Mardi 29 Janvier 2013

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 2h30 heures, tout document personnel autorisé

Étude d'une tour solaire.

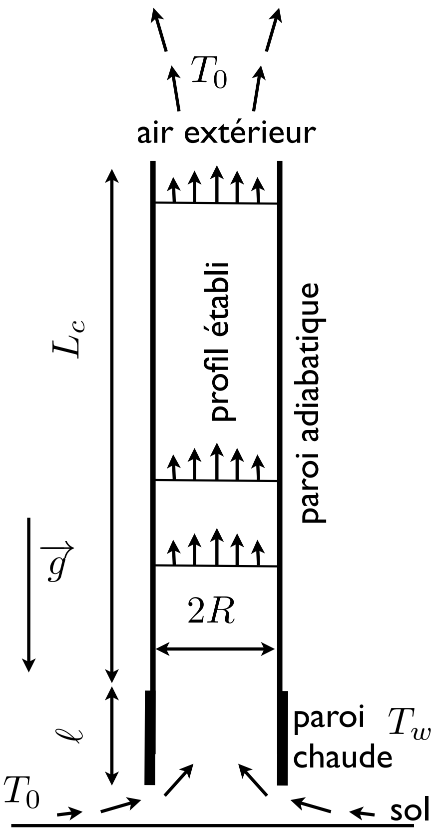

FIGURE 1 – Une tour solaire est un tube très haut chauffé à sa base par le soleil, cela génère un écoulement vertical. On peut placer une turbine, non représentée ici. Les perses utilisent depuis des siècles ce dispositif (nommé badgir ou ≪ tour du vent ≫) pour rafraîchir leurs édifices.

L'objet de ce problème est l'étude (très simplifiée et partielle) d'une tour solaire (*solar chimney*). Il s'agit d'un très long tube, chauffé en bas par une serre qui capte les rayons solaires. L'air, initialement à la température ambiante T_0 est chauffé à la base (porté par le rayonnement solaire à la température T_w). L'air est canalisé par la cheminée et monte car la sortie de ce tube est située à l'air libre là où la température est à la valeur ambiante uniforme T_0, plus froide. Une turbine est placée au bas du tube, le courant d'air obtenu par l'écart de température entre le haut et le bas permet la génération de courant électrique.

L'air est chauffé sur la paroi chaude du collecteur, l'énergie récupérée est conservée par l'écoulement dans la cheminée. Dans cette même partie de cheminée, la force d'Archimède tire vers le haut l'écoulement. On se placera donc dans les hypothèses de Boussinesq, et on notera α le coefficient de dilatation isobare. On suppose que l'air est transparent et qu'il n'est donc pas chauffé en volume par la lumière solaire.

Une première tour expérimentale (germano-espagnole) a été construite en Espagne à Manzanares (150 km au sud de Madrid) a fonctionné de 1982 à 89 (Fig.2 gauche), une autre existe en Chine, et de nombreux projets pourraient voir le jour en Australie et dans d'autres pays désertiques (on parle de 1000 mètres de hauteur, 70 mètres de diamètre et de puissance électrique de l'ordre de 200 mégawatts).

Nous supposerons par la suite que l'ensemble est un tube droit simple de rayon R (sans angle, le collecteur est donc vertical de longueur ℓ suivit de la cheminée de longueur L_c, contrairement à la photo et au schéma central de la figure 2). On négligera donc complètement la perte de charge et la perturbation liée à la turbine placée en quelque part vers le bas. La position verticale est repérée par l'axe des x orienté dans le sens inverse de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_x$. On va supposer que l'écoulement est un Poiseuille dans toute la tour de $x = -\ell$ entrée à $x = L_c$ la sortie à l'air libre. Il s'agit d'une forte simplification, mais elle est assez pertinente..

L'objet du problème est de trouver la vitesse moyenne U_0 du fluide dans la cheminée en fonction des températures et des autres quantités physiques & géométriques ainsi que la distribution de pression.

