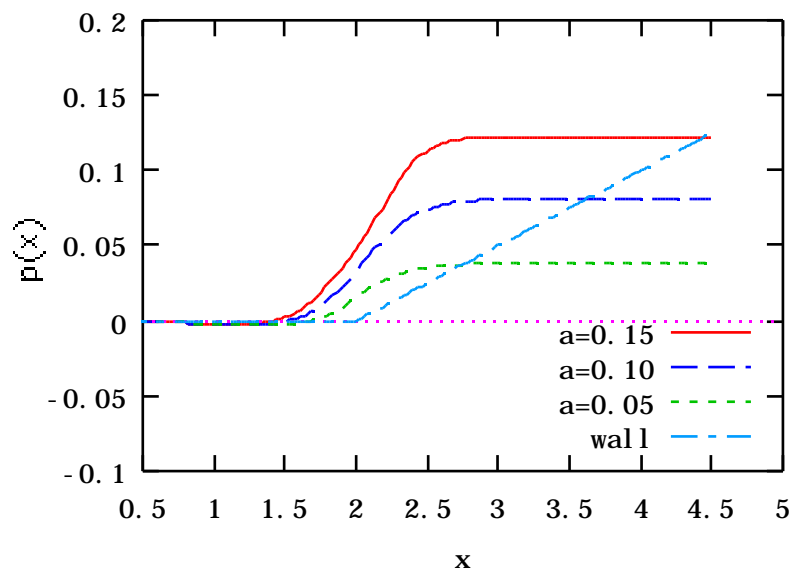
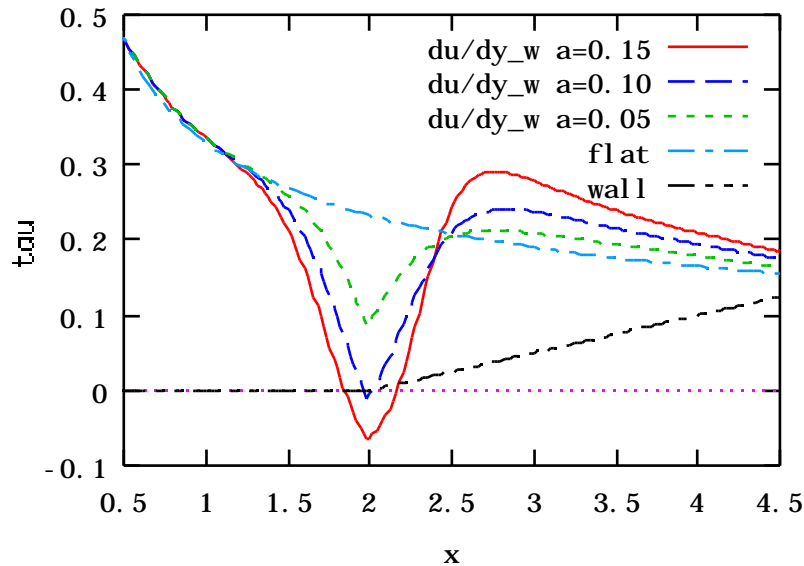
On présente ici un exemple de résolution de ce système dans le cas de la méthode intégrale avec les fermetures intégrales issues de Falkner Skan et avec du fluide parfait linéarisé, et prenant de manière trop simplifiée $\mu_e = \mu_w = h_e = 1$.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) + \left(\frac{1}{H} \right) \left((2+H - M_e^2) \frac{du_e}{u_e dx} \right) = (u_e)^{-2} f_2 \frac{H}{1}, \quad \frac{d}{dx} (u_e) = \frac{N}{1}$$

$$u_e = 1 - \frac{1}{(M^2-1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{Re^{1/2}} + f \right)$$

H, f₂ et N fonctions données du paramètre $\frac{1}{2} du_e/dx$ (ces trois fonctions sont obtenues à partir des profils de Falkner Skan, en fait ici on a triché pour simplifier). On trace le flux de température à la paroi qui est $q = N/$ et le frottement pariétal $\tau_w = f_2 u_e/ 1$.

La résolution est faite de manière itérative, on se donne u_1 on en déduit u_e^{cl} en résolvant la couche limite de manière inverse, pour le même u_1 on calcule u_e^{fp} à partir de la solution de fluide parfait linéarisé. On corrige u_1 de l'écart entre u_e^{fp} et u_e^{cl} en relaxant de manière à obtenir à convergence un u_1 tel que $u_e^{fp} = u_e^{cl}$.



