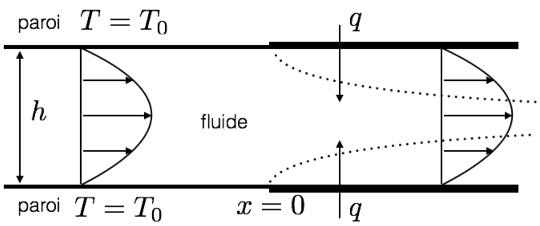
Jeudi 25 Janvier 2018

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204 *durée 2h30 heures, tout document personnel autorisé*

Transfert à flux imposé entre deux plans.

Nous considérons l'écoulement stationnaire (suivant x) entre deux plans parallèles (en $y = 0$ et en $y = h$, invariance en z) forcé par un gradient de pression imposé entre une entrée très en amont et une sortie très en aval, de sorte qu'en première approximation les plans sont infinis. On considère un changement pour la température avec passage d'une température imposée constante (en $x < 0$, $T(x < 0, y = 0) = T_0$ et $T(x < 0, y = h) = T_0$ à un flux constant (en $x > 0$, aux deux parois, une densité de flux q imposée). L'écoulement est bidimensionnel, plan, laminaire et stationnaire. Le fluide est incompressible. La viscosité est faible, le nombre de Prandtl est d'ordre unité. On néglige toute influence de la gravité.
Les questions sont assez indépendantes (on peut faire 5. directement après 3.4) .



• Equations dynamiques

1.1 Ecrire les équations de Navier Stokes sans dimension avec les conditions aux limites, on utilisera h en espace et une vitesse caractéristique U_0, on notera $p = p_e + (P_0)\bar{p}$.
1.2 Compte tenu des invariances de la vitesse $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ et de l'incompressibilité, montrez que $\bar{w} = 0$, que $\bar{v} = 0$ et que $\bar{u}$ est fonction de $\bar{y}$ uniquement.
1.3 En écrivant les équations de conservation de quantité de mouvement (et les résultats de 1.2) trouvez que l'échelle de P_0 s'écrit avec μ, h et U_0.
1.4 Montrez que $\bar{p}$ ne dépend pas de $\bar{y}$.
1.5 En déduire que la vitesse sans dimension est proportionnelle à $\bar{y}(1 - \bar{y})$ et déterminez le gradient de pression.
1.6 Nom de cet écoulement ?

• Equation de la chaleur, échelles

2.1 Ecrire l'équation de la chaleur avec dimensions (avec ses conditions aux limites et avec un champ de vitesse général).
2.2 Ecrire l'équation de la chaleur sans dimension (on pose $T = T_0 + (\Delta T)\bar{T}$ et la vitesse est générale mais de vitesse caractéristique U_0).
2.3 On néglige le terme d'élévation de température par la dissipation visqueuse en volume (due au cisaillement) dans l'équation de la chaleur. Quel est le nombre sans dimension associé ?
2.4 Dans toute la suite ce terme est négligé, montrer que la température constante est solution entre les deux plaques (très en amont de $x = 0$), valeur de $\bar{T}$?
2.5 On n'a pas encore exprimé les conditions aux limites en $\bar{y} = 0$ et $\bar{y} = 1$ pour $x > 0$, choisir une échelle (ΔT) construite avec q de manière à ce que $\partial\bar{T}/\partial\bar{y} = -1$ en $\bar{y} = 0$ et $\bar{x} > 0$ (et on remarquera que $\partial\bar{T}/\partial\bar{y} = 1$ en $\bar{y} = 1$ et $\bar{x} > 0$).
2.6 Ecrire l'équation de la chaleur compte tenu du champ de vitesse $u = U_0\bar{u}(\bar{y})$ des questions 1.
2.7 On rappelle que l'on néglige tout effet de gravité, de quel type de transfert s'agit il ? Quel terme faudrait il réintroduire s'il y avait une influence de la gravité ?