Problème général

Dans cette partie on ne fait pas d'hypothèse sur la forme de la vitesse.
1.1 Ecrire les équations axi de Navier Stokes incompressible et stationnaire dans l'approximation de Boussinesq dans le cylindre qu'est la tour.
1.2 Ecrire toutes les conditions aux limites de ce problème (en pression et vitesse). Justifier que la perturbation de pression (au sens de Boussinesq) est nulle en haut et en bas de la tour.
1.3 Ecrire l'équation de la chaleur associée avec toutes ses conditions aux limites pour la température.
1.4 En utilisant R comme échelle et U_0 (inconnue pour l'instant) la vitesse moyenne comme échelle, écrire ces équations. Introduire le nombre de Reynolds et le nombre de Richardson $Ri = \mathcal{F}(\alpha, g, T_0, T_w, R, U_0)$
1.5 On néglige la dissipation visqueuse dans l'équation de la chaleur, quel est le nombre sans dimension associé ?

Le problème t stationnaire étant posé, on peut commencer à faire des hypothèses simplificatrices pour le résoudre (on supposera le Reynolds grand).

Expression du flux

Dans cette partie on se place dans un tube (qui n'est pas encore forcément la tour solaire) pour établir une relation intégrale importante par la suite. On ne suppose pas encore que le profil est parabolique, mais on va exploiter le fait que $L_c \gg R$. On peut supposer la température égale à T_0 en entrée et une température donnée, disons T_1 sur les parois. On va travailler sans dimension, on utilise R comme échelle en x et en r et on se donne une vitesse caractéristique U_0.
2.1 Montrer que (et nommer cette équation) :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T} = \bar{r}^{-1}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\bar{v}\bar{T})) = ...$$

2.2 Faire de même pour :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u} = ...$$

2.3 En supposant que $\bar{x} = X\tilde{x}$ avec $X \gg 1$, montrer qu'il existe une échelle de longueur telle que l'on passe à un régime établi pour la température (exprimez X avec Re et Pr).
2.4 En déduire que la vitesse transverse se mesure en X^{-1} par rapport à l'ordre de grandeur de la vitesse longitudinale.
2.5 Montrez que les termes de dérivée seconde longitudinaux sont négligeables.
2.6 Avec les échelles précédentes on a normalement trouvé que l'équation de la chaleur sans dimension s'écrit asymptotiquement :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\bar{r}\tilde{u}\tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\tilde{v}\tilde{T}) = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\tilde{T}).$$

Intégrer sur une section et en déduire une relation entre le flux longitudinal convectif d'énergie et la valeur de la densité transversale de flux à la paroi (ces deux quantités s'introduisent naturellement par intégration).
2.7 Que se passe t il pour une paroi adiabatique ?

Nous allons préciser maintenant suivant que cette portion de tube est le collecteur ou la cheminée.

Etude du collecteur

Dans la première partie du tuyau, avant $x = 0$, de longueur ℓ, on suppose qu'un écoulement de Poiseuille est établi (ce serait vrai en première approximation, le fait d'imposer des pressions aide aussi). On suppose que $\ell \sim R$ et $\bar{\ell} = \ell/R = O(1)$. La valeur finale de U_0 ne pourra être calculée qu'avec l'étude de la cheminée
3.1 En supposant (ce qui est faux en pratique, mais vrai en première approximation) cet écoulement de Poiseuille, rappeler l'expression de la vitesse de Poiseuille compte tenu que la vitesse moyenne sur la section est unitaire par le choix de U_0.
3.2 Quel est le gradient de pression associé, trouver sa dimension. On notera $-\Pi$ l'expression finale.
3.3 Calculer le frottement à la paroi et le relier au gradient de pression.
3.4 En supposant (ce qui est faux en pratique, mais vrai en première approximation) cet écoulement de Poiseuille et en supposant de plus que le transfert est uniquement de convection forcée (ce qui est faux en pratique, mais vrai en première approximation), écrire l'équation de la chaleur avec ses conditions aux limites pour $x < 0$.
3.5 Montrer que les hypothèses simplificatrices retenues font qu'il s'agit du problème de Lévêque.
3.6 Rappeler l'expression analytique de champ de température pour la solution de Lévêque.
3.7 Tracer les profils de température entre $x = -\ell$ et $x = 0$.
3.8 En déduire, dans ce cadre d'approximation, la valeur du flux d'énergie longitudinal

