

PREMIERE PARTIE Solutions Homogènes en Mécanique des Fluides

Introduction

Les phénomènes étudiés en physique classique conduisent bien souvent à des systèmes d'équations aux dérivées partielles fort complexes dont il est presque toujours impossible de trouver la solution analytique générale explicite. Bien souvent même, la solution répondant à des conditions initiales et à des conditions aux frontières prescrites est fort difficile, sinon impossible de portée dans l'état actuel de l'analyse. Mais il arrive fréquemment qu'il soit possible d'étudier certaines solutions particulières. Ceci se produit en particulier lorsque l'ensemble des solutions du système envisagé reste invariant par certains groupes de transformations.

Alors, si on se limite aux solutions qui jouissent de certaines propriétés d'invariance vis à vis d'un sous-groupe de ce groupe, on définit ainsi une classe de solutions qui vérifient un système portant sur des fonctions dépendant d'un nombre plus petit de variables indépendantes.

Particulièrement remarquable est le groupe des transformations dites d'échelles ou semblables lié aux changements d'échelles des grandeurs intervenant dans le phénomène physique considéré. Les solutions que l'on obtient dans ce cas sont appelées *homogènes* ou *semblables* (en anglais *self-similar*). On trouve dans la littérature de multiples exemples de solutions homogènes; mais c'est sans doute en mécanique des fluides qu'on a découvert la plus grande variété de telles solutions, qu'on les a étudiées le plus complètement, et que l'on a particulièrement élaboré les méthodes qui permettent de les obtenir et les enseignements qu'elles fournissent.

La première partie de ce cours se propose, sur des exemples qu'on essaiera de varier, de donner un aperçu sur cette question. Il n'est évidemment pas question d'être complet, la littérature comportant certainement des centaines de références. On espère toutefois donner une idée de l'intérêt et de l'importance du sujet.

Sans être exhaustif dégageons dès cette introduction quelques conclusions générales de l'étude des solutions homogènes qui seront illustrées et précisées dans les chapitres qui suivent.

1) Elles fournissent parfois la solution exacte de problèmes, particuliers certes, mais intéressants en eux-mêmes.

2) Elles mettent en évidence des propriétés qualitatives essentielles p l'intelligence des phénomènes considérés.

3) Bien souvent elles donnent les termes intervenant dans les développements asymptotiques des solutions de problèmes pour lesquels il est impossible de trouver une solution complète.

On pourrait penser à juste titre que les moyens de calcul dont on dispose actuellement et qui permettent d'obtenir numériquement les solutions cherchées diminuent l'intérêt de ces solutions homogènes; et certes dans le passé elles constituaient bien souvent la seule source d'information dont on disposait. Mais les conclusions dégagées plus haut sont par elles-mêmes rassurantes. Les informations qu'on en tire sont plutôt de nature complémentaire de celles obtenues par calcul numérique de solutions particulières et d'ailleurs, dans de nombreux cas, l'étude préalable des solutions homogènes constitue un auxiliaire précieux et parfois indispensable pour celui qui doit bâtir un programme efficace et réaliste.

La théorie des solutions homogènes présente bien évidemment des liens étroits avec celle de l'analyse dimensionnelle. Il serait intéressant de dégager de façon très approfondie. Nous formulerons seulement quelques remarques à ce sujet. Disons simplement ici que la méthode des solutions homogènes complète et précise la méthode de l'analyse dimensionnelle. Comme elle, mais allant nettement plus avant, elle est particulièrement utile lorsqu'on doit étudier un phénomène physique d'une assez grande complexité.

Les exemples que nous avons retenus seront abordés au cours de deux chapitres. Dans le premier seront traités des problèmes de diffusion; dans le second des problèmes d'écoulement de fluide parfait. En fait, obligés de nous limiter, nous avons choisi, dans le second chapitre, de ne traiter absolument pas complètement que le cas des écoulements stationnaires transsoniques qui est l'un des plus intéressants par la variété des questions qu'il soulève. On aurait été aussi fort souhaitable de pouvoir évoquer les écoulements non stationnaires dépendant d'une variable d'espace. Nous ne pourrions que renvoyer à la littérature très abondante consacrée à ce sujet.

Le classement n'est pas significatif en ce qui concerne la théorie des solutions homogènes, il repose plutôt sur les caractères des problèmes physiques considérés et par suite sur le type d'informations que l'on peut retirer, selon les cas, de l'étude des écoulements homogènes. Mais insistons pour terminer sur le but essentiel que nous nous proposons: dégager sur les quelques exemples retenus les méthodes générales d'étude, les propriétés générales et les problèmes généraux qui se présentent normalement dans la recherche et la mise en oeuvre des solutions homogènes en physique mathématique.

I Phénomènes de Diffusion

Nous considérerons ici des situations physiques très simples impliquant une dissipation d'énergie et par suite une diffusion. En mécanique des fluides les deux propriétés principales conduisant à ces phénomènes sont la viscosité et la conductibilité thermique. Par raison de simplicité nous ne les ferons pas intervenir simultanément dans les exemples traités complètement. Nous envisagerons d'abord quelques écoulements très classiques et très simples des fluides visqueux incompressibles, puis des problèmes "d'ondes thermiques"; enfin, vu leur importance en mécanique des fluides, nous donnerons quelques indications rapides sur les solutions homogènes de la théorie de la couche limite.

1 Ecoulements Rectilignes Non Stationnaires

1.1 Généralités

On s'intéresse à un fluide incompressible (masse volumique ρ constante) et de viscosité constante μ . De façon générale le champ des vitesses—composantes $U_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(\mathbf{x}, t)$ dans un repère orthonormé où les coordonnées sont désignées par x_1, x_2, x_3 —et la pression— $p(x_1, x_2, x_3, t) = p(\mathbf{x}, t)$ —doivent vérifier dans tout domaine fluide le système des équations de Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) + p_i = f_i + \mu \Delta U_i, \tag{1}$$

$$U_{i,i} = 0,$$

où f_i désigne les forces extérieures volumiques, qui d'ailleurs seront prises nulles. Les trois premières équations (1) traduisent la conservation de la quantité de mouvement ($i = 1, 2, 3$), la dernière la conservation de la masse. On fait usage de la convention de sommation sur les indices répétés et la notation $U_{i,j}$ désigne $\partial U_i / \partial x_j$. Sur un obstacle, on doit écrire la condition d'adhérence

$$V_i = 0 \tag{2}$$

où $V_i = U_i - W_i$ désigne la vitesse relative du fluide par rapport à l'obstacle (où W_i désigne la vitesse d'un point lié à l'obstacle). Sur une surface de contact, la vitesse relative V_i doit être continue ainsi que le vecteur contrainte T_i pour la direction \mathbf{n} normale à la surface. Rappelons que

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{4}$$

$$\tau_{ij} = \mu(U_{i,j} + U_{j,i}),$$

formules dans lesquelles σ_{ij} désigne le tenseur des contraintes, τ_{ij} les contraintes visqueuses, seules responsables du frottement tangentiel. Si le fluide est parfait, $\mu = 0$ dans (1), et dans les conditions aux frontières il suffit d'écrire que seule la composante normale de V_i est nulle sur un obstacle ou continue à travers une surface de contact, les conditions d'adhérence étant ainsi remplacées par des conditions de glissement. Du point de vue mathématique ceci est lié au fait que lorsqu'on fait $\mu = 0$, on abaisse l'ordre du système (1); du point de vue physique ceci tient à ce que dans le cas d'un fluide parfait aucune action d'entraînement ou de freinage n'existe entre deux filets fluides voisins.

1.1.2 Ecoulements rectilignes homogènes

Nous ne nous intéressons, d'abord, qu'à des écoulements rectilignes invariants dans toute translation parallèle à l'axe des x_2 , dont les trajectoires sont parallèles à l'axe des x_1 et dans lesquelles la pression est constante. Ainsi $U_2 = U_3 = 0$, $p = p_0$. D'après (1), $U_1 = u$ ne peut dépendre de x_2 . Donc la seule fonction inconnue est $u(x, t)$ —si on pose $x_3 = x$ —et celle-ci vérifie l'équation de la propagation de la chaleur par tranches planes

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide. † Telle est la première équation pour laquelle nous allons chercher les solutions homogènes.

Le théorème suivant se vérifie par un simple calcul.:

Si $u(x, t)$ est une solution de (6), alors $bu(ax, a^2t)$ est une solution de (6) quel que soient les constantes a, b .

Il existe donc, de façon évidente, un groupe continu dépendant de deux paramètres transformant une solution de (6) en une autre solution de (6). Nous porterons tout d'abord notre attention sur le sous-groupe obtenu pour $b = 1$ et chercherons les solutions particulières de (6) \hat{u} invariantes par ce sous-groupe, c'est-à-dire telles que

$$\hat{u}(ax, a^2t) = \hat{u}(x, t)$$

quelle que soit la constante a . Nous limitant aux instants $t > 0$, on voit que la fonction $v(x, \bar{t})$ définie par

$$\hat{u}(x, t) = v(x, \bar{t}), \quad \bar{t} = \sqrt{t}$$

† La viscosité cinématique de l'air et de l'eau dans les conditions normales est égale à 0,15 et 0,01 cm²/sec respectivement. Celle de la glycérine est de 6,8 cm²/sec; celle du mercure 12,10 cm²/sec.

une fonction homogène de degré zéro de x et de \sqrt{t} . Par suite, s'il existe de telles solutions, elles sont nécessairement de la forme

$$\hat{u}(x, t) = f(\theta), \quad (7)$$

$$\theta = \frac{x}{\sqrt{4\nu t}} \quad (8)$$

Pour que (7) soit solution de (6) il faut et suffit que $f(\theta)$ soit solution de l'équation différentielle

$$f'' + 2\theta f' = 0, \quad (9)$$

comme on le voit en reportant (7) dans (6). L'intégration de (9) est immédiate et donne:

$$f(\theta) = A + B \int_0^\theta \exp(-s^2) ds \quad (10)$$

A et B sont deux constantes arbitraires. Les solutions définies par (7) et (10) sont des solutions homogènes particulières de l'équation de la chaleur (6).

Plus généralement un sous-groupe à un paramètre s'obtient en posant $\theta = a^n$. Les solutions invariantes pour ce sous-groupe sont de la forme:

$$\hat{u}(x, t) = t^{-n/2} f_n(\theta) \quad (11)$$

et on obtient bien ainsi des solutions de (6) si $f_n(\theta)$ est une solution de l'équation différentielle

$$L_n(f) = f'' + 2\theta f'_n + 2nf'_n = 0, \quad (12)$$

équation qu'il est d'ailleurs possible d'intégrer par quadratures.

1.3 Exemples

a) *Problème de Rayleigh* Il s'agit de la mise en mouvement d'une masse fluide occupant le demi-espace $x_3 > 0$, en contact avec le plan rigide $x_3 = 0$. A l'instant initial le fluide et le plan sont au repos. Aux instants $t > 0$ le plan est animé d'un mouvement uniforme de translation de vitesse donnée constante V . Il faut satisfaire les conditions

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = V; \quad t > 0; \quad (13)$$

la deuxième condition traduisant l'adhérence à la paroi. Une des solutions obtenues en (7) et (10) répond à la question

$$u(x, t) = V(1 - 2/\sqrt{\pi} \int_0^\theta \exp(-s^2) ds). \quad (14)$$

L'évolution du profil des vitesses est donnée par la figure 1. La vitesse pour t et v fixés est une fonction décroissante de x , pour x et v fixés est une fonction croissante de t .