• Equation de la chaleur, simplification pour $\bar{x} = O(1)$ et $\bar{y}$ petit
On a une équation du type

$$\bar{y}(1-\bar{y})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = K(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$$

3.1 identifiez K avec les paramètres pertinents de ce problème.
3.2 Compte tenu de l'hypothèse de faible viscosité et que $Pr = O(1)$, K est il grand ou petit ?
3.2bis Valeur de Pr pour l'eau et l'air.
3.3 Si K est tellement petit que l'on met $K = 0$ dans l'équation, quelle est la solution pour $\bar{T}$?
3.4 En déduire qu'il faut introduire une couche limite thermique le long de $\bar{x}$, d'épaisseur ε à déterminer ensuite.
3.5 Posez $\bar{y} = \varepsilon\tilde{y}$, montrez que la vitesse est linéaire près de la paroi du bas.
3.6 Posez $\bar{y} = 1 - \varepsilon\tilde{y}$, montrez que la vitesse est linéaire près de la paroi du haut.
3.7 Comme on a $\bar{x} = O(1)$ et $\bar{y} = \varepsilon\tilde{y}$, ou $\bar{y} = 1 - \varepsilon\tilde{y}$ quel est le terme dominant de $(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$ dans ces deux cas ?
3.8 Dans la suite on a bien compris la symétrie haut/bas. On se concentre sur le bas : $\bar{y} = \varepsilon\tilde{y}$.
En déduire la valeur de ε.
3.9 De la condition de flux à la paroi trouvez l'ordre de grandeur d'élévation de température en bas.
• Equation de la chaleur, résolution de la couche limite thermique pour $\bar{x} = O(1)$ et $\bar{y}$ petit On a une équation du type

$$\tilde{y}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

4.1 Quelles sont les conditions en $\tilde{y} = 0$ et $\tilde{y} = \infty$?
4.2 Montrez que la température admet une solution auto semblable de la forme $\tilde{T} = \bar{x}^{1/3}\theta(y/x^{1/3})$.
4.3 Equation différentielle de $\theta(\eta)$? On ne demande pas de résoudre.
4.4 Tracez la forme possible de $\theta(\eta)$, la valeur de θ en $\eta = 0$ est un résultat du calcul, $\theta(0) = 1.54$.
4.5 Définir le nombre de Nusselt.
• Equation de la chaleur, simplification au loin pour $\bar{x}$ grand et $\bar{y} = O(1)$
Dans 2. on a vu que : $\bar{y}(1-\bar{y})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = K(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2})$
5.1 On se place en $\bar{x}$ très grand, les deux couches limites sont fusionnées, la température varie sur tout $\bar{y}$. Trouvez l'échelle $\lambda >> 1$ telle que $\bar{x} = \lambda\hat{x}$ telle que l'équation de la chaleur devienne :

$$\bar{y}(1-\bar{y})\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \bar{y}^2}.$$

5.2 En faisant une moyenne sur l'épaisseur, montrez que $\int_0^1 \bar{y}(1-\bar{y})\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} d\bar{y} = 2$.
5.3 Dans ces variables, montrez que la température peut s'écrire $\hat{T}(\hat{x}, \bar{y}) = \hat{T}_p(\hat{x}) + \Theta(\bar{y})$.
5.4 Montrez que $\hat{T}_p(\hat{x})$ est linéaire en $\bar{x}$ et calculez $\Theta(\bar{y})$. Tracez $\Theta(\bar{y})$.
5.5 Définir le nombre de Nusselt.
• Conclusion
6.1 constatez que l'élévation de température liée à la couche limite $\bar{x} = O(1)$ et $\tilde{y} = O(1)$ est supérieure à l'élévation de température lors que l'on est loin de l'entrée $\hat{x} = O(1)$, $\bar{y} = O(1)$, en déduire le comportement général de Nu pour cette configuration.
6.2 Dans le cas où c'est la température qui est imposée (et dans le cas axi), comment s'appellent les deux problèmes considérés (en 4. et 5.) et quel est l'ordre de grandeur du Nusselt dans les deux configurations pour un tuyau.

