Mardi 17 Janvier 2012

Transferts Thermiques dans les Fluides

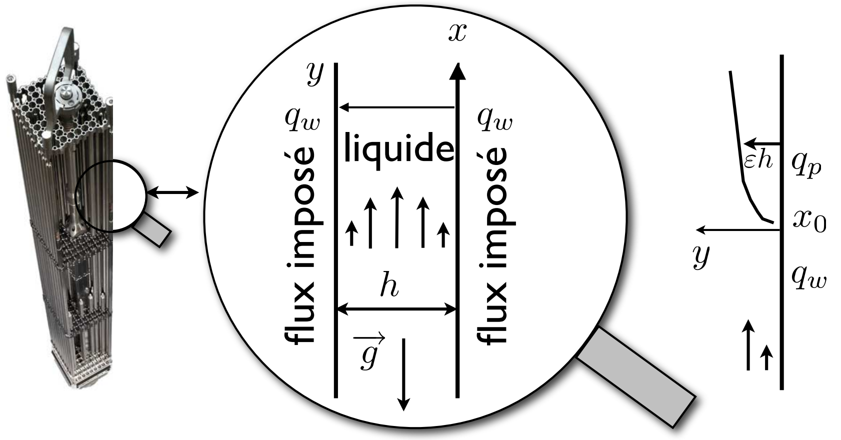
MF 204

durée 3h heures, tout document personnel autorisé

Étude du chauffage d'une conduite avant la crise de l'ébullition.

L'objet de ce problème est l'étude (très simplifiée et partielle) d'un échangeur d'une centrale nucléaire. Normalement, le fluide du circuit primaire (de l'eau) dans la conduite est chauffé par les éléments de combustible nucléaire et ce fluide chaud va ensuite chauffer le circuit secondaire qui produit la vapeur qui fait tourner les turbines. Dans le circuit primaire on évite absolument de former de la vapeur d'eau : si elle se forme, cela provoque un accident connu sous le nom de "crise d'ébullition". En effet, la vapeur conduit moins bien la chaleur que l'eau, la chaleur du combustible n'est alors plus évacuée. Il y peu y avoir fonte de la gaine du combustible.

Le problème sera modélisé par l'étude de l'écoulement entre deux plans (on se place en 2D plan par soucis de simplification, la largeur de la conduite est h) dont la paroi est chauffée par un flux imposé de manière *ad hoc* noté q_w. La densité, la viscosité et toutes les autres quantités thermiques sont supposées constantes. Le nombre de Reynolds est supposé assez grand pour pouvoir faire des simplifications asymptotiques mais assez petit pour que l'écoulement reste laminaire. La première partie du problème étudie un régime permanent à flux pariétal imposé. La seconde partie étudie les longueurs d'entrées, la troisième le changement de température dû à une élévation du flux de chaleur imposé à la paroi. La dernière partie est consacrée à quelques ordres de grandeurs associés à la vaporisation. Toutes ces parties sont assez indépendantes.



Gauche : la configuration du problème : un assemblage de crayons de 4 m de haut (document Areva), la partie sous la loupe est l'écoulement établi. Centre : "zoom avant" de la question 1, écoulement stationnaire établi en x (positif vers le haut). Droite : la configuration de la question 3, la couche précédente est soumise à un nouveau flux thermique différent au delà d'une position x_0. Une couche limite thermique se développe près de la paroi.