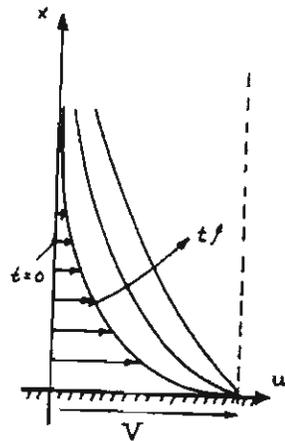


Figure 1 Mise en mouvement d'un fluide

On met ainsi en évidence le caractère paradoxal de cette diffusion de la vitesse qui fait que, même à un temps $t = \epsilon$, $\epsilon > 0$, petit, la vitesse d'un point situé à une grande distance fixée de la plaque est non nulle—mais décroît exponentiellement faible. Il n'y a donc pas d'onde visqueuse (ni d'onde thermique de conduction). Par contre, soit k un nombre arbitraire compris entre 0 et 1 et K la valeur de θ telle que $Vk = f(K)$; le plan en lequel on se trouve constamment $u = kV$ se déplace d'un mouvement donné par

$$x = 2K\sqrt{vt};$$

en particulier si v est petit et si t est borné, $0 < t < T$, la condition $u < kV$ est vérifiée en dehors de la couche, dite "limite", d'épaisseur $\delta = 2K\sqrt{vt}$. Cette couche est d'autant plus étroite que v est petit, et ceci quel que soit $k \neq 0$. On peut encore souligner que si V est fixé, le fluide restera au repos s'il était parfait. S'il est très faiblement visqueux, la vitesse potentielle reste exponentiellement petite à l'extérieur d'une couche d'épaisseur $O(\sqrt{vt})$. Si on fait tendre v vers zéro, la convergence de la solution visqueuse vers la solution du fluide parfait est uniforme dans tout le domaine. Elle converge simplement pour tout x fixé, mais non uniformément, la limite étant discontinue (égale à 0 pour $x > 0$ et à V pour $x = 0$).

Ainsi se trouve mis en évidence sur cet exemple simple les premières

propriétés de la couche limite sur lesquelles nous reviendrons plus longuement dans la seconde partie de ce cours.

Notons encore simplement que si le plan est animé de la vitesse $V = At^p$, ($p > 0$, $p > 0$), on peut encore représenter l'écoulement par une solution homogène de la forme (11)

$$u(x, t) = At^p f_{-2p}(\theta) \quad (15)$$

la fonction f_{-2p} étant la solution de $L_{-2p}(f) = 0$ —voir (12)—nulle pour θ infini et égale à 1 pour $\theta = 0$.

b) Freinage d'un écoulement uniforme par arrêt d'une plaque La solution homogène

$$u = \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta \exp(-s^2) ds$$

écrit le même mouvement que celui étudié plus haut dans un repère lié à la plaque, $t > 0$. Elle correspond à la situation physique suivante: pour $t < 0$ la plaque et le fluide sont animés d'un mouvement de translation uniforme et aux instant $t > 0$ la plaque est stoppée.

Si v est petit, le mouvement reste pratiquement uniforme et de vitesse V en dehors d'une couche $O(\sqrt{vx/V})$, où $x = Vt$ représente la distance parcourue par le fluide loin de la plaque depuis l'instant où elle a été stoppée. La force de frottement tangentiel le long de la plaque par unité de surface (voir (5)), soit τ est

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\mu V}{\sqrt{\pi vt}} = \frac{\rho V^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{v}{Vx}}$$

et le coefficient de frottement C_f vaut:

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho V^2} = c \sqrt{\frac{v}{Vx}} \quad \text{avec} \quad c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \quad (16)$$

On peut penser que cet écoulement peut servir de modèle qualitatif à celui de l'écoulement stationnaire autour d'une plaque plane semi-infinie (fig. 2). Ce modèle serait valable si les particules animées d'un mouvement uniforme ne prenaient connaissance de l'existence de la plaque qu'en passant au droit du bord d'attaque $x = 0$ —ce n'est évidemment pas ainsi que les choses se passent. Mais si x est assez grand on peut penser que ce modèle est qualitativement exact. Nous verrons en effet que l'épaisseur de la couche limite, en dehors de laquelle l'écoulement est pratiquement uniforme, est bien de l'ordre de $\sqrt{vx/V}$ —la couche limite est parabolique—et que C_f est de la forme (16), mais avec une valeur différente du coefficient $c - c = 0,664$.

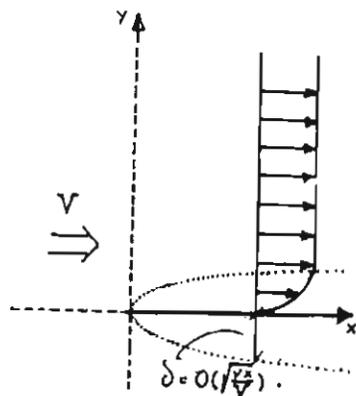


Figure 2 Freinage par une plaque plane

c) *Diffusion d'une surface de contact* Nous considérons deux fluides, premier—masse volumique ρ , viscosité μ —occupant la région $x > 0$, second—masse volumique ρ' , viscosité μ' —occupant la région $x < 0$. L'instant initial ces deux fluides sont animés de mouvements de translation uniforme de vitesses respectives V et V' . On peut chercher le mouvement ultérieur à l'aide de solutions homogènes de type (10).

$$x > 0, \quad u = A + B \int_0^\theta \exp(-s^2) ds, \quad \theta = \frac{x}{\sqrt{4\nu t}}, \quad v = \frac{\mu}{\rho},$$

$$x < 0, \quad u = A' + B' \int_0^\theta \exp(-s^2) ds, \quad \theta = \frac{x}{\sqrt{4\nu' t}}, \quad v' = \frac{\mu'}{\rho'}.$$

Les conditions initiales montrent que:

$$V = A + \frac{\sqrt{\pi}}{2} B, \quad V' = A' - B' \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Les conditions d'adhérence imposent pour $t > 0$, $x = 0$, la continuité de la vitesse et de la contrainte tangentielle, c'est-à-dire

$$A = A', \quad \sqrt{\mu\rho} B = \sqrt{\mu'\rho'} B'.$$

Les constantes A, A', B, B' s'obtiennent avec (18) et (19)

$$A = A' = \frac{V\sqrt{\mu\rho} + V'\sqrt{\mu'\rho'}}{\sqrt{\mu\rho} + \sqrt{\mu'\rho'}}$$

$$B = \frac{2(V - V')\sqrt{\mu'\rho'}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\mu\rho} + \sqrt{\mu'\rho'})}, \quad B' = \frac{2(V - V')\sqrt{\mu\rho}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\mu\rho} + \sqrt{\mu'\rho'})}.$$

Cette solution appelle les remarques suivantes (figure 3).

—Aux temps très grands, l'écoulement est pratiquement uniforme dans tout domaine borné; si les fluides sont identiques, l'écoulement final a pour vitesse $(V + V')/2$.

—Si μ étant fixe, on fait tendre μ' vers zéro, alors $A = A'$ tend vers V , B tend vers zéro, B' vers $(2/\sqrt{\pi})(V - V')$. A la limite, les écoulements initiaux persistent pratiquement sans interaction. Ceci montre que sur une surface de contact séparant un fluide visqueux d'un fluide parfait, c'est la condition de glissement qu'il convient d'écrire.

—On pressent bien dans ce problème que quelque chose diffuse. Il est facile de voir qu'il s'agit de la rotation. Celle-ci est portée par l'axe des x_2 , $\omega = \omega e_2$ et est égale à:

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (21)$$

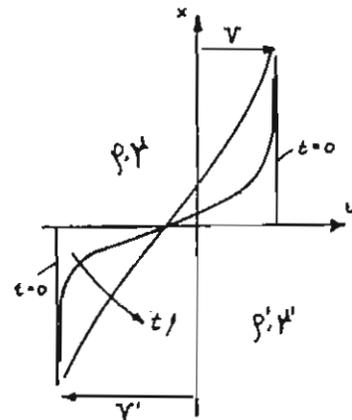


Figure 3 Diffusion d'une surface de contact

Or $\omega(x, t)$ vérifie l'équation $\mathcal{L}(\omega) = 0$; ω est nul pour x très grand, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega dx$$

reste constant quand le temps varie, comme on le voit en intégrant $\mathcal{L}(\omega)$.

On le vérifie d'ailleurs aisément sur la solution trouvée car

$$\omega = \frac{B}{2\sqrt{4\nu t}} \exp(-\theta^2), \quad \text{si } x > 0,$$

$$\omega = \frac{B'}{2\sqrt{4\nu t}} \exp(-\theta^2), \quad \text{si } x < 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (B + B') = \frac{V - V'}{2}.$$

Ainsi à $t = 0$, ω est une mesure de Dirac: $\frac{V - V'}{2} \delta$, placée en $x = 0$.

Une discontinuité de vitesse peut être considérée comme une couche superficielle de rotation. C'est cette rotation qui diffuse dans tout l'espace, selon les formules exprimées par (22) qui représentent chacune, notons le, une solution homogène remarquable de l'équation de la chaleur—voir (11)—qui n'est autre d'ailleurs qu'une solution élémentaire de cette équation. On examinera avec profit la comparaison de la diffusion de ω avec celle de la température dans un milieu à température donnée, par exemple $T = 0$, le plan $x = 0$ à l'instant initial est soumis à une température infinie par absorption instantanée d'une énergie concentrée donnée. (Confer I.2.)

I.1.4 Rôle des solutions homogènes dans les développements asymptotiques.

Nous le mettrons en évidence dans l'étude du problème suivant.

Le fluide occupe tout l'espace. A l'instant initial $t = 0$ le profil des vitesses est donné par $u = u_0(x)$,—Fig. 4—, $u_0(x)$ étant nul en dehors d'un ensemble borné $-a < x < a$. La remarque faite précédemment permet d'écrire immédiatement $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right] dy. \quad (2)$$

Soit à chercher le comportement des vitesses pour t très grand, x arbitraire, mais fixé. En écrivant:

$$\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right] = \exp\left[-\theta^2\right] \exp\left[\frac{\theta y}{(\nu t)^{1/2}} - \frac{y^2}{4\nu t}\right],$$

et en effectuant le développement de la seconde exponentielle on obtient

$$u(x, t) = \frac{\exp(-\theta^2)}{(4\pi\nu t)^{1/2}} \left[\mathcal{U}_0 + \frac{\theta}{(\nu t)^{1/2}} \mathcal{U}_1 + \frac{2\theta^2 - 1}{4\nu t} \mathcal{U}_2 + \dots \right], \quad (2')$$

où les \mathcal{U}_p sont les moments de la distribution initiale de vitesse

$$\mathcal{U}_p = \int_{-\infty}^{+\infty} y^p u_0(y) dy.$$

On constate bien que (24) donne le développement asymptotique pour t grand de la solution cherchée et chaque terme du développement est une solution homogène de la forme $t^{-p/2} f_p(\theta)$ où $p = 1, 2, \dots$. En particulier le premier terme est une solution élémentaire, correspondant à une donnée initiale où tout le débit—qui se conserve quand t varie—serait concentré le long du plan $x = 0$, la vitesse en dehors de ce plan étant nulle. On vérifie dans ce cas, où nulle action extérieure n'est exercée après $t = 0$ et où $u_0(x)$ est nul en dehors d'un domaine borné, que, pour t grand, la vitesse, en raison de la dissipation visqueuse, tend vers zéro.