$$\int_0^R \rho c_p u(r)(T(x,r) - T_0) dr$$

à la fin du chauffage en $x = 0$. On utilisera peut être la relation suivante

$$\int_0^\infty \eta \Gamma(1/3, \eta^3/9)/\Gamma(1/3) d\eta = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 0.807$$

3.9 Discuter le fait que le terme de Boussinesq soit négligé.
3.10 Quelle est la pression en $x = -\ell$ et en $x = 0$.

Etude de la cheminée

L'étude précédente nous a montré qu'en première approximation, la vitesse est un Poiseuille dans le collecteur. Le gradient de pression $(-\Pi)$ est (questions 3.X) tel que la pression est $p(x) = -\Pi(x + \ell)$. Ensuite en $x > 0$ on a la cheminée. En première approximation, on supposera que la vitesse reste un Poiseuille et que sur une distance assez courte si on suppose la cheminée très très longue, la température a diffusé dans le tuyau pour devenir constante.
4.1 Montrer qu'effectivement comme les parois de la cheminée sont adiabatiques le flux de température des questions 2.X est constant.
4.2 Donner la valeur de la température finale T_m.
4.3 On suppose donc la température constante en r et en x montrer (à partir de la forme a dimensionnée qui permet d'écrire les hypothèses et les approximations) que les équations de Navier Stokes avec le terme de Boussinesq sous forme dimensionnée sont :

$$u = u(r), \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \alpha (T_m - T_0) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \quad 0 = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}T)$$

4.4 En déduire l'expression du gradient de pression en $x > 0$ permettant d'obtenir la bonne condition aux limites en $x = L_c$.
4.5 En déduire la relation entre U_0 et la température moyenne dans le tuyau T_m et ℓ et L_c et....
4.6 Tracez la pression en fonction de x dans toute la tour.
4.7 La puissance délivrée étant proportionnelle à ρU_0^3 (pourquoi ?), exprimer l'ordre de grandeur de cette puissance disponible en fonction des caractéristiques de la tour et de l'atmosphère.
4.8 Bien entendu on n'atteint pas cette valeur car la température ne s'égalise pas à T_m, sur une distance courte, il faut une certaine longueur d'adaptation, quel est l'ordre de grandeur de cette longueur d'adaptation ?

Panache de Sortie

Le jet sort dans l'air à pression constante, un panache se forme, il va garder une une forme fine de type couche limite libre.
5.1 Ecrire les équations et les conditions aux limites.
5.2 On se place à une distance grande par rapport au diamètre du tuyau. Ecrire les équations sous une forme de couche limite libre en tenant compte que le panache est fin par rapport à la position présente.
5.3 Ecrire le flux d'énergie à la hauteur considérée, quelle est sa valeur ?

Bibliographie

Jörg Schlaich, Rudolf Bergermann, Wolfgang Schiel, Gerhard Weinrebe "Design of Commercial Solar Updraft Tower Systems – Utilization of Solar Induced Convective Flows for Power Generation", Journal of Solar Energy Engineering feb 2005, Vol. 127/ 123
Atit Koonsrisuk " Mathematical modeling of sloped solar chimney power plants" Energy 47 (2012) 582-589
`wikipedia.org: Solar updraft tower`