Etat de Base stationnaire, solution à flux constant entre deux plaques

On se place à une distance assez grande de l'endroit où commence le tuyau manière à obtenir un régime permanent invariant par translation pour la vitesse et le flux.
1.1 Ecrire les équations 2D planes de Navier Stokes incompressibles entre deux plans infinis en supposant la stationnarité et l'invariance en x orienté suivant la verticale ascendante. On pose $K = -dp/dx$ le gradient de pression. Montrer que le poids ne fait que modifier ce gradient de pression.
1.2 Adimensionner l'équation différentielle de $u(y)$ pour le liquide en utilisant h comme échelle de longueur. Quelle est la valeur de l'échelle de vitesse U_0 ?
1.3 Résoudre $\bar{u}(\bar{y})$ et trouver le profil parabolique.
1.4 On suppose que l'élévation de température par frottements visqueux est négligeable dans le liquide. Ecrire l'équation de la chaleur compte tenu des hypothèses de régime permanent et d'invariance par translation en x du flux à la paroi (la température n'est pas invariante en x). Ecrire les conditions aux limites.
1.5 Comme $u(y)$ n'est fonction que de y et q_w est constant, il est vraisemblable que la température à la paroi croît linéairement avec x, on peut imaginer que la température s'écrit :
$T(x, y) = T_0 + (\phi/k)\bar{f}(x/h) + (\Delta T)\bar{\Theta}(y/h)$, et avec (ΔT) et ϕ constants. Relier entre eux ΔT ϕ et q_w.
1.6 Montrer que la solution proposée est telle que $f'(\bar{x})$ est une constante.
1.7 Montrer que le problème sans dimension est de la forme $A\bar{y}(1 - \bar{y}) = \bar{\Theta}''(\bar{y})$, avec A réel, conditions aux limites ?
1.8 Résoudre $\bar{\Theta}(\bar{y})$ puis donner $T(x, y)$.
1.9 Tracer sur un même graphe l'allure de $\bar{u}$ et $\bar{\Theta}$.
1.10 Calculez la température moyenne sur la section et la température aux parois.
1.11 Calculer le Nusselt à l'aide de la température moyenne.

Longueur d'établissement

On n'a en fait pas pris en compte la dérivée totale $\rho(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u$ dans la question précédente. Nous allons examiner la longueur d'entrée ou longueur d'établissement des équations précédentes.
2.1 Calculer le flux de vitesse dans la région établie.
2.2 L'injection se fait en $x = 0$ à une vitesse mesurée avec U_0. Quelle serait l'échelle de longueur L_e pertinente qui permettrait de tenir compte de la longueur d'établissement de l'écoulement ?
2.3 Quel serait l'ordre de grandeur de la vitesse transverse dans la partie ou l'écoulement s'établit ?
2.4 Quel serait l'échelle de longueur pour la distance d'établissement thermique L_t ?
2.5 Le nombre de Reynolds est assez grand (exprimez le avec le flux), ordonnez par taille croissante les échelles de longueurs L_e, L_t et h.

Dans la suite tout comme en 1. on est au delà de ces distances.

Variation locale du flux

Nous nous plaçons dans la région considérée dans la question 1. . L'écoulement et la température sont en régime établi, la température est donnée et la vitesse parabolique. Nous allons considérer un changement de température induit par un changement du flux à la paroi, le flux passe de la valeur constante q_w à q_p constant lui aussi, ce passage se fait brusquement en un point. Nous allons donc faire une étude locale avec des variations en x, soit x_0 le point où le flux passe d'une valeur constante à une autre beaucoup plus grande de manière à négliger la solution précédente.

3.1 Comparer x_0 et L_e comptenu des hypothèses.
3.2 Quelle est la vitesse que l'on considère (*cf.* question 1), l'écrire sans dimension.
3.3 On suppose le nombre d'Eckert petit, écrire l'équation de la chaleur avec puis sans dimension (en utilisant le champ de vitesse $u(y)$ de la question 1).
3.4 Ecrire toutes les conditions aux limites du problème.
3.5 Pour résoudre le problème on va décomposer la température, elle sera notée $\bar{T} = \bar{\Theta}_0(\bar{x}, \bar{y}) + \Theta\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y})$. On note Θ une échelle relative de température et $\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y})$ la température induite par l'accroissement de flux. A quel problème satisfait $\bar{\Theta}_0(\bar{x}, \bar{y})$?
3.6 Ecrire l'équation de la chaleur en ayant remplacé $\bar{T}$ pour faire apparaître l'équation de $\bar{\theta}$.
3.7 Ecrire le flux en $x > x_0$ de manière adimensionnée.
3.8 Constatez que pour un fluide très peu visqueux le problème est singulier, pourquoi ?
3.9 Pour lever la singularité près de la paroi, on va introduire une couche limite thermique de faible épaisseur relative ε, pourquoi ?
3.10 Reprenons l'expression du flux à la paroi de la question 3.7, remplacer $\bar{\theta}$ par $\tilde{\theta}$, on suppose de plus que $q_p/q_w \gg 1$, Montrer que $\Theta = \varepsilon q_p/q_w$ permet d'écrire $\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{y}} = -1$ comme condition à la limite.
3.11 Montrer que $\bar{\Theta}_0(\bar{x}, \bar{y})$ varie peu en variable $\tilde{y}$.
3.12 Ecrire la vitesse au premier ordre en $\tilde{y}$.
3.13 En déduire que le problème s'écrit dans les bonnes échelles :

$$\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\tilde{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}\tilde{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\tilde{\theta}|_0 = -1.$$