Remarque—La solution

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\mathcal{U}_0}{[4\pi\nu(t+\tau)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\nu(t+\tau)}\right] \quad (25)$$

correspond au cas où à l'instant $t = -\tau$, tout le débit est concentré le long du plan $x = x_0$. Or d'une façon générale les quantités

$$I_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p u(x, t) dx$$

ont les propriétés suivantes, comme on s'en rend compte en calculant dI_p/dt , en utilisant $\mathcal{L}(u) = 0$ et en intégrant par parties:

$$I_0 = \mathcal{U}_0, \quad I_1 = \mathcal{U}_1, \quad I_2 = \mathcal{U}_2 + 2\nu \mathcal{U}_0 t.$$

Si on calcule I_0 , I_1 et I_2 pour la solution (25), on trouve

$$\tilde{I}_0 = \mathcal{U}_0, \quad \tilde{I}_1 = x_0 \mathcal{U}_0, \quad \tilde{I}_2 = 2\nu \mathcal{U}_0(t + \tau) + x_0^2 \mathcal{U}_0,$$

par construction étant égal à \mathcal{U}_0 .

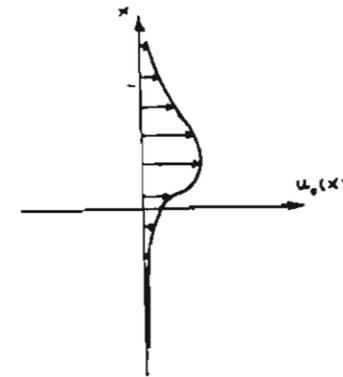


Figure 4 Donnée initiale d'un problème de diffusion

En choisissant x_0 et τ pour que \bar{I}_1 et \bar{I}_2 soient eux aussi égaux à I_1 et I_2 , on aura avec (25) une meilleure expression asymptotique de la solution que le premier terme de (24). Effectivement:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \left[1 + \frac{q(\theta)}{r^{3/2}} + \dots \right].$$

Sur cet exemple nous constatons une première fois l'un des intérêts majeurs des solutions homogènes: elles fournissent le comportement dominant des solutions quelconques pour certaines valeurs remarquables ou singulières des variables (ici pour t infini). Plus généralement, les termes des développements asymptotiques jouissent normalement de propriétés d'homogénéité.

1.1.5 Solutions homogènes et analyse dimensionnelle

Soit à étudier par les méthodes de l'analyse dimensionnelle le problème de Rayleigh généralisé: le fluide, au repos initialement, occupe la région $x > 0$ limitée par le plan rigide $x = 0$. Aux instants $t > 0$, on communique au plan la vitesse At^p . Que peut-on dire de l'écoulement?

On peut essayer de trouver un écoulement rectiligne, la vitesse u n'étant qu'une fonction que de x et de t . Avec cette hypothèse on forme les monomes suivants en dimensions

$$\frac{u}{At^p}, \quad \frac{x}{\sqrt{4\nu t}}, \quad \frac{A^2}{\nu} t^{1+2p}$$

et, par suite, on peut prévoir la possibilité d'une solution de la forme

$$u = At^p f\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}, \frac{A^2}{\nu} t^{1+2p}, p\right).$$

Ce résultat est bien de la forme (15). Mais il est moins complet. Pour retrouver (15) il faudrait savoir que le problème est linéaire et que par suite f doit être proportionnel à A . Alors la variable sans dimension $(A^2/\nu) t^{1+2p}$ ne doit pas figurer parmi les arguments de f . On retrouve bien (15).

On voit ainsi, et on conçoit bien pourquoi, que l'analyse dimensionnelle fournit des résultats moins complets que ceux obtenus en partant du groupe des transformations d'échelles du système des équations. On comprend ainsi le lien intime qui lie ces deux techniques. Cela ne veut pas dire qu'on n'a pas intérêt à tirer parti dans un problème donné des résultats de l'analyse dimensionnelle. Nous aurons l'occasion de constater plusieurs fois le contraire dans la suite.

L2 Ecoulements par Trajectoires Circulaires Coaxiales

Nous cherchons des écoulements pour lesquels les trajectoires sont toutes des cercles d'axe Ox_3 et globalement invariantes à un instant t fixé par tout

placement hélicoïdal autour de l'axe des x_3 . Nous désignons par $q(r, t)$ le module de la vitesse, par $\gamma(r, t) = 2\pi r q$ la circulation à l'instant t le long d'une trajectoire de rayon r . La rotation $\omega = \omega(r, t)e_3$ est telle que, d'après le théorème de Stokes,

$$\gamma(r, t) = 4\pi \int_0^r \omega r dr \quad (27)$$

Il est facile de former directement l'équation vérifiée par $\omega(r, t)$. En effet, s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) + \text{rot } U \wedge U = \nu \Delta U$$

on élimine la pression en prenant le rotationnel

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}(\omega \wedge U) = \nu \Delta \omega.$$

Dans le cas qui nous intéresse, on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0 \quad (28)$$

La connaissance d'une solution de (28) qui est encore l'équation de la chaleur—mais pour une diffusion cylindrique—fournit un écoulement du type étudié, γ étant déterminé par (27) et q par $2\pi r q = \gamma$.

On vérifie encore que si $\omega(r, t)$ est une solution de (28) il en est de même de $\omega(ar, a^2 t)$. Le sous-groupe pouvant laisser des solutions invariantes s'obtiennent en posant $b = a^{2p}$. Les solutions invariantes sont de la forme

$$\bar{\omega} = t^{-p} f_p(z), \quad z = \frac{r^2}{4\nu t}, \quad (29)$$

$f_p(z)$ vérifiant une équation différentielle linéaire. Par exemple pour $p = 0$, on obtient:

$$(zf_0)' + (zf_0) = 0, \quad (30)$$

soit

$$zf_0 = A \exp(-z). \quad (31)$$

Cette solution homogène a pour dérivée par rapport à t :

$$-z \frac{f_0'(z)}{t} = -\frac{A}{t} \exp(-z) \quad (32)$$

qui est elle-même une solution homogène correspondant à $p = 1$.

Soit à étudier la diffusion du tourbillon singulier porté par Ox_3 et de circulation Γ . De façon précise

$$v(r, 0) = \Gamma, r \neq 0.$$

L'analyse dimensionnelle nous apprend que:

$$v(r, t) = \Gamma g(z)$$

si bien que $\omega(r, t)$ est précisément une solution homogène correspondant à $p = 1$; en l'identifiant avec (32) on voit que $g'(z)$ est proportionnel à $\exp(-z)$ et comme $g(\infty) = 1$, on a $g(z) = 1 - \exp(-z)$. Finalement on trouve pour cet écoulement particulier

$$2\pi r q = v = \Gamma[1 - \exp(-z)], \quad \omega = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} \exp(-z).$$

La figure 5 donne l'allure du profil des vitesses. On notera que $q(0, t) = 0$ dès que $t > 0$.

On pourrait sur cet exemple faire les mêmes remarques que plus haut: la diffusion s'effectue suivant la loi $r = O(\sqrt{\nu t})$; elle est très petite si ν est petite et est identiquement nulle si le fluide est parfait. De plus si, à l'instant initial $t = 0$, on donnait la distribution des rotations $\omega_0(r)$, on pourrait former $\omega(r, t)$ et obtenir pour son développement asymptotique des résultats analogues à ceux signalés en I.1.4.

I.3 Conduction Thermique Non Linéaire dans un Fluide

I.3.1 Remarques générales

Ainsi que nous l'avons noté, toutes les études particulières d'écoulements faites précédemment relèvent de l'équation de la chaleur que l'on peut

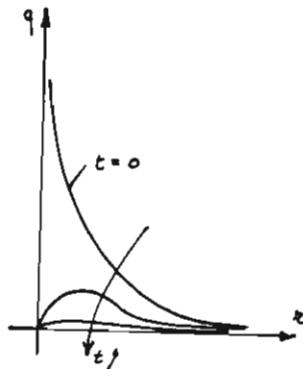


Figure 5 Profil de vitesse pour la diffusion d'un tourbillon singulier rectiligne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (1)$$

où T est la température absolue, χ le coefficient de diffusivité thermique. Cette équation est valable sous les hypothèses suivantes: si une masse de fluide est chauffée ou si une énergie est fournie par l'extérieur, il est loisible dans les conditions usuelles de négliger le mouvement du fluide dû aux variations de pression causées par les variations de température. Si celles-ci ne sont pas trop grandes elles voyagent à une vitesse beaucoup plus petite que la vitesse du son si bien que la pression s'égalise beaucoup plus rapidement que la température. Tout se passe donc comme si la conduction thermique s'opérait dans un milieu à pression constante. La loi de conservation de l'énergie, qui s'écrit alors,

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + r,$$

où \mathbf{q} est le courant de la chaleur, r l'énergie extérieure par unité de volume, conduit bien à l'approche de la loi de Fourier classique

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T$$

ce qui conduit bien à

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \bar{\omega}, \quad \left(\chi = \frac{k}{\rho C_p}, \bar{\omega} = \frac{r}{\rho C_p} \right),$$

c'est-à-dire à (1) lorsque $\bar{\omega} = 0$. L'analyse classique qui vient d'être rappelée est en fait une théorie linéarisée. † Le lecteur pourra réinterpréter aisément tous les résultats précédents dans le présent contexte physique.

Nous nous proposons dans cette section de considérer encore un problème de conduction pure—le mouvement du milieu étant négligé—mais fortement non linéaire qui, typiquement, peut être décrit par une équation de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \text{ div } (T^n \text{ grad } T). \quad (2)$$

Une telle équation gouverne la conduction engendrée par transfert radiatif lorsque la densité d'énergie de radiation est proche de la valeur qu'elle a à l'équilibre. On rencontre cette équation dans plusieurs situations physiques de conduction thermique radiative, l'exposant n prenant des valeurs de l'ordre de 3 à 7. On trouve aussi une équation du type (2) dans des problèmes de filtration (mouvement d'un gaz dans un milieu poreux), la variable T étant alors remplacée par la masse volumique ρ .

†Le coefficient de diffusivité thermique vaut dans les conditions usuelles $\chi = 0,21 \text{ cm}^2/\text{sec}$ pour l'air et $\chi = 1,5 \cdot 10^{-3}$ pour l'eau.