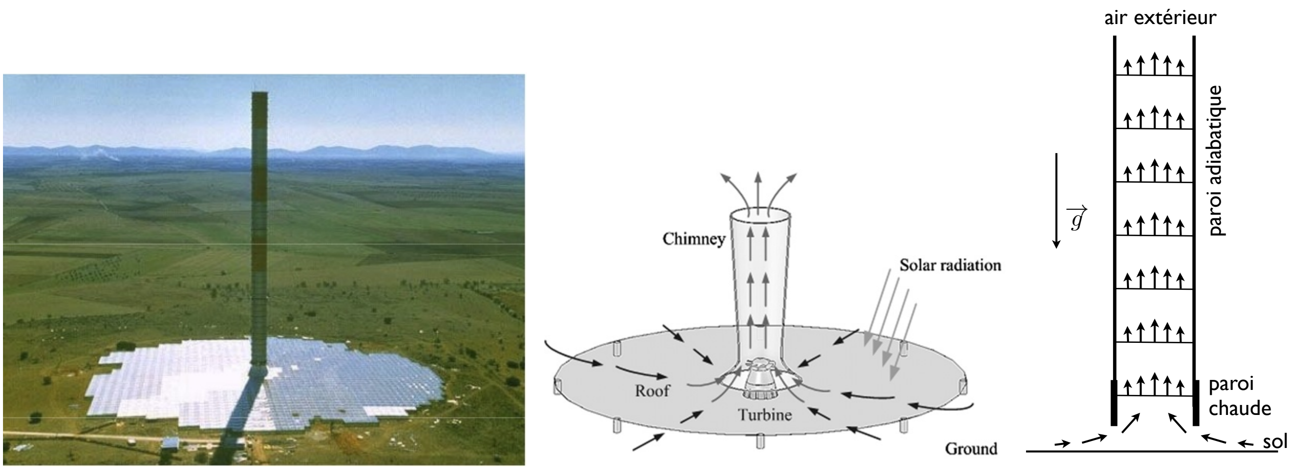

FIGURE 2 – Gauche une vue de la tour espagnole (Schlaich et al. 05), centre un schéma (Koonsrisuk 12) explicatif. Droite, ce sujet porte sur un système simplifié où tout l'écoulement est vertical, il n'y a pas de turbine, la partie chauffée (le collecteur, dont le toit est noté "roof") est verticale. Le résultat du rayonnement solaire est que la paroi est chauffée à une température donnée. La cheminée ("Chimney") est le même tube.

Correction

1.X Comme $\frac{\partial}{\partial\theta}=0$, il ne reste que : $\underline{\nabla}\cdot\underline{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial rv}{r\partial r}$, et $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial r}$ et $\underline{\nabla}^2\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}\phi)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$. donc en stationnaire, en utilisant R et U_0 et $T=T_w+(T_0-T_w)\bar{T}$ et $(\rho_0 U_0^2)$ comme échelles, la description de Boussinesq devient :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\bar{u}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u}=-\frac{\delta p}{\rho U_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+Ri\bar{T}+\frac{1}{Re}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u})+\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\bar{u}))$$

avec $Ri=g\alpha(T_0-T_w)R/(\rho_0 U_0^2)$ Richardson et $E=Prc^{-1}U_0^2/(T_w-T_0)$ Eckert

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\bar{T}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{T}=\frac{1}{Re}(\frac{1}{Pr}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{T})+\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\bar{T})+E(\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u})^2)$$

La vitesse est nulle sur les parois $\bar{r}=1$, la vitesse est inconnue à l'entrée et à la sortie, mais la pression y est connue, c'est 0 en entrée et en sortie. La température vaut 0 à l'entrée, elle vaut 1 dans le collecteur à la paroi puis dans la cheminée $\partial\bar{T}/\partial\bar{r}=0$ sur la paroi. En sortie, la température vaut ce qu'elle vaut... L'hypothèse de pression nulle à l'entrée est sûrement fausse, car le fluide est accéléré avant d'entrer dans le tube. Il faudrait donc en plus étudier une zone autour de l'entrée dans laquelle la vitesse est accélérée. De même il faut étudier toute la sortie, la pression n'est pas exactement nulle en $\bar{x}=L_c/R$, il y a un effet de sortie (assez faible) et il faudrait étudier toute l'interaction avec l'extérieur.