Sur les courbes on a tracé le frottement pariétal τ , la pression $p(x)$ et le flux de chaleur $q(x)$ pour l'écoulement sur un dièdre (le mur: *wall*) commençant en $x=2$ et d'angle $a=0; 0.05; 0.10$ et 0.15 pour les valeurs suivantes : $Me=1.5, Re=10000, Pr=1$

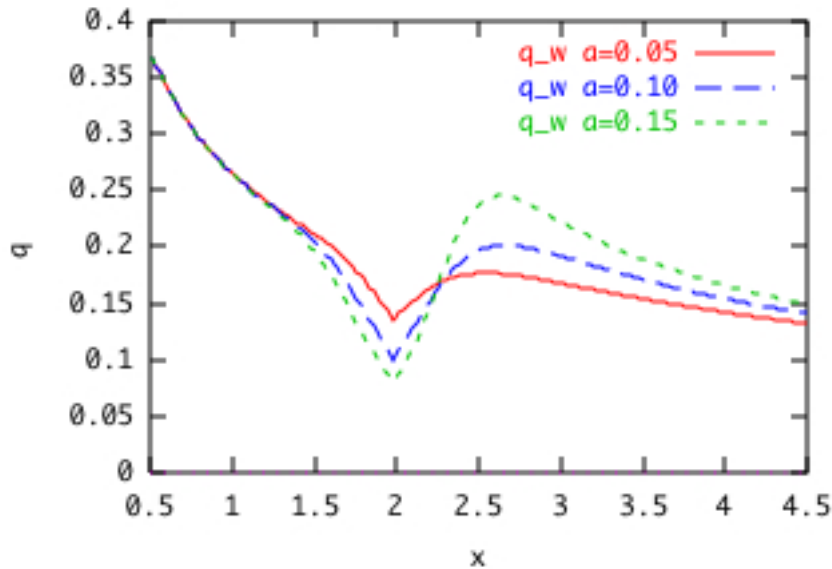
On note la séparation de la couche limite (endroit où le frottement $\tau = u'/y(x,0)$ est négatif).

La pression (ainsi que τ et q) est modifiée avant le début du dièdre en $x=2$, montrant ainsi l'influence d l'aval sur l'amont). Cette méthode intégrale ici simplifiée, ne permet pas de trouver le plateau de pression avant le dièdre. Le flux de chaleur est caractérisé par un pic au rattachement.

Une question que l'on peut se poser c'est pourquoi les équations IBL marchent, en fait c'est subtil. Lorsque l'on résout:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right) + \left(\frac{1}{H} \right) ((2+H - M_e^2) \frac{du_e}{u_e dx} = (e u_e)^{-2} (\mu_w - u)_w,$$

à u_e donné, c'est une équation du premier ordre en 1 , donc on n'a besoin que d'une condition initiale en $x=0$.



Si en revanche, on la résout à 1 donné, cette équation est en fait une équation où $\frac{d^2 u_e}{dx^2}$ est caché car

H dépend de $\frac{du_e}{dx}$ (donc $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H} \right)$ dépend de $\frac{d^2 u_e}{dx^2}$). L'équation est donc du second ordre en dérivée de u_e . On a donc bien deux conditions aux limites à imposer, une en $x=0$ et l'autre en sortie de domaine où l'on impose par exemple que les perturbations introduites sont redevenues négligeable. Pour tracer les courbes ci dessus c'est cette astuce que l'on a utilisé: on résout en alternance la couche limite (en mode inverse u_e donne 1) et le fluide parfait (en mode direct 1 donne u_e), le processus itératif fait que l'aval finit par faire remonter les informations sur l'amont.

Equations PNS

On prend les équations complètes et on enlève les termes que l'on juge petits... En général, les équations sont présentées ainsi sans chercher à écrire les jauges...

$$\frac{\partial}{\partial x} (u) + \frac{\partial}{\partial y} (v) = 0. \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}); \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy})$$

$$\left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \text{ avec } H = c_p T + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \text{ "l'enthalpie totale", et } \tau_{xy}$$

partie dissipative du tenseur des contraintes: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]$ $\tau_{yy} = \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$

Il ne s'agit pas d'une méthode asymptotique puisque l'on enlève "à la main" des termes. L'équation suivant v est normalement à enlever (et se réduit alors à $= - \frac{\partial p}{\partial y}$) mais on la garde quand même.

les équations PNS sont résolues en marchant en x , le P de Parabolized vient de la résolution de la forme "parabolique": $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y^2}$

Dans certains cas (si l'angle de dièdre n'est pas trop important) ou dans les tuyères on peut utiliser les équations PNS et elles donnent de très bon résultats (et assez rapidement), cf. la figure ci contre.