1.3.2 Propagation d'une quasi-onde thermique engendrée par une source plane instantanée

Nous commençons par cet exemple important où, la propagation s'effectuant par tranches planes, une seule variable d'espace intervient, l'équation (2) s'écrivant

$$\mathcal{L}(T) = \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0,$$

et où à l'instant $t = 0$, on a $T = Q\delta$, δ masse de Dirac à l'origine. Les seules données de ce problème sont Q et α ayant respectivement pour dimension $[DL]$ et $[L^2\theta^{-1}D^{-n}]$ si D et θ sont les symboles dimensionnels de la température (degré) et du temps (seconde). Le produit αQ^n a donc pour dimension

$[L^{n+2}\theta^{-1}]$ et $\alpha^{-1}Q^2$ a pour dimension $[D^{n+2}\theta]$. Ainsi

$$\xi = \frac{x}{(\alpha Q^n t)^{1/(n+2)}} \text{ et } \frac{T}{[Q^2(\alpha t)^{-1}]^{1/(n+2)}}$$

sont deux variables sans dimension. On est donc conduit à chercher la solution de (3) répondant à la question sous la forme

$$T = [Q^2(\alpha t)^{-1}]^{1/(n+2)} f(\xi),$$

qui représente une solution homogène de l'équation non linéaire (3). Un calcul facile montre que la fonction $f(\xi)$ doit alors vérifier l'équation différentielle ordinaire non linéaire

$$(n+2) \frac{d}{d\xi} \left(f^n \frac{df}{d\xi} \right) + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0.$$

La solution cherchée doit satisfaire les conditions suivantes pour $|x|$ très grand, c'est-à-dire ξ infini, $f(\xi) = 0$. Par ailleurs la solution qui est une fonction paire de ξ doit avoir une intégrale égale à un, en vertu de la condition initiale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = 1.$$

Nous reviendrons plus loin sur l'intégration de (6). On peut montrer que ce fait exceptionnel dont nous donnerons l'explication—on peut déterminer explicitement l'intégrale cherchée de cette équation non linéaire

$$f(\xi) = \left(\frac{n}{2(n+2)} \xi_0^2 \right)^{1/n} \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right)^{1/n} \text{ pour } |\xi| < \xi_0$$

$$f(\xi) = 0 \text{ pour } |\xi| > \xi_0$$

$$\xi_0 = \left[\frac{(n+2)^{1+n} 2^{1-n}}{n\pi^{n/2}} \right]^{1/(n+2)} \left[\frac{\Gamma(n+2/2n)}{\Gamma(1/n)} \right]^{n/(n+2)} \quad (9)$$

Le résultat trouvé mérite quelques commentaires.

Le fait le plus frappant est que dans le cas non linéaire, ($n \neq 0$), la température, à un instant fixé, reste nulle en dehors d'un domaine borné. Il existe dans la région $x > 0$ un front thermique pour la "quasi-onde thermique" engendrée par la source plane instantanée, front dont le mouvement est donné par

$$x_f = \xi_0 (\alpha Q^n t)^{1/(n+2)}. \quad (10)$$

La figure 6 montre le mouvement du front; on notera que la vitesse du front d'onde, d'abord très grande, diminue très rapidement et d'autant plus rapidement que n est grand.

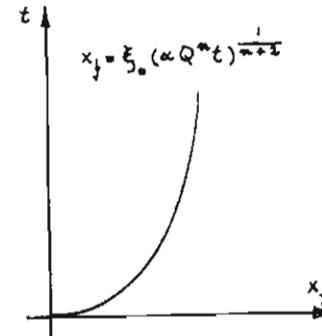


Figure 6 Propagation du front de la quasi-onde thermique (source d'énergie concentrée et instantanée)

La distribution de la température à un instant t fixé est de la forme

$$T = T_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_f^2} \right)^{1/n}, \quad (11)$$

où $T_0(t)$ est la température en $x = 0$. Celle-ci est proportionnelle à la température moyenne \bar{T}

$$\bar{T} = JT_0, \quad 2x_f \bar{T} = Q, \quad J = \frac{\sqrt{\pi}}{n+2} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(n+2)/2n}. \quad (12)$$

La figure 7 qui donne l'allure de la distribution de température à un instant déterminé pour une valeur typique de n de l'ordre de 5 révèle l'existence d'un plateau où la température se trouve égalisée par conduction. C'est dans une couche relativement mince, en aval du front, que se produit la chute de température. Le courant de chaleur qui est proportionnel à $-T^n \partial T / \partial x$, c'est-à-dire à xT , varie donc presque linéairement sauf dans la couche adjacente au front où il tend très rapidement vers zéro (Figure 8).

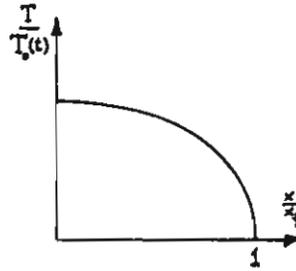


Figure 7 Température dans la quasi-onde thermique (source d'énergie concentrée et instantanée)

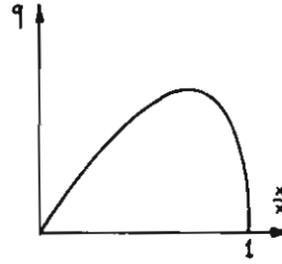


Figure 8 Flux de chaleur dans la quasi-onde thermique (source d'énergie concentrée et instantanée)

Le gaz atteint par la quasi-onde est fortement chauffé dans cette couche puis refroidi presque uniformément après le passage de cette quasi-onde.

1.3.3 Solutions homogènes des problèmes plans

Nous cherchons plus généralement maintenant toutes les solutions homogènes de l'équation non linéaire (3). Selon la méthode exposée plus haut nous cherchons d'abord le groupe de transformations de changements d'échelle laissant globalement invariant l'ensemble des solutions.

On établit facilement que si a et b sont deux constantes ($b > 0$) et si $T(x, t)$ est une solution de (3), alors:

$$(ba^{-2})^{1/n} T(ax, bt)$$

est encore une solution de (3).

On peut obtenir des sous-groupes à un paramètre en posant

$$b = \lambda a^p,$$

où λ est une constante positive fixée introduite ici par pure convenance. Les solutions homogènes sont celles qui sont invariantes pour toute transformation d'un tel sous-groupe, c'est-à-dire les solutions telles que

$$T(x, t) = (\lambda a^{p-2})^{1/n} T(ax, a^p \lambda t),$$

l'égalité (15) étant vérifiée pour λ fixé pour tout a, x, t . Faisons par exemple:

$$t = (\alpha \lambda a^p)^{-1}, \tag{16}$$

on voit que

$$T(x, t) = \left[\frac{\lambda}{(\alpha \lambda t)^{(p-2)/p}} \right]^{1/n} f_p(\xi), \tag{17}$$

$$\xi = \frac{x}{(\alpha \lambda t)^{1/p}}. \tag{18}$$

Telle est la forme obtenue pour les solutions homogènes de (3). Pour que (17) soit effectivement une solution de (3), $f_p(\xi)$ doit vérifier une équation différentielle que l'on peut former par simple substitution (nous n'écrivons plus l'indice p pour simplifier l'écriture). Il vient:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{\lambda}{(\alpha \lambda t)^{(p-2)/p}} \right]^{1/n} \left(\frac{p-2}{n} f(\xi) + \xi f'(\xi) \right) \frac{1}{pt},$$

$$T^n \frac{\partial T}{\partial x} = \left[\frac{\lambda}{(\alpha \lambda t)^{(p-2)/p}} \right]^{1/n} \frac{\lambda}{(\alpha \lambda t)^{1-(1/p)}} f^n f';$$

et par suite on obtient aisément l'équation vérifiée par $f(\xi)$:

$$L(f) = p(f^n f')' + \xi f' + \frac{p-2}{n} f = 0, \tag{19}$$

qui est une équation différentielle du second ordre non linéaire.

Les solutions de cette équation sont-elles aussi globalement invariantes par un groupe continu dépendant d'un paramètre. On peut le voir en effectuant sur $T(x, t)$ les transformations du sous-groupe $b' = (a' k^{-1})^p$, ou plus simplement en remarquant, en vertu de la présence de la constante λ arbitraire, que si $f(\xi)$ est une solution $k^{-2/n} f(k\xi)$ est aussi solution.

Si donc on remplace le couple de variables ξ, f par le couple (s, y) où

$$s = \text{Log } \xi, \quad y = \xi^{-2/n} f(\xi), \tag{20}$$

on voit que le changement de s en $s + s_0$, si on prend $k = \text{Log } s_0$, laisse invariante l'équation différentielle vérifiée par $y(s)$. Par suite $s = \text{Log } \xi$ comme fonction de y satisfait à une équation différentielle du second ordre où ne figure pas explicitement la fonction inconnue. On peut donc réduire cette équation à une équation du premier ordre en prenant le couple de variables y et $t = dy/ds = \xi dy/d\xi$, ou comme

$$\xi \frac{dy}{d\xi} = -\frac{2y}{n} + \xi^{1-2/n} f',$$

plus commodément encore, y et z si

$$z = \frac{2y}{n} + \xi \frac{dy}{d\xi}.$$

Nous poserons donc

$$f = \xi^{2/n} y, \quad f' = \xi^{2/n-1} z.$$

Une fois connue $z(y)$ on calculera ξ par (21) ou

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{n dy}{nz - 2y},$$

et f par

$$\frac{df}{f} = \frac{z d\xi}{y \xi} = \frac{nz dy}{y(nz - 2y)}.$$

Les relations (22) et (23) permettent de trouver immédiatement l'équation vérifiée par $z(y)$, à partir de (19):

$$p(nz - 2y) \frac{d}{dy} (y^n z) + p(n + 2) y^n z + (p - 2) y + nz = 0. \quad (25)$$

Ainsi les solutions homogènes de notre problème s'obtiennent toutes à partir des solutions d'une équation différentielle du premier ordre.

Soulignons que le raisonnement fait ici est tout à fait général. On peut en faisant appel aux propriétés d'invariance par le groupe des changements d'échelles réduire l'ordre de l'équation déterminant les solutions homogènes du problème.

Remarquons en passant que la forme de l'équation (25) suggère de rechercher une solution de la forme $z = by^{1-n}$.

On vérifie alors aisément qu'il en est ainsi si, et seulement si, $p = n + 2$ et $b = -1/p$. Ainsi on obtient la solution particulière

$$z = -\frac{1}{n+2} y^{1-n},$$

pour le cas où $p = n + 2$. L'intégration de (23) est alors classique (en posant $u = y^n$) et on retrouve alors la solution explicite trouvée en 1.2.2. Mais nous n'indiquerons en 1.2.4 la véritable méthode pour trouver ce résultat. Nous ne ferons pas, faute de temps, l'étude de l'intégration qualitative de (25). Nous nous contenterons de signaler quelques cas remarquables.