On pense que pour qu'il y ait mouvement, par moindre dégénérescence $\delta p=\rho U_0^2$ et $Ri=(1/Re)$ en fait nous préciserons cette dernière estimation plus loin car dans le collecteur la température est nulle dans le coeur pur $\bar{r}=O(1)$, elle ne varie que près de la paroi (dont on se doute que l'épaisseur sera en $Re^{-1/3}$), donc dans le collecteur, il ne faut pas imposer cette moindre dégénérescence. En revanche, dans la cheminée, une fois l'effet de changement de conditions aux limites (température puis adiabatique) passé, c'est bien la température qui aura diffusé dans tout le tube qui sera le moteur. On aura bien un équilibre entre le Richardson et l'inverse du Reynolds (à l'effet de prise de moyenne près qui réduit le Richardson...).

2.1-2.2 Pour toute quantité $\bar{c}$

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\bar{c}+\bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{c}=\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\bar{u}\bar{c})+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(\bar{r}\bar{v}\bar{c})-\bar{c}[\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\bar{u}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(\bar{r}\bar{v})]$$

le terme entre crochets est nul par incompressibilité. Comme $\bar{r}$ et $\bar{x}$ sont indépendants on a donc la forme "conservative" de l'équation de quantité de mouvement si $\bar{c}=\bar{u}$ et la forme conservation de l'équation de l'énergie.

2.2-2.7 Dans cette question, sachant que $\bar{r}$ est $O(1)$ et sachant que $\bar{x}$ est $O(X)$ le terme convectif

$$\bar{r}^{-1}(\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\bar{r}\bar{u}\bar{T})+\frac{\partial}{\partial\bar{r}}(\bar{r}\bar{v}\bar{T}))\text{ est à comparer au terme diffusif }\frac{1}{Re}(\frac{1}{Pr}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{T})+\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\bar{T})$$

c'est le problème de l'effet d'entrée de "type Graetz",

$$\text{on a }\bar{r}^{-1}(\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\bar{r}\bar{u}\bar{T})\sim\frac{1}{X}\text{ à comparer à }\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{T})$$

donc $X=Re$ à $Pr=O(1)$.
Dans l'incompressibilité (et dans les termes de dérivée convective))

$$\bar{r}^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}) \text{ est à comparer à } \bar{r}^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\bar{v})$$

le premier est $O(1/X)$ donc la vitesse $\bar{v}$ est $O(1/X)$.
Dans le Laplacien $(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T}) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{T})$ le terme de dérivée seconde en $\bar{x}$ est manifestement en $1/X^2$. On trouve bien la forme proposée.
En intégrant $\int_0^{\bar{r}=1}(\cdot)d\bar{r}$, et comme $\bar{v}=0$ à la paroi et $\bar{r}=0$ au centre, compte tenu que $\bar{r}$ et $\bar{x}$ sont indépendants, l'expression $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\tilde{u}\tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\tilde{v}\tilde{T}) = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\tilde{T})$ devient

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\int_0^1 (\bar{r}\tilde{u}\tilde{T})d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\tilde{T}|_{\bar{r}=1}.$$

La variation du flux convectif $\int_0^1 (\bar{r}\tilde{u}\tilde{T})d\bar{r}$ est égale au flux pariétal $\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\tilde{T}|_{\bar{r}=1}$. Cette relation est fondamentale et indépendante de l'écoulement qu'il soit établi ou non. Pour une paroi adiabatique, le flux convecté est donc constant.