Correction

La partie NS est évidente. On trouve un écoulement de Poiseuille, il est judicieux de poser $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = -1$.

$$\bar{u} = \bar{y}(1-\bar{y})/2$$

attention à la définition du flux en haut et bas : signe en bas la normale extérieure est $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e}_y$, on chauffe donc $\overrightarrow{q}_b = -q\overrightarrow{n}$

$$q\overrightarrow{e}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}\overrightarrow{e}_y$$

en haut $\overrightarrow{q}_h = -q\overrightarrow{n}$ donc

$$-q\overrightarrow{e}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}\overrightarrow{e}_y$$

dans les deux cas on a bien

$$q/k = \frac{\partial T}{\partial y}$$

On pose $T = T_0 + hq/k\bar{T}$ en haut et en bas on a :

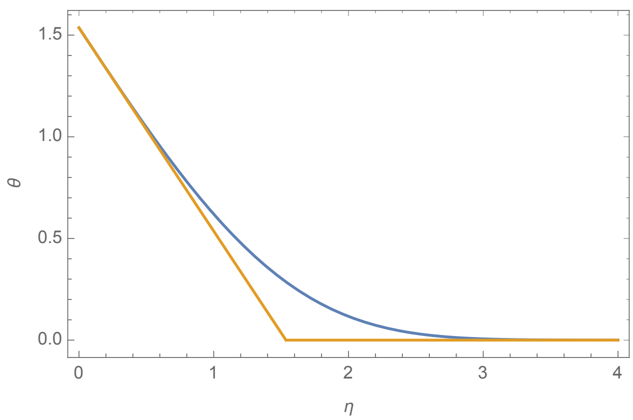
$$1 = \frac{\partial T}{\partial y}$$

2.6 : Convection Forcée (pas convection Naturelle avec $g(1-\alpha\Delta T\bar{T})$

- **équation de la chaleur, problème de Lévêque à flux constant**

3.3) $\bar{T} = 0$
3.9) On pose $T = T_0 + \varepsilon hq/k\tilde{T}$
$\eta\theta(\eta) - \eta^2\theta'(\eta) - 3\theta''(\eta) = 0$
$\theta'(0) = -1$
$\theta(\infty) = 0$
$\theta(\eta) = (3^{(2/3)}e^{-(\eta^3/9)} - x\Gamma(2/3, x^3/9))/\Gamma(2/3)$
valeur en 0 : $\theta(0) = (3^{2/3}/\Gamma(2/3)) = 1.53612$
$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$
$\Gamma(a,z) = \int_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$

$$\tilde{T} = \tilde{x}^{1/3}\theta(\tilde{y}/\tilde{x}^{1/3})$$



- **équation de la chaleur, problème de Graetz à flux constant**

$\int_0^1 \bar{y}(1-\bar{y})d\bar{y} = [y^2/2 - y^3/3]_0^1 = 1/6$ donc $d\hat{T}_p(\hat{x})/d\hat{x} = 12$
$\hat{T}(\hat{x},\bar{y}) = 12(\hat{x}) + \Theta(\bar{y})$.

$$\frac{d\Theta}{d\bar{y}} = 12y^2/2 - 12y^3/3 - 1$$

$$\Theta = 2y^3 - y^4 - y$$

on remarque que comme Θ est négatif, cette expression est sûrement fausse pour le petits $(\hat{x})$, d'où l'étude précédente.

Si on définit Nusselt :

$$\frac{-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{y}}|_0}{\tilde{T}(\hat{x},1/2) - \tilde{T}(\hat{x},0)}$$

donc

$$Nu = -1/(5/16) = 3.2$$