1) *Température constante sur la frontière $x = 0$: $T = T_0$.*
D'après (17), $p = 2$, $\lambda = T_0^n$ et on peut écrire:

$$T = T_0 f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(\alpha T_0^n t)^{1/2}}. \quad (26)$$

(21) Le mouvement du front d'onde est de la forme

$$x_f = \xi_0 (\alpha T_0^n t)^{1/2}.$$

(22) On trouvera, figure 9, l'allure de la répartition des températures.

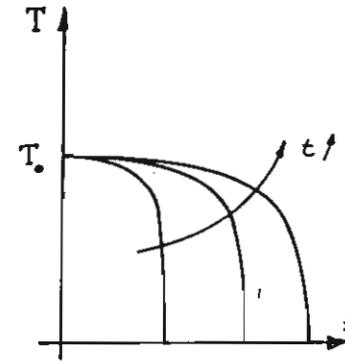


Figure 9 Profils de température pour une température fixée à la paroi

L'énergie croît comme

$$\int_0^{x_f} T dx = T_0 (\alpha T_0^n t)^{1/2} \int_0^{\xi_0} f(\xi) d\xi.$$

La fonction $f(\xi)$ vérifie les conditions aux limites $f(0) = 1$, $f(\infty) = 0$.

2) *Température imposée sur la frontière $x = 0$: $T = kt^q$*

On vérifie que:

$$p = \frac{2}{1 + qn}, \quad \lambda = (k\alpha^{-q})^{n/(1+qn)} \quad (27)$$

et on en déduira comme plus haut les conséquences.

1.3.4 Intégrales liées aux lois de conservation

L'équation (3), comme l'équation linéaire qu'elle généralise, admet deux lois simples de conservation, (cf. 1.1.4).

On remarque en effet que (3) exprime bien évidemment qu'il existe une fonction $\mathcal{A}_0(x, t)$ dont la différentielle est

$$T dx + \alpha T^n \frac{\partial T}{\partial x} dt = d \mathcal{A}_0. \quad (28)$$

De même (3) exprime aussi qu'il existe $\mathcal{A}_1(x, t)$ telle que

$$Tx dx + \alpha \left(xT^n \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T^{n+1}}{n+1} \right) dt = d\mathcal{A}_1. \quad (2)$$

La première intégrale est liée à la conservation de l'énergie, la seconde à celle du moment de la distribution des températures. Si \mathcal{A}_0 ou si \mathcal{A}_1 sont par exemple bornés pour $x = +\infty$ et $x = -\infty$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x, t) dx = \mathcal{Q}_0 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xT(x, t) dx = \mathcal{Q}_1 \quad (3)$$

sont constantes. Nous avons fait usage de ce résultat en I.1.4 pour représenter le premier terme d'une solution par une "source". On peut montrer que l'essentiel de l'analyse faite plus haut demeure encore valable dans le cas non linéaire en vertu de l'existence de ces deux lois de conservation.

Nous voulons plutôt insister sur le fait suivant: à toute loi de conservation peut être associée une solution homogène, d'un indice p convenablement choisis, que l'on peut obtenir explicitement.

Nous allons vérifier cette proposition dans le cas actuel; mais la manière dont nous allons procéder montrera bien son caractère très général.

Si on exprime \mathcal{A}_0 avec les variables ξ et t on a, d'après (28),

$$d\mathcal{A}_0 = \lambda^{1/n} (\alpha \lambda t)^{(2-p+n)/pn} \left[f(\xi) d\xi + (\xi f + p f^n f') \frac{dt}{pt} \right]. \quad (3)$$

On vérifie que le second membre est une différentielle exacte comme il se doit, si, et seulement si, l'équation (19) est vérifiée.

De plus l'on peut écrire:

si $p \neq n+2$:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{n\lambda^{1/n}}{n+2-p} (\alpha \lambda t)^{(2-p+n)/pn} (\xi f + p f^n f'),$$

si $p = n+2$:

$$(n+2) f^n f' + \xi f = b = \text{constante}$$

$$\mathcal{A}_0 = \lambda^{1/n} \left(\frac{b}{n+2} \text{Log } t + F(\xi) \right),$$

$F(\xi)$ étant une primitive de $f(\xi)$.

Il ne peut y avoir de solution pour laquelle \mathcal{A}_0 est une fonction de ξ seule que si, et seulement si, $b = 0$. Dans ce cas, on vérifie que la fonction $f(\xi)$ est bien celle trouvée en (6).

De même:

$$d\mathcal{A}_1 = \lambda^{1/n} (\alpha \lambda t)^{(2-p+2n)/pn} \left[\xi f(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + (\xi^2 f + p \xi f^n f' + \frac{p}{n+1} f^{n+1}) \frac{dt}{pt} \right]. \quad (34)$$

Le second membre de (34) est une différentielle exacte si et seulement si (19) est vérifiée. Pour que \mathcal{A}_1 dépende de ξ seulement il faut que

$$p = 2(n+1)$$

et que

$$f + \left[\frac{2f^{n+1}}{\xi} \right]' = 0.$$

En posant $2f^{n+1} = \xi u$, on a aussi:

$$u' + u^{1/(n+1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{1/(n+1)} = 0$$

par suite:

$$u = \left[\frac{2n}{n+2} \left| \left(\frac{\xi_0}{2} \right)^{(n+2)/(n+1)} - \left(\frac{\xi}{2} \right)^{(n+2)/(n+1)} \right| \right]^{(n+1)/n}$$

et

$$f = \left(\frac{2n}{n+2} \right)^{1/n} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{1/(n+1)} \left[\left(\frac{\xi_0}{2} \right)^{(n+1)/(n+1)} - \left(\frac{\xi}{2} \right)^{(n+2)/(n+1)} \right]^{1/n}$$

$$f(\xi) = \left(\frac{n\xi_0^2}{2(n+2)} \right)^{1/n} \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{1/(n+1)} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{(n+2)/(n+1)} \right]^{1/n} \quad (35)$$

Il est facile d'interpréter cette solution: elle correspond à un doublet initial pour lequel

$$\int_0^\infty xT(x, t) dx = P \quad (36)$$

P étant une constante.

Le front thermique a un mouvement donné par

$$x_f = \xi_0 (\alpha P t)^{1/2(n+1)},$$

et la distribution de température est:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{P}{\alpha t} \right)^{1/(n+1)} f(\xi) \\ &= \left(\frac{P}{\alpha t} \right)^{1/(n+1)} A(n) \left(\frac{x}{x_f} \right)^{1/(n+1)} \left(1 - \left(\frac{x}{x_f} \right)^{(n+2)/(n+1)} \right)^{1/n}, \end{aligned} \quad (37)$$

où $A(n)$ est une fonction de n que l'on peut expliciter. L'allure des différents profils de température est donnée par la figure 10. La constante ξ_0 ne dépend que de n et s'obtient en vérifiant (36).

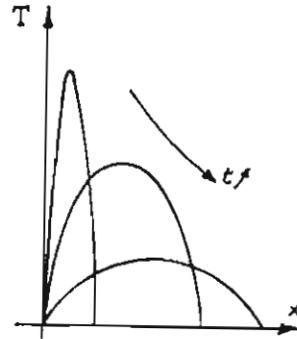


Figure 10 Profils de température pour le dipole

Ainsi nous avons trouvé explicitement une nouvelle solution homogène liée à une loi de conservation.

Nous arrêterons là l'étude de cette équation et des phénomènes physiques qu'elle schématise. Elle nous a permis dans un cas non linéaire simple de mettre en évidence de nouvelles propriétés et de nouvelles techniques d'étude des solutions homogènes.

1.4 Les Solutions Homogènes de la Théorie de la Couche Limite

Nous ne pouvons traiter des solutions homogènes liées à des phénomènes dissipatifs sans mentionner l'une des classes les plus connues dans la littérature et qui a joué un rôle important dans l'histoire de la mécanique des fluides: celle des solutions homogènes de la théorie de la couche limite de écoulements stationnaires.

1.4.1 Rappel des équations de la couche limite

Nous considérons un écoulement plan stationnaire de fluide incompressible autour d'un obstacle.

Supposant avoir choisi des variables dépendantes et indépendantes sans dimension, les équations de Navier-Stokes s'écrivent avec des notations évidentes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

où \mathcal{R} désigne le nombre de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{U_c L}{\nu}, \quad (2)$$

U_c , L étant respectivement la vitesse caractéristique et la longueur choisie pour former x , y , u , v ; la pression sans dimension p est rapportée à ρU_c^2 .

Une couche limite apparaît le long d'un obstacle lorsque \mathcal{R} est très grand. Plus précisément nous nous intéressons au premier terme† du développement intérieur ou local. Les techniques de perturbations singulières ou plus simplement l'expérience acquise en I.1 nous conduisent à introduire les variables intérieures suivantes:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{p} = p, \quad (3)$$

$$\bar{y} = y \mathcal{R}^{1/2}, \quad \bar{v} = v \mathcal{R}^{1/2},$$

en supposant que l'obstacle est une portion de l'axe des x .

En effectuant la substitution dans (1) et en ne retenant que les termes dominant en \mathcal{R}^{-1} , on obtient les équations de la couche limite

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0;$$

\bar{p} est donc une fonction de \bar{x} seulement. Les conditions aux limites sont les suivantes:

adhérence le long de la plaque:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ pour } \bar{y} = 0.$$

raccord avec l'écoulement de fluide parfait:

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} u(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x})$$

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = P(\bar{x}); \quad (5)$$

$U(x)$ et $P(x)$ sont les valeurs supposées connues de la vitesse et de la pression (sans dimension) en fluide parfait le long de l'obstacle. D'ailleurs le théorème

† Ces notions seront précisées dans la deuxième partie du cours.

de Bernoulli permet de relier $P(x)$ et $U(x)$, et par suite (4) peut s'écrire:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}.$$

1.4.2 Couche limite de la plaque plane placée dans le lit d'un vent uniforme

Si on introduit la fonction de courant réduite $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})$ par

$$d\bar{\psi} = \bar{u} d\bar{y} - \bar{v} d\bar{x},$$

la première équation (6) est automatiquement vérifiée et la seconde s'écri

$$\frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = 0.$$

Dans le cas considéré ici $\bar{U} = 1$, et la solution de (8) doit vérifier pour tout $\bar{x} > 0$

$$\bar{\psi}(\bar{x}, 0) = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, 0) = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \infty) = 1.$$

On établit aisément les propriétés du groupe de changements d'échelle si $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})$ est une solution de (8), alors

$$\frac{b}{a} \bar{\psi}(a\bar{x}, b\bar{y})$$

est aussi solution de (8); (rappelons que nous avons supposé $\bar{U} = 1$).