Quelles sont les éventuelles autres conditions aux limites ?
3.14 Montrer que le système précédent admet une solution autosemblable de la forme $\tilde{\theta} = (\bar{x})^n H(\eta)$ avec $\eta = \tilde{y}(\bar{x})^{-p}$, trouver n et p.
3.15 Ecrire l'équation différentielle ordinaire résultante et ses conditions.
3.16 Vérifier si vous le pouvez (ne vous attardez pas) que la solution est

$$H(\eta) = \frac{3^{2/3}e^{-\frac{\eta^3}{9}} - \eta\Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{\eta^3}{9}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \text{ avec } \Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \text{ et } \quad H(0) \simeq 1.53612$$

3.17 En déduire la température à la paroi.
3.18 Tracer la température en fonction de η, puis esquissez le champ de température en $\bar{x}, \bar{y}$
3.19 En déduire le Nusselt.

Etude sommaire de l'ébullition

Le flux est augmenté graduellement et le liquide s'échauffe de plus en plus. Si la température atteint la température d'ébullition, l'eau se vaporise près de la paroi là où la température est la plus chaude. On pourrait faire une analyse avec une couche de vapeur, une couche de liquide, puis le gaz externe. La vapeur formée conduit mal la chaleur elle isole presque totalement la paroi du liquide. Ainsi la température de la paroi augmente encore plus, c'est le point de "*burn-out*"(la paroi de la gaine peut même fondre). On parle aussi de "crise d'ébullition" en Nucléaire. Mais la couche se déstabilise et forme des bulles près de la paroi. Les bulles s'accumulent et forment des jets qui détruisent le film liquide. On conçoit que la tension de surface va alors jouer un grand rôle. L'interface va se déformer énormément. Sachant que la tension de surface intervient alors dans les contraintes normales par l'expression du saut de pression $p_{vapeur} - p = \sigma \frac{d^2}{dx^2} h_{vapeur}$ (en supposant ici la variation d'interface faible, ce qui n'est pas le cas, mais la première destabilisation est dimensionnante).
4.1 On considère la paroi, une couche de vapeur est formée le long de la paroi d'épaisseur $h_{vapeur} \ll h$, le flux q_w étant toujours une donnée, estimer la chute de température sur cette épaisseur, conclure sur l'effet isolant sachant que $k_{vapeur} \ll k$.
4.2 Quel est le mécanisme classique de déstabilisation de deux couches de fluides de vitesses et de densités différentes ?
4.3 Déduire par analyse dimensionnelle des données que l'on peut construire une longueur qui est $\lambda = (\frac{\sigma}{g(\rho - \rho_{vapeur})})^n$, (trouver n) appelée la longueur capillaire.
4.4 Toujours par analyse dimensionnelle, montrer que l'on peut trouver m tel que $u_{vapeur} = (\frac{\sigma}{\rho_{vapeur}\lambda})^m$ a la dimension d'une vitesse. C'est effectivement l'ordre de grandeur des jets de vapeur qui s'échappent perpendiculairement à la plaque.
4.5 Soit H_L la chaleur latente de vaporisation, on peut estimer la densité de flux q_{ZK} de chaleur emporté dans des jets perpendiculaires à la plaque à $q_{ZK} \simeq \rho_{vapeur} H_L u_{vapeur}$. Donner l'expression de q_{ZK} (appelée prédiction de Zuber-Kutateladze).

Bibliographie

Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.
John H. Lienhard IV and V (2008) : "A Heat Transfer Textbook"
Landau Lifshitz Volume 6 Fluid Mechanics Chapitre 5 (§53)
Ralf Güldner www.areva.com bases-technologie-reacteurs (pour l'image de la figure)

Étude du chauffage d'une conduite avant la crise de l'ébullition, Departure of Nuclear Boilling (DNB), Correction

On modélise l'écoulement comme un Poiseuille, c'est une approximation. Pour la question 2, c'est en fait la solution de Lévêque mais sur le flux! Pour la question 3, on fait de l'analyse dimensionnelle pure.