3.X On suppose que la vitesse est tout de suite Poiseuille à l'entrée (en fait il y a une longueur d'entrée pour établir ce Poiseuille, cependant travailler en pression imposée fait que le Poiseuille va s'établir tout de suite). On suppose aussi que l'on n'est pas dans la configuration où tout le collecteur est chauffé transversalement. La température n'a diffusé que sur une couche fine (Lévêque), et le coeur de l'écoulement est à température nulle. On a bien l'équilibre entre gradient de pression et le frottement visqueux. Pour un écoulement de Poiseuille, on a l'invariance en x, et comme il n'y a pas de gradient de pression extérieur imposant l'écoulement, cela permet d'écrire $0+\dfrac{\partial rv}{\partial r}=0,\ \ 0=-\dfrac{\partial p}{\partial x}-\dfrac{\partial}{r\partial r}(\mu r\dfrac{\partial}{\partial r}u)$, avec $-\frac{\partial p}{\partial x}$ qui est le terme moteur constant noté Π. on a donc l'équilibre entre le gradient de pression et les forces visqueuses d'où par intégration : $\Pi=-\dfrac{dp}{dx}$ et $u=\dfrac{1}{4\mu}\Pi(R^2-r^2)$. L'équation précédente s'écrit $u(r)=U_{max}\bar{u}$, avec $\bar{u}=1-\bar{r}^2$ avec $\bar{r}=r/R$ et $U_{max}=\frac{1}{4\mu}\Pi R^2$.
Il est évident que le frottement proportionnel au gradient de pression : $\mu\partial_r u(r=R)=-\Pi R/2$.
On a aussi comme $-\frac{dp}{dx}=-4\mu U_{max}/R^2$ donc :

$$0=4-\frac{\partial}{\bar{r}\partial\bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u})$$

En adimensionnant avec U_{max} on retrouve le problème de Lévêque de la PC2 : vitesse supposée de Poiseuille et température imposée à la paroi. Attention, dans la PC 2, on utilise Re_{max} construit sur la vitesse max. Mais l'énoncé parle de vitesse moyenne or $\int_0^1(1-\bar{r}^2)d\bar{r}=2/3$ et $\int_0^1\bar{r}(1-\bar{r}^2)d\bar{r}=1/4$ et $\int_0^1\bar{r}d\bar{r}=1/2$. La valeur moyenne de la vitesse est donc $U_0=U_{max}/2$ avec Re construit sur U_0, on a $U_{max}R/\nu=2U_0R/\nu$ Donc $Re_{max}=U_{max}R/nu$ est tel que Re_{max} est le double du Reynolds construit sur la vitesse moyenne. Près de la paroi dans une couche d'épaisseur $\varepsilon=(2PrRe_{max})^{-1/3}$ $\bar{r}=1-\varepsilon\tilde{r}$ la vitesse est $\bar{u}\sim 2\varepsilon\tilde{r}$

la température est autosemblable, $\eta=\tilde{r}/\bar{x}^{1/3}$ (attention on fait ce $\bar{x}$ est en fait $\bar{x}+\bar{\ell}$ par origine différente $T=T_0+(T_w-T_0)\theta(\eta)$
$T=T_0+(T_w-T_0)\dfrac{\Gamma(1/3,\frac{(2PrRe_{max})(R-r)^3}{9xR^2})}{\Gamma(1/3)}$ Le flux adimensionné (par $\rho c_p R^2 U_0(T_w-T_0)$) est $\int_0^1\bar{u}\bar{T}\bar{r}d\bar{r}$, donc ($\bar{r}\sim 1$ en $\tilde{r}$ petit)

$$\int_0^1\bar{u}\bar{T}\bar{r}d\bar{r}\sim\varepsilon^2\int_0^\infty 2\tilde{r}\tilde{T}d\tilde{r}=2\bar{x}^{2/3}\varepsilon^2\int_0^\infty\eta\theta d\eta$$

il augmente au fur et à mesure que l'on avance, la valeur finale $\{\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{1}{3})}\}(2\bar{\ell}^{2/3}\varepsilon^2)$ cette valeur doit rester petite car $\bar{\ell} \ll Re^{-1}$ (pas encore de régime établi, le changement de température reste confiné près de la paroi dans une couche d'épaisseur $\varepsilon \sim Re^{-1/3}$, le coeur est encore à température nulle), donc $(\bar{\ell}^{2/3}\varepsilon^2) \ll 1$