Les solutions homogènes sont celles qui sont invariantes par toute transformation du sous-groupe

$$b = ka^p.$$

Elles vérifient donc, quel que soit b , l'identité

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) = ka^{p-1} \bar{\psi}(a\bar{x}, ka^p \bar{y});$$

en faisant $a\bar{x} = 1$ et en posant

$$\xi = \frac{k\bar{y}}{\bar{x}^p},$$

on voit qu'elles peuvent s'écrire sous la forme

$$\bar{\psi}(x, y) = kx^{1-p} f(\xi). \tag{12}$$

On a alors:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = k^2 \bar{x}^{1-2p} f'(\xi), \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = k^3 \bar{x}^{1-3p} f''(\xi), \quad \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3} = k^4 \bar{x}^{1-4p} f'''(\xi),$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = k\bar{x}^{-p} (f(1-p) - p\xi f'), \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = k^2 \bar{x}^{-2p} \{f'(1-2p) - p\xi f''\}. \tag{13}$$

Pour satisfaire aux conditions (9) il faut prendre pour p et pour conditions aux limites sur $f(\xi)$:

$$p = \frac{1}{2}, f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \tag{14}$$

L'équation (8) montre que $f(\xi)$ est la solution de l'équation de Blasius

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{15}$$

qui vérifie les conditions (14). On peut démontrer l'existence et l'unicité de cette solution. La variation de $f'(\xi)$ qui donne celle de la vitesse \bar{u} est donnée sur la Figure 11.

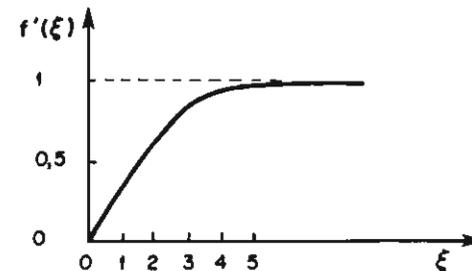


Figure 11

Nous verrons dans la deuxième partie la signification de ce résultat. Les conséquences principales qui en découlent sont dégagées dans le cours de Moffatt.

1.4.3 Solutions homogènes

Le cas particulier permet de revenir sur le cas général de l'équation (8).

En effet une solution de la forme (12) est possible si $\bar{U}(\bar{x})$ est de la forme

$$\bar{U} = \lambda \bar{x}^{1-2p} \tag{11}$$

si bien que

$$\mathcal{U} \frac{d\mathcal{U}}{d\bar{x}} = -(2p - 1) \lambda^2 \bar{x}^{1-2p}.$$

La fonction $f(\xi)$ doit alors vérifier les conditions aux limites

$$f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f'(\infty) = \bar{\lambda} = \lambda k^{-2}$$

et l'équation

$$f''' + (1 - p)ff'' + (2p - 1)(f'^2 - \bar{\lambda}^2) = 0.$$

Il peut être indiqué d'adopter des notations plus commodes pour l'interprétation. Nous poserons $\bar{\lambda} = \epsilon$ et nous écrirons

$$\mathcal{U} = \epsilon k^2 \bar{x}^m, \quad \epsilon = \pm 1, \quad k > 0;$$

les formules précédentes prennent alors la forme:

$$\xi = k\bar{x}^{(m-1)/2}, \quad \bar{\psi} = k\bar{x}^{(1+m)/2} f(\xi),$$

$$2f''' + (1 + m)ff'' + 2m(1 - f'^2) = 0,$$

et on a (13):

$$\bar{u} = k^2 \bar{x}^m f'(\xi), \quad \bar{v} = k\bar{x}^{(m-1)/2} \left[-\left(\frac{1+m}{2}\right) f(\xi) + \frac{1-m}{2} \xi f'(\xi) \right].$$

Les conditions aux limites s'écrivent dans le cas où la plaque est un obstacle baigné par le fluide

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = \epsilon. \quad (21)$$

On peut aussi traiter avec la même équation le cas où, le long de la plaque, on aurait un soufflage ou une aspiration avec comme conditions aux limites

$$f(0) = c, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = \epsilon, \quad (22)$$

la vitesse à la paroi étant alors donnée par

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = -\frac{1+m}{2} c k \bar{x}^{(m-1)/2}, \quad (23)$$

c étant négatif pour un soufflage, positif pour une aspiration.

L'existence, l'unicité et la détermination numérique de la solution de ce problème ainsi considéré, ont fait l'objet de travaux extrêmement approfondis. Nous n'évoquerons ici rapidement que deux cas particuliers importants.

a) *L'écoulement le long d'un angle* L'écoulement de fluide parfait

est défini par le potentiel complexe

$$F(z) = \frac{k^2}{m+1} z^{m+1}, \quad z = x + iy,$$

représente l'écoulement le long d'un angle d'ouverture 2α avec $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{1+m}$, ($m > 0$) (voir Figure 12).

Le problème défini par (20) et (21) est plus classiquement traité en posant:

$$\xi = \lambda \bar{\xi}, \quad f(\xi) = \lambda \bar{f}(\bar{\xi}), \quad 2\lambda^{-2} = 1 + m, \quad \beta = \frac{2m}{1+m}.$$

On écrit donc dans ces conditions:

$$\bar{\xi} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^{1/2} k \bar{y} \bar{x}^{(m-1)/2}; \quad \bar{\psi} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{1/2} k \bar{x}^{(1+m)/2} \bar{f}(\bar{\xi});$$

$$\frac{d^3 \bar{f}}{d\bar{\xi}^3} + \bar{f} \frac{d^2 \bar{f}}{d\bar{\xi}^2} + \beta \left(1 - \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\xi}}\right)^2\right) = 0; \quad (24)$$

$$\bar{f}(0) = \frac{d\bar{f}}{d\bar{\xi}}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{f}}{d\bar{\xi}}(\infty) = 1.$$

Notons que

$$m = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} = \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \beta.$$

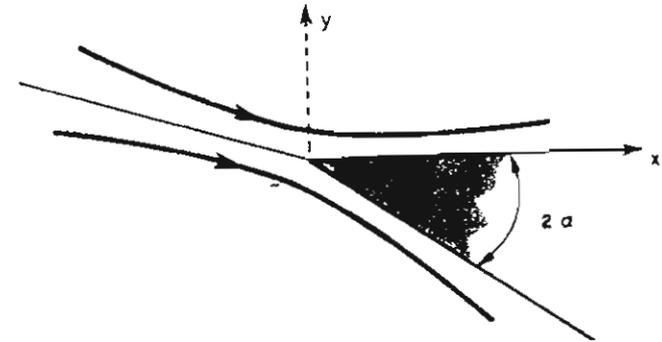


Figure 12 Écoulement autour d'un angle

Le cas particulier où $m = 1$, $\beta = 1$ correspond au cas d'une couche limite au voisinage d'un point d'arrêt.

b) *Écoulement le long d'une paroi d'arc convergent* Revenant à la formula-

tion (18)–(21), le cas où $m = -1$, $\epsilon = -1$, correspond à l'écoulement le long d'une paroi d'un convergent (figure 13). L'équation (20) s'écrit, en posant $g = -f'$,

$$\begin{aligned} g'' + 1 - g^2 &= 0 \\ g(0) = 0, \quad g(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

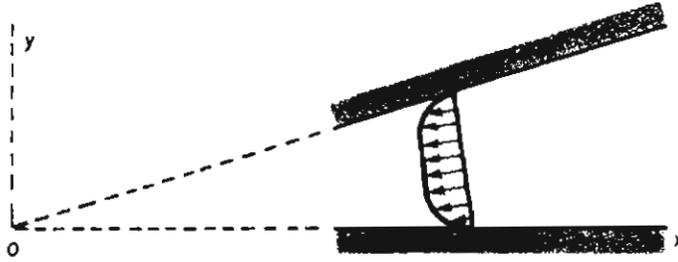


Figure 13 Écoulement dans un convergent (Les formules du texte sont relatives à la couche limite le long de Ox.)

L'intégration ne fait aucune difficulté. On peut d'abord former une intégrale première après multiplication par g' .

$$g'^2 = \frac{2}{3}g^3 - 2g + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(g-1)^2(g+2)$$

et traiter le problème comme celui du mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force dépendant d'un potentiel. On peut aussi intégrer complètement

$$g(\xi) = 3th^2\left(\alpha + \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) - 2.$$

où α est déterminé pour que $g(0) = 0$, soit

$$\alpha = \text{Log}(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

On pourrait songer à traiter d'une manière analogue le cas de l'écoulement le long d'une paroi plane d'un divergent. En fait on constate qu'il est impossible de trouver une solution de l'équation différentielle satisfaisant aux conditions aux limites. Effectivement si on étudie la solution de l'équation de Navier-Stokes correspondant à l'écoulement dans un convergent ou dans un divergent, on trouve qu'il est possible de la former explicitement—c'est d'ailleurs une solution homogène—mais lorsqu'on fait tendre la viscosité vers zéro, on met en évidence, dans le cas du convergent, l'existence d'un écoulement limite de fluide parfait sauf dans les couches limites le long des parois planes qui ont bien les propriétés trouvées plus haut, alors que,

dans le cas du divergent, on ne trouve pas d'écoulement limite. Il y a là un phénomène intéressant d'instabilité que nous ne pouvons étudier ici.

1.4.4 Solutions liées aux équations de conservation

Il n'est pas sans intérêt de reprendre ici les remarques faites en 1.3 sur les solutions homogènes liées à des équations de conservation.

Considérons par exemple la loi de conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe des x dans le cas où la pression est constante. On a donc:

$$\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{u}\tilde{v} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0, \quad (25)$$

qui exprime que

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathcal{D}} &= \tilde{u}^2 d\tilde{y} + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{u}\tilde{v} \right) d\tilde{x} \\ &= k^{-1} \tilde{u}^2 \tilde{x}^p d\tilde{\xi} + \left\{ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{u}\tilde{v} \right) + k^{-1} p \tilde{\xi} \tilde{x}^{p-1} \tilde{u}^2 \right\} d\tilde{x} \end{aligned}$$

est une différentielle exacte. Utilisons les formules (13):

$$d\tilde{\mathcal{D}} = k^3 \tilde{x}^{2-3p} f'^2 d\tilde{\xi} + k^3 \tilde{x}^{1-3p} [f'' + (1-p)f'f'] d\tilde{x}. \quad (26)$$

La fonction $\tilde{\mathcal{D}}$ ne dépend que de $\tilde{\xi}$ si, et seulement si,

$$p = \frac{2}{3}, \quad f'' + \frac{f'f'}{3} = 0, \quad (27)$$

c'est-à-dire si

$$6f' + f^2 - \alpha^2 = 0. \quad (28)$$

Nous devons avoir, en effet, $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$ puisque l'écoulement extérieur est à pression constante. Donc:

$$f(\infty) = \alpha.$$

La solution de (28) vérifiant ces conditions est

$$f = \alpha th \frac{\alpha \tilde{\xi}}{6}. \quad (29)$$

On remarquera que:

$$\tilde{M} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{D}} d\tilde{\xi} = \frac{k^3 \alpha^4}{36} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{\xi}}{\text{Ch}^4 \frac{\alpha \tilde{\xi}}{6}} = \frac{k^3 \alpha^3}{3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\text{Ch}^4 s} = \frac{2}{9} k^3 \alpha^3,$$

et, par suite:

$$\bar{\psi} = \bar{x}^{1/3} \left(\frac{9\bar{M}}{2} \right)^{1/3} \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{9\bar{M}}{2} \right)^{1/3} \frac{\bar{y}}{\bar{x}^{2/3}} \right\}.$$

L'écoulement ainsi trouvé correspond au comportement d'un jet bi-dimensionnel pour les grandes valeurs de l'abscisse.