1.1 L'invariance en x, et comme il n'y a pas de gradient de pression extérieur imposant l'écoulement, cela permet d'écrire $0 + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0,\;\; 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} - (\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu \dfrac{\partial}{\partial y})u - \rho g$, avec $-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g$ qui est le terme moteur constant.
L'équation finale sans dimension est $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 1 = 0$ avec $U_0 = (K - \rho g)h^2/\mu$. On trouve alors $\bar{u} = \bar{y}(1-\bar{y})/2$
1.7 L'équation de la chaleur (en négligeant le terme visqueux)

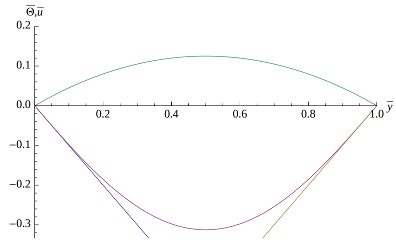
$$\rho c_p u(y)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial}{\partial y})T + \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x})T, \text{ on a à la paroi } q_w = -k\frac{\partial}{\partial y}T|_0,\;\; q_w = k\frac{\partial}{\partial y}T|_h$$

On écrit $T = T_0 + (\phi/k)\bar{f}(x/h) + (\Delta T)\Theta(y/h)$

$$\rho c_p U_0 \bar{u}(\bar{y})(\phi/k)\bar{f}'(x/h)/h = k(\Delta T/h^2)\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\Theta, \text{ on a à la paroi } q_w = -(\pm k\Delta T/h)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\Theta$$

L'échelle de température est $\Delta T = hq_w/k$ et $\phi = q_w k/(h\rho c_p U_0)$ Comme il y a invariance en x du flux $\partial_x q_x = 0$, donc le dérivée seconde sera nulle. Le problème sans dimension est :
$\bar{y}(1-\bar{y})/2f' = \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\bar{\Theta}$ $1 = -\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{\Theta}$ en 0 et $1 = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{\Theta}$ en 1,

Soit on se place déjà dans l'approximation de Gratez (c'est dans les hypothèses de l'énoncé), et $f'' << f'$, soit on a déjà remarqué l'invariance en x du flux $\partial_x q_x = 0$, soit on remarque que l'on a une fonction de $\bar{x}$ = une fonction de $\bar{y}$, donc il s'agit d'une constante qui nous donnerait un genre d'exponentielle croissante pour f. Donc, f' est constant.
On intègre une première fois pour le flux $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\bar{\Theta} = (\bar{y}^2/4 - \bar{y}^3/6)f' + Q$ en écrivant les conditions aux limites, $f' = 24$ et on a $\bar{\Theta}' = -4\bar{y}^3 + 6\bar{y}^2 - 1$ on intègre en $\bar{\Theta} = -\bar{y}^4 + 2\bar{y}^3 - \bar{y}$, ce sera le $\bar{\Theta}_0$ de la question suivante.
La moyenne sur la section $\int_0^1(-\bar{y}^4 + 2\bar{y}^3 - \bar{y})d\bar{y} = -1/5$.
Donc la température est $T = T_0 + 24q_w x/(\rho c_p U_0 h) - (q_w h/k)(-\bar{y}^4 + 2\bar{y}^3 - \bar{y})$,
sa moyenne $< T >= T_0 + 24q_w x/(\rho c_p U_0 h) + (q_w h/k)/5$ donc le Nusselt $Nu = 5$.



La solution analytique à flux constant en rouge, encadrée par les deux droites de pente -1 et 1, en vert, au dessus, le profil de vitesse.

2. Par intégration on trouve que le flux est en $U_0 h/12$, il est conservé par conservation de la masse. On fait le même raisonnement que pour la longueur d'entrée dans les tubes (problème de Graetz) : comme on veut garder $\rho u \frac{\partial}{\partial x} \simeq \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$ on en déduit $U_0^2/L_e = \nu U_0/h^2$ la longueur d'entrée est donc $L_e = hU_0 h/\nu$ avec $L_e \gg h$. La vitesse transverse sera donc $U_0/(U_0 h/\nu)$. Pour la température on trouve une longueur qui vaut $L_t = PrhU_0 h/\nu$ On utilise le Pr de l'eau : $h \ll Le < L_t$.
3. L'équation de la chaleur devient ($E = 0$) :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\bar{T} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{T}) \text{ ce qui donne aussi : } \bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{\theta} = \frac{1}{Pr\ Re}(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\bar{\theta} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{\theta})$$