On en déduit la valeur du flux convecté qui va se conserver dans la cheminée. Si on est dans la cheminée, la température est chaude près des parois sur cette couche ε puis elle s'égalise en $\bar{x}$ (comme dans Graetz). Mais la moyenne de la température va se conserver par l'expression du flux de la question 2.X. La température est $T = T_0 + (T_w - T_0)\bar{T}$ elle vaut au final $\bar{T}_m$, donc $\int_0^1 \bar{u}\bar{T}\bar{r}d\bar{r} = \bar{T}_m \int_0^1(1-\bar{r}^2)d\bar{r} = 2/3\bar{T}_m$ dans la cheminée la température moyenne est donc $\bar{T}_m = (3/2)\{\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(\frac{1}{3})}\}(2\bar{\ell}^{2/3}\varepsilon^2)$. Cette élévation de température est faible car $(\bar{\ell}^{2/3}\varepsilon^2) \ll 1$

4.X Dans la cheminée, la température, après un éventuel effet d'entrée "à la Graetz", est donc constante, elle vaut $T_m = T_0 + (T_w - T_0)\bar{T}_m$ la force de Boussinesq est donc $\rho g\alpha(T_m - T_0) = \rho g\alpha(T_w - T_0)\bar{T}_m$

$$u = u(r), \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\alpha(T_m - T_0) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \quad 0 = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}T)$$

s'écrit en fait en prenant $(\delta p) = (\rho U_0^2)/Re$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{1}{Re} + Ri\bar{T}_m + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u}),$$

mais attention le gradient de pression est tel que la pression est partie de 0 pour diminuer jusqu'à ℓ, le gradient de pression en $x > 0$ est donc $-\ell/L_c$ fois le précédent (qui était, compte tenu des échelles -4), il est positif car la pression remonte.

$$0 = -4\ell/L_c\frac{1}{Re} + Ri\bar{T}_m + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u}),$$

par moindre dégénérescence, mais aussi en expriment que la vitesse ressent un gradient de pression qui doit mener dans la cheminée à la même valeur que dans le collecteur, donc $4\ell/L_c\frac{1}{Re} - Ri\bar{T}_m$ qui doit être égal à celui du collecteur -4, donc on en déduit

$$\frac{3}{8}\{\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\}(2(\ell/R)^{2/3}(4Pr)^{-2/3})RiRe^{1/3} = 1 + \ell/L_c$$

ou encore $Ri = \frac{1}{0.24Pr^{-2/3}}(1+\ell/L_c)Re^{-1/3}(\ell/R)^{-2/3}$, et comme $(\ell/R) \ll Re$, on a donc

$$Ri = \frac{1}{0.24Pr^{-2/3}}(1+\ell/L_c)Re^{-1/3}(\ell/R)^{-2/3}$$

on a donc ici la "vraie valeur" de Richardson, à première vue on aurait pensé $Ri = 1/Re$ (*c.f.* la remarque de la fin de la question 1.) Comme on peut faire apparaître un Grashof,$(\frac{g\alpha\Delta TR^3}{\nu^2})$ en effet

$$RiRe^{1/3} = (\frac{g\alpha\Delta TR^3}{\nu^2})^3(\frac{\nu}{U_0R})^5 = G^3/Re^5$$

ce qui donne la prédiction

$$U_0 = 0.42Pr^{-2/5}\frac{(\ell/R)^{2/5}}{(1+\ell/L_c)^{3/5}}\frac{\nu}{R}Gr^{3/5}$$

6.X Si on revient dans le collecteur, l'équation de quantité de mouvement est telle que