La loi de la conservation de la masse conduit à une intégrale pour laquelle $\bar{\psi}$ n'est fonction que de ξ ; on trouve évidemment, d'après (12), $p = 1$, c'est-à-dire le cas de l'écoulement dans un convergent.

Conclusion

Nous renvoyons aux nombreux ouvrages consacrés à l'étude de la couche limite pour un traitement plus approfondi de cette question. Nous n'avons voulu ici que mentionner comment peuvent s'obtenir les solutions homogènes du système des équations de la couche limite. La discussion complète de l'existence de ces solutions et leur interprétation constituent un des chapitres les plus classiques et les plus instructifs de la mécanique des fluides visqueux.

II Ecoulements Transsoniques Homogènes

Introduction

Dans cette seconde section, nous étudierons les solutions homogènes des écoulements stationnaires transsoniques d'un fluide parfait. Pour simplifier nous nous contenterons d'examiner le cas des écoulements plans. Le choix retenu repose sur les raisons suivantes:

1) Le phénomène étudié est non seulement non linéaire, mais il est de plus gouverné par une équation de type mixte. Il apparaît pour $M = 1$ des particularités assez originales qui rendent l'étude particulièrement intéressante.

2) Les écoulements transsoniques comportent, en général, des ondes de choc au sein de l'écoulement. On devra donc étudier des solutions homogènes présentant des discontinuités.

3) Le rôle des solutions homogènes pour l'étude du comportement asymptotique au voisinage de points singuliers remarquables a été particulièrement bien étudié et s'est révélé fort utile dans l'étude de nombreux problèmes.

Nous aurons, de plus, l'occasion d'illustrer les méthodes et remarques générales présentées dans la section précédente et même de les compléter sur certains points. Avec l'ensemble des résultats acquis dans ces deux sections, on dispose, pensons-nous, des connaissances de base pour étudier et exploiter les solutions homogènes de la plupart des problèmes que l'on rencontre en physique mathématique.

Après un premier paragraphe consacré aux généralités, nous envisagerons l'application des lois de conservation classiques. Puis au paragraphe 3 on dégagera quelques résultats remarquables sur l'intégration de l'équation gouvernant les solutions homogènes. Dans le dernier paragraphe nous signalerons quelques applications.

II.1 Généralités

II.1.1 Equation réduite

On se propose essentiellement d'étudier un écoulement irrotationnel et stationnaire au voisinage d'un point où la vitesse est sonique. Nous choisissons ce point pour origine, l'axe des \bar{x} suivant la vitesse et désignons par \bar{x}, \bar{y} les coordonnées (sans dimension) du plan, par $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ le potentiel des vitesses. Pour mettre en évidence le comportement asymptotique de l'écoulement au voisinage de O , on est conduit suivant la méthode usuelle en théorie des perturbations à introduire des variables réduites

$$x = \bar{x}, \quad y = \delta \bar{y} \quad (1)$$

et à chercher le développement asymptotique de ϕ au voisinage de O sous la forme (la vitesse du son en O est prise comme unité)

$$\phi = \bar{x} + \epsilon \phi(x, y) + \dots \quad (2)$$

On sait que ϕ vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(c^2 - \phi_x^2) \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + (c^2 - \phi_y^2) \phi_{yy} = 0,$$

où c est la célérité du son. Le théorème de Bernoulli montre que, au voisinage de O

$$c^2 = 1 - (\gamma - 1) \epsilon \phi_x \dots \quad (3)$$

et les termes dominants dans l'équation du potentiel des vitesses conduisent à l'équation simplifiée.

$$-(\gamma + 1) \epsilon^2 \phi_x \phi_{xx} + \epsilon \delta^2 \phi_{yy} = 0. \quad (4)$$

Pour avoir une équation *significative* on pourra prendre:

$$\delta = [(\gamma + 1)\epsilon]^{1/2}, \quad (5)$$

et on obtiendra ainsi l'équation à laquelle satisfait ϕ :

$$-\phi_x \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (6)$$

On notera la représentation des vitesses au voisinage de O qui découle de (6)

$$U = 1 + \epsilon \phi_x = 1 + \epsilon u + \dots, \quad (7)$$

$$V = (\gamma + 1)^{1/2} \epsilon^{3/2} \phi_y + \dots = (\gamma + 1)^{1/2} \epsilon^{3/2} v + \dots$$

Ces formules contiennent naturellement l'essentiel des résultats de la loi de similitude des écoulements transsoniques au voisinage d'un point sonique.

On peut développer une analyse analogue pour l'étude d'un écoulement transsonique au voisinage de l'infini; les formules (6) et (7) restent valables. Mais la différence suivante doit être notée: *Pour qu'une solution de (6) représente un écoulement transsonique au voisinage de l'origine, il faut que ϕ_x , ϕ_y , qui définissent la vitesse, soient finis à l'origine. Une solution de (6) ne peut, par contre, représenter un écoulement à l'infini que si ces dérivées restent finies à l'infini.*

II.1.2 Groupe de l'équation réduite—Solutions homogènes

Le résultat suivant relatif aux changements d'échelle est immédiat:

Si $\phi(x, y)$ est une solution de (6), il en est de même de $b^2 a^{-3} \phi(ax, by)$, quel que soient a et b .

Remarquons tout d'abord qu'il existe une solution et une seule invariante par le groupe complet.

$$\phi_0 = \frac{x^3}{3y^2}, \quad \phi_{0x} = \frac{x^2}{y^2}, \quad \phi_{0y} = -\frac{2x^3}{3y^3}. \quad (8)$$

Le vecteur vitesse est constant sur tout rayon issu de l'origine. Elle correspond à l'onde simple centrée de Prandtl-Meyer (Fig. 1).

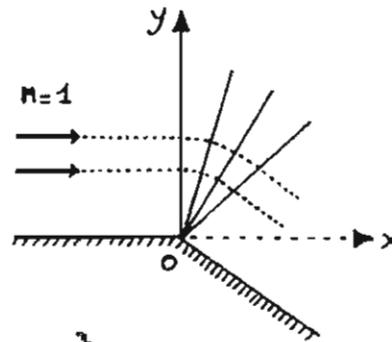


Figure 1 Onde simple centrée

Les sous-groupes sont définis par

$$a = kb^n \quad (9)$$

où n est un exposant réel, k une constante fixe mais arbitraire. Les solutions homogènes sont celles qui sont invariantes pour un tel sous-groupe.

$$\bar{\phi}(x, y) = k^{-3} b^{2-3n} \bar{\phi}(kxb^n, by)$$

quel que soit b . En faisant $b = y^{-1}$ on voit que:

$$\bar{\phi}(x, y) = k^{-3} y^{3n-2} f(\zeta), \quad (10)$$

si

$$\zeta = \frac{kx}{y^n} \quad (11)$$

Pour que (10) soit effectivement une solution de (6), il faut et il suffit que $f(\zeta)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire

$$(n^2 \zeta^2 - f') f'' - n(5n - 1) f' + (3n - 2)(3n - 3) f = 0. \quad (12)$$

On sait que l'on peut ramener cette équation à une équation du premier ordre du fait que (12) possède une propriété de groupe induit par le groupe général de l'équation (6). Ceci est d'ailleurs mis en évidence sur les formules (10), (11): si $f(\zeta)$ est une solution de (12), $p^{-3} f(p\zeta)$ est aussi une solution de (12). Si donc on pose

$$s = \zeta^{-3} f(\zeta),$$

$s(\zeta)$ vérifie une équation différentielle en ζ telle que $s(p\zeta)$ est également solution. Donc $\text{Log } \zeta$ comme fonction de s vérifie une équation différentielle du second ordre où ne figure pas explicitement la fonction inconnue et que, par suite, on ramène à une équation du premier ordre en prenant comme nouvelle variable $\frac{d \text{Log } \zeta}{ds}$ ou encore

$$\zeta \frac{ds}{d\zeta} = \frac{1}{\zeta^2} f'(\zeta) - 3s.$$

En conclusion, on ramène (12) à une équation du premier ordre en prenant les variables s et t définies par

$$s\zeta^3 = f(\zeta), \quad t\zeta^2 = f'(\zeta), \quad (13)$$

ce qui conduit par substitution à l'équation fondamentale pour l'étude des solutions homogènes

$$\frac{dt}{ds} = \frac{2t^2 + (3n^2 - 5n)t - (3n - 2)(3n - 3)s}{(n^2 - 1)(t - 3s)} \quad (14)$$

ζ étant déterminé le long d'une courbe intégrale par l'intégration de

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{ds}{t - 3s},$$

et $f(\zeta)$ par (13).

Si on désigne par u et v les dérivées de $\bar{\varphi}$ par rapport à x et à y , $\bar{\varphi}$ étant une solution homogène

$$u = k^{-2}y^{2n-2}f'(\zeta), \quad v = k^{-3}y^{3n-3}[(3n-2)f - n\zeta f'].$$

Ainsi, à un point du plan (s, t) correspond une courbe $\zeta = \text{constante}$ dans le plan physique x, y . Le long de cette courbe u et v varient comme y^{2n-2} et y^{3n-3} . Si $n > 1$, la vitesse de perturbation—voir (7)—tend vers zéro à l'origine. Si $0 < n < 1$, elle tend vers 0 à l'infini. Le premier cas correspond à l'étude d'un écoulement au voisinage de l'origine, le second au voisinage de l'infini, ceci en vertu de la remarque faite en fin de II.1.1. La figure 2 donne l'allure de ces courbes dans chacun de ces cas.

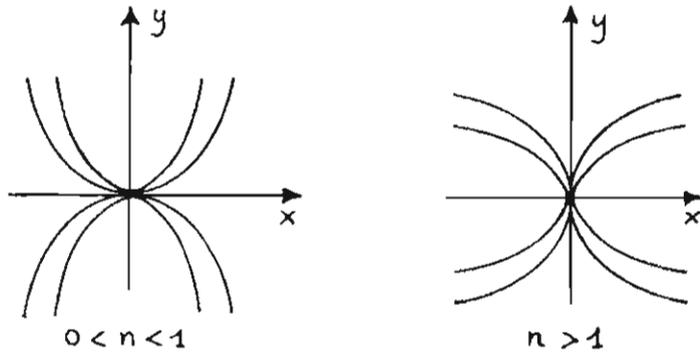


Figure 2 Les lignes $\zeta = \text{constante}$

La seconde formule (16) suggère une variante consistant à remplacer le plan (s, t) par le plan (τ, t) en posant

$$\tau = (3n - 2)s - nt.$$

Les formules donnant u et v sont particulièrement simples

$$u = \frac{x^2}{y^2}t, \quad v = \frac{x^3}{y^3}\tau,$$

et l'équation différentielle s'écrit:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2(1-n)t^2 + 3t\tau - 3n\tau}{2t^2 - 2nt - 3(n-1)\tau}.$$

Sous cette dernière forme on vérifie aisément que, quel que soit n il existe une solution homogène, appelée dans la suite intégrale (I), telle que:

$$4t^3 = 9\tau^2 = 9[3n - 2]s - n\tau^2. \tag{15}$$

L'écoulement correspondant est une onde simple non centrée car son image s'effectue sur une courbe dans le plan de l'hodographe puisque, d'après (18) et (20), on a $4u^3 = 9v^2$. Il est facile d'achever l'intégration.