(l'équation de la chaleur est linéaire, donc $\bar{\theta}$ vérifie l'équation). Le flux sans dimension est : $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = 1 - \Theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{y}} = q_p/q_w$ si on étudie en changeant d'échelle $\bar{y} = \varepsilon \tilde{y}$, alors il s'écrit $= 1 - \Theta \frac{\partial \tilde{\theta}}{\varepsilon \partial \tilde{y}} = q_p/q_w$ comme on suppose $q_p/q_w \gg 1$ alors $\Theta = \varepsilon q_p/q_w$ et $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}}|_0 = -1$ La température initiale varie peu en $\tilde{y}$ car ε est petit. En revanche la vitesse se développe en $\bar{u} = \varepsilon \tilde{y}(2 - \varepsilon \tilde{y})/2$ soit au premier ordre la vitesse est linéaire dans la couche pariétale : $\varepsilon \tilde{y}/2$

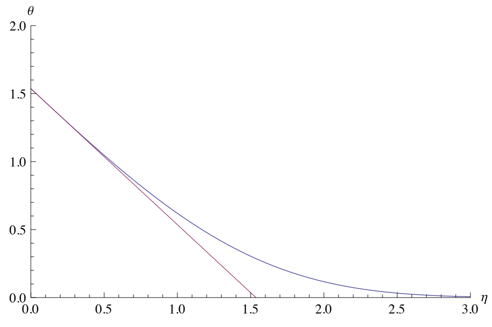
On obtient bien l'équation proposée (exactement comme dans la PC3 du problème de Lévêque $\varepsilon = (2Pe)^{-1/3}$, mis à part ici qu'il s'agit d'un flux imposé)

$$\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\tilde{\theta}; \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\tilde{\theta}|_0 = -1$$

avec en plus $\tilde{\theta}(\infty) = 0$ par le raccord. La résolution se fait comme dans la PC pour la recherche des solution semblables en cherchant les invariances par dilatation : $\eta = \tilde{y}/\bar{x}^{1/3}$, mais il faut remarquer que c'est le flux qui doit être invariant par changement d'échelle, donc θ^*/y^*=1. D'où le $\bar{x}^{1/3}$ dans la température. L'équation est

$$3H'' + \eta^2 H' - \eta H = 0, \quad H'(0) = -1, \quad H(\infty) = 0$$

on vérifie par substitution que la solution proposée convient. Elle est tracée sur la courbe suivante. La température à la paroi est solution du problème, $H(0) = 1.53$, on en déduit le Nusselt =0.82 $x^{-1/3}Pe^{1/3}$



La solution autosemblale, la droite de pente unitaire a été tracée.

4. La chute de température dans la couche gazeuse est envriron eq_w/k_v L'instabilité suggérée est une instabilité de Kelvin Helmoltz. En fait, c'est plus compliqué à cause de la tension de surface. la pression est à comparer à ρgh donc $(\rho_\ell - \rho_g)gh$ a la même dimension que $\sigma\frac{h}{\lambda^2}$, d'où l'expression proposée avec $n = 1/2$. Une densité fois une vitesse au carré $\rho_g u_g^2$ est de la dimension d'une pression, donc de σ/λ, donc on peut estimer la vitesse à $u_g = (\frac{\sigma}{\rho_g \lambda})^{1/2}$ d'où l'expression proposée avec $m = 1/2$.

On obtient l'expression finale en rassemblant les résultats précédents, c'est effectivement une corrélation utilisée expérimentalement (pour dimensionner les conduites de centrales nucléaires).

$$q \simeq \rho_g^{1/2} H_L (g(\rho_\ell - \rho_g)\sigma)^{1/4}.$$

Cette dernière partie n'est qu'évoquée et mériterait de plus amples développements que l'on peut trouver dans la littérature.

ordres de grandeur :
$35^\circ C$ entre le haut et le bas des assemblages qui font 4 mètres de hauteur, $T_0 = 300^\circ C$ (155bars) (le secondaire préchauffé à $230^\circ C$) La distance parcourue par l'eau est donc celle des 4 m de hauteur à environ 5m/s, la distance caractéristique h est une distance de l''ordre du cm