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u} = -\frac{1}{Re}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + Ri\bar{T} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\bar{u}) + \frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}\bar{u}))$$

En conclusion :
$Ri = g\alpha(T_0 - T_w)/(\rho_0 U_0^2)$ $Re = U_0 R/\nu$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{u} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\bar{v}) = 0$$

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u} = -\frac{1}{Re}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + Ri\bar{T} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u}) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{u}))$$

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T} = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T}) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{T})$$

Collecteur $\bar{T} = 0$ sauf aux parois, et assez loin de l'entrée :

$$\bar{v} = 0$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u})$$

près des parois

$$\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T})$$

cette température va modifier la vitesse, on néglige.

La température s'égalise dans la cheminée $\bar{T}_m$ valeur moyenne

$$0 = -\frac{1}{Re}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + Ri\bar{T}_m + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u})$$

on peut décomposer en $\bar{u} = \bar{u}_0 + Ri\bar{u}_1$ et $\bar{T} = 0 + Ri\bar{T}_1$ et décomposer :

$$\bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{T}_1 = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} (\frac{\partial}{\bar{r}\partial r} (\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{T}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \bar{T}_1)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u}_1 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}\bar{v}_1) = 0$$

$$\bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u}_1 + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{u}_0 = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{T}_1 + \frac{1}{Re} (\frac{\partial}{\bar{r}\partial r} (\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{u}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \bar{u}_1))$$

le problème en $\bar{p}_1$ nous donne la correction de pression due à la température. Remarquons que $\bar{u}_1$ doit être nul assez loin de 0, il faut que $L_c \geq O(R/Re)$ (Graetz) vers la fin du tube, on a donc

$$0 = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{T}_1$$

donc comme $\bar{T}_1$ y est devenu constant, c'est $\bar{T}_m$

$$\bar{p}_1 \simeq (\bar{x} - \bar{L}_c) \bar{T}_m Re$$

en fait $\bar{p}_1$ est presque linéaire pour $\bar{x} > 0$ et $\bar{p}_1$ est quasi constant entre $-\bar{\ell}$ et 0.

la pression est

$$\bar{p}(\bar{x}) = -\Pi(\bar{x} + \bar{\ell}) + Ri(\bar{p}_1 - \bar{p}_1(-\bar{\ell}))$$

donc, on déduit par le calcul

$$Ri = \frac{\Pi(\bar{L}_c + \bar{\ell}))}{\bar{p}_1(-\bar{\ell})}$$

cette relation est à peu près la précédente, puisque $\bar{p}_1(-\bar{\ell}) \simeq \bar{p}_1(0)$ et $\bar{p}_1(0) \simeq \bar{L}_c \bar{T}_m Re$, donc $\frac{\Pi(1+\bar{\ell}/\bar{L}_c)}{\bar{T}_m Re}$ or $\bar{T}_m = O(Re^{-2/3})$ donc

$$Ri \simeq \frac{\Pi(1 + \bar{\ell}/\bar{L}_c)}{Re^{1/3}}$$

Comme on peut faire apparaître un Grashof,$(\frac{g\alpha\Delta T R^3}{\nu^2})$ en effet

$$Ri = (\frac{g\alpha\Delta T R}{U_0^2}) = (\frac{g\alpha\Delta T R^3}{\nu^2})(\frac{\nu}{U_0 R})^2 = G/Re^2$$

ce qui donne la prédiction

$$U_0 = \sqrt{Ri} \frac{\nu}{R} Gr^{1/2}$$

l'analyse précédente nous dit que :

$$\sqrt{Ri} \sim 0.42 Pr^{-2/5} \frac{(\ell/R)^{2/5}}{(1 + \ell/L_c)^{3/5}} \frac{\nu}{R} Gr^{1/10}$$

pour avoir l'écoulement établi ; il faut que $L_c/R = O(Re) = \sqrt{G/Ri}$