Si on résout en marchant, on retrouve le même problème que pour les équations PNS, lorsqu'elles sont résolues en marchant.

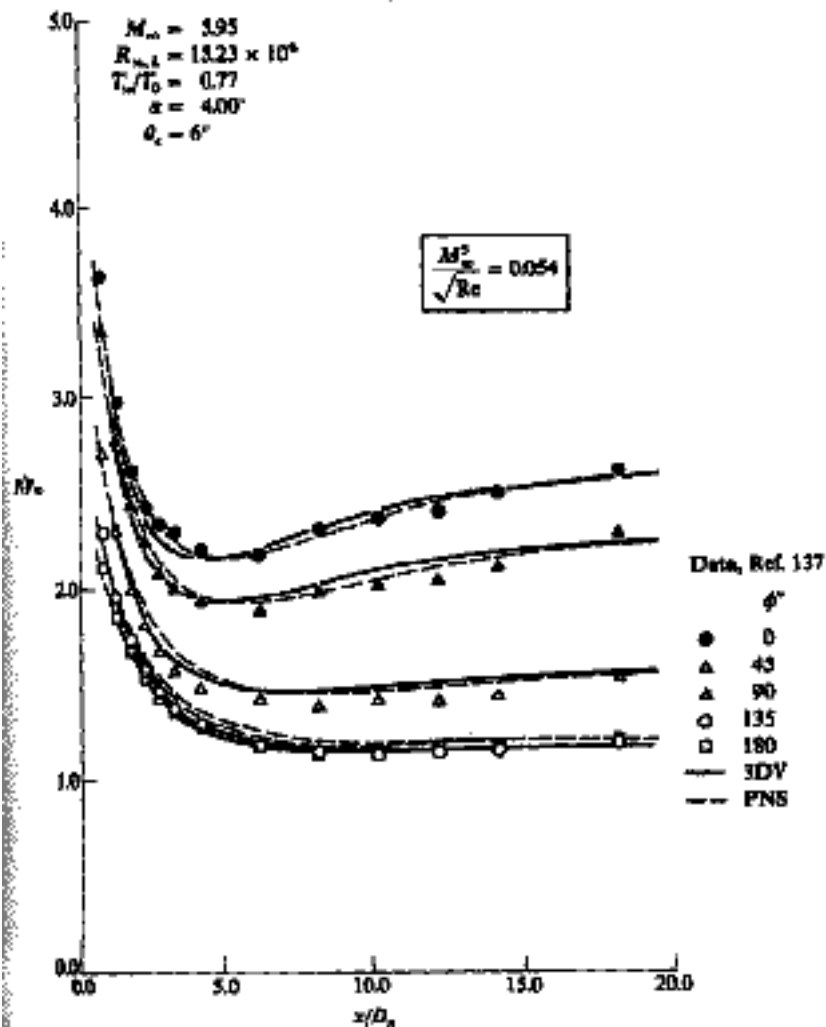


FIGURE 8.7 Pressure distributions over a slightly blunted cone; comparison between experiment and computation (From McWhorter et al., Ref. 136.)

Bibliographie:

Anderson J.D. Jr (1989): "hypersonic and high temperature gas dynamics" McGraw Hill
 Cousteix J. (1989): "Couche limite laminaire" et "turbulence et couche limite", ed Cepadues. Encyclopedia Universalis "aérodynamique".
 Gilly, Rozenhall & Sémézis "Aérodynamique Hypersonique" Gauthier Villars 1970
 Hayes & Probstein (1959): "Hypersonic flow theory" Academic Press .
 Le Balleur JC (1978): "Couplage visqueux non visqueux", la Rech. Aéronautique n °2, pp 65-76.
 Stewartson K. & Brown S.N. (1975): "A non uniqueness of the hypersonic boundary layer", Q.J. mech. appl. math., Vol XXVIII.
 Shreier S. (1982) "Compressible flow", Wiley & sons.
 Stewartson K. (1965): "The theory of laminar boundary layers in compressible fluides" ed. Oxford
 H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.