Remarquons que l'écoulement invariant par toute transformation de groupe à 2 paramètres—(8)—a pour image dans le plan s, t un point unique $D: s = 1/3, t = 1$.

II.1.3 Ondes de choc dans les écoulements transsoniques homogènes

On sait que dans la partie supersonique d'un écoulement transsonique peuvent apparaître des ondes de choc. Les vitesses (U, V) de part et d'autre du choc—indice 1 pour l'amont, indice 2 pour l'aval—doivent vérifier l'équation de la polaire de choc

$$(V_2 - V_1)^2 = (U_2 - U_1)^2 \frac{U_1 U_2 - 1}{\frac{2}{\gamma + 1} U_1^2 + 1 - U_1 U_2}, \tag{21}$$

et, par ailleurs, la composante tangentielle de la vitesse doit être continue. Ici, comme ϵ est un paramètre petit, on peut supposer, nous le vérifierons d'ailleurs plus loin, qu'en première approximation l'écoulement est encore irrotationnel derrière le choc. La continuité de la composante tangentielle implique la continuité de $d\bar{\varphi}$ le long du choc, soit:

$$[u]dx + [v]dy = 0. \tag{22}$$

Quant à la condition (21), elle donne pour les termes dominants

$$[v]^2 = [u]^2 \bar{u}. \tag{23}$$

Nous avons ici utilisé les notations classiques

$$[f] = f_2 - f_1, \quad \bar{f} = \frac{1}{2} (f_1 + f_2). \tag{17}$$

Nous allons chercher à quelles conditions deux écoulements homogènes peuvent être séparés par un choc le long d'une courbe $\zeta = \text{constante}$. Le long de cette courbe, d'après (11)

$$ydx - nx dy = 0 \tag{18}$$

et donc, d'après (22), (16) et (13):

$$\frac{y}{x} \frac{dx}{dy} = n = - \frac{(3n-2)[s] - n[t]}{[t]}. \tag{19}$$

Ainsi $[s] = 0$. De plus si maintenant on écrit (23) on a $\bar{t} = n^2$. Comme la vitesse amont doit être supérieure à la vitesse aval, on obtient donc les conditions nécessaires et suffisantes

$$[s] = 0, \quad \bar{t} = n^2, \quad [t] < 0.$$

Dans un écoulement homogène, l'image d'un choc le long d'une courbe ζ_c constante s'effectue dans le plan s, t en un couple de points vérifiant (24) (voir figure 3).

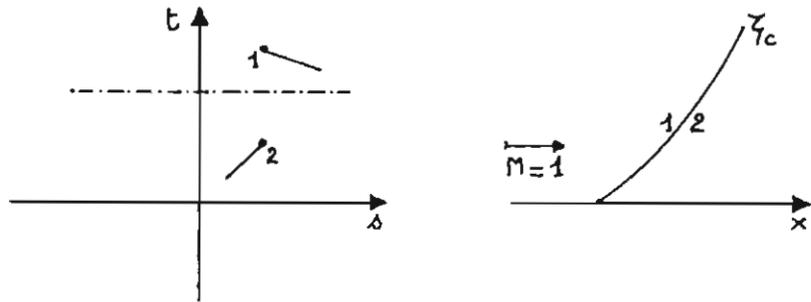


Figure 3 Image d'une onde de choc dans le plan $s-t$

II.1.4 Solutions homogènes et comportement asymptotique des écoulements transsoniques

Nous nous sommes proposés en II.1.1 d'étudier le terme dominant d'un écoulement transsonique en un point remarquable à distance finie, ou à l'infini, lorsque la vitesse était juste sonique. Nous avons ainsi été conduits à former l'équation (6) vérifiée par $\varphi(x, y)$. Par ailleurs, nous avons mis en évidence une classe de solutions de cette équation, celle des solutions homogènes. Nous allons montrer maintenant que, moyennant certaines hypothèses assez générales, la partie dominante du développement asymptotique de l'écoulement perturbé est précisément une solution homogène. Nous considérons pour fixer les idées le cas où l'on cherche le comportement à l'infini, le cas correspondant à un point à distance finie étant susceptible d'une analyse analogue.

Nous supposons donc l'écoulement produit par des obstacles, ou plus généralement des singularités de type varié mais toutes comprises dans un domaine à distance finie. Au lieu d'envisager un point x, y s'éloignant à l'infini, on peut maintenir ce point fixe et réduire de façon convenable la dimension de ce domaine de manière à le faire tendre vers l'origine. Si a représente une dimension de la largeur de l'obstacle, nous admettrons qu'il existe un exposant n et un facteur d'amplification $K(l)$ telle que lorsque

l tend vers zéro on ait:

$$\lim_{l \rightarrow 0} K(l) \varphi \left(\frac{x}{l^n}, \frac{y}{l} \right) = \hat{\varphi}(x, y), \quad (24)$$

$\hat{\varphi}$ étant une fonction bien définie, dépendant effectivement de x et de y , et que les dérivées par rapport à x et à y de la fonction figurant au premier membre tendent également dans les mêmes conditions vers celles de $\hat{\varphi}$.

Par suite, λ étant un nombre fixé:

$$\hat{\varphi} \left(\frac{x}{\lambda^n}, \frac{y}{\lambda} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} K(l) \varphi \left(\frac{x}{(\lambda l)^n}, \frac{y}{\lambda l} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{K(l)}{K(l\lambda)} \hat{\varphi}(x, y) = k(\lambda) \hat{\varphi}(x, y).$$

Par suite, pour tout λ fixé, le rapport $K(l\lambda)/K(l)$ tend vers une fonction $k(\lambda)$ déterminée lorsque l tend vers zéro. Cette fonction $k(\lambda)$ vérifie l'identité fonctionnelle $k(\lambda) k(\mu) = k(\lambda\mu)$; c'est donc une fonction puissance: $k(\lambda) = \lambda^q$. Ainsi la fonction $\hat{\varphi}(x, y)$ jouit de propriétés d'homogénéité. On vérifie alors aisément que $q = 3n - 2$ puisque $\hat{\varphi}$ dépend effectivement de x et de y . La propriété est donc démontrée.

On peut montrer que les termes suivants du développement asymptotique d'une solution exacte au voisinage d'un point remarquable ou à l'infini jouissent eux aussi de propriétés d'homogénéité: ils sont de la forme $y^p f_p(\zeta)$. Mais, en général, ils ne sont pas solution de l'équation (6) mais d'une équation linéaire de type mixte à coefficients variables.

II.1.5 Solutions homogènes limites

Les remarques présentées dans cette section ont un caractère général toutes les fois que le système étudié est invariant par certaines translations. On aurait pu les présenter déjà lors de l'étude faite en section I.

a) Une translation parallèle à l'axe des x laisse invariante l'équation (6).

Par suite:

$$k^{-3} y^{3n-2} \left(\frac{k(x+a)}{y^n} \right)$$

si $f(\zeta)$ vérifie (12) est une solution de (6) quel que soit k et a . Considérons le cas où $k = a^{-1}$ et posons:

$$\xi_a = \frac{1}{y} \left(\frac{x+a}{a} \right)^{1/n};$$

on peut écrire la solution précédente sous la forme:

$$\frac{1}{y^2}(x+a)^{+3} \left(\frac{x+a}{ay^n}\right)^{-3} f\left(\frac{x+a}{ay^n}\right) = \frac{(x+a)^3}{y^2} F(\xi_a).$$

Posons $a = 1/n$ et faisons tendre n vers zéro. L'inspection de cette dernière expression laisse prévoir des solutions de (6) de la forme

$$\phi = \frac{1}{y^2} g(\eta), \quad \eta = \frac{\exp(x)}{y}.$$

On vérifie en effet qu'il en est bien ainsi si g vérifie une équation différentielle facile à former. On peut également étudier les chocs apparaissant éventuellement le long de lignes $\eta = \text{constante}$.

b) Une translation parallèle à l'axe des y conduit à des solutions de la forme (si $k = b^n$)

$$\frac{(y+b)^{3n-2}}{b^{3n}} f\left[x \left(\frac{b}{y+b}\right)^n\right] = \frac{x^3}{(y+b)^2} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{y+b}{b}\right)^n\right]^3 f\left[x \left(\frac{b}{y+b}\right)^n\right]$$

Si on pose $b = n$ et si on fait tendre n vers l'infini, on prévoit, et on peut vérifier, l'existence de solutions de la forme

$$\phi = x^3 k(\chi), \quad \chi = x \exp(-y).$$

On trouvera Figures 4 et 5 l'allure des courbes $\eta = \text{constante}$ et $\chi = \text{constante}$ ainsi mises en évidence. Aucune application de ces solutions dignes d'intérêt ne semble avoir été donnée.

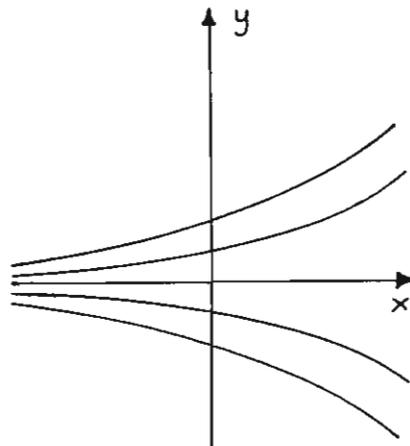


Figure 4 Courbes $\eta = \text{constante}$

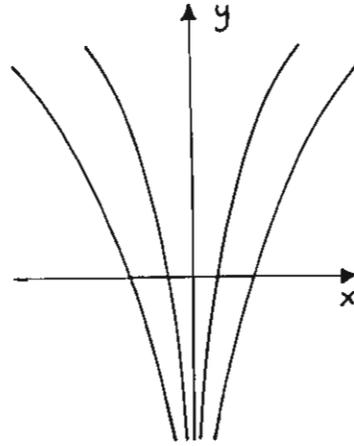


Figure 5 Courbes $\chi = \text{constante}$

II.2 Application des Lois de Conservation Classiques

Le but de ce paragraphe est de montrer, comme en I.2.4, que la connaissance d'une loi de conservation conduit à une intégrale explicite de l'équation (14) et par suite à une solution remarquable de (12) pour une valeur déterminée de l'indice n . Mais pour cela il faut d'abord découvrir comment se traduit pour l'équation (6) la loi de conservation. On y parvient en poussant plus avant la formation du développement formel en ϵ commencé en II.1.1.

II.2.1 Développement asymptotique des grandeurs physiques

Nous nous contenterons de donner les résultats essentiels sans expliciter complètement les calculs. Partant des variables réduites déjà introduites

$$x = \bar{x}, \quad y = \delta \bar{y}, \quad \delta = [(\gamma + 1)\epsilon]^{1/2},$$

nous complétons les formules (7) en écrivant

$$\begin{aligned} U &= 1 + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \epsilon^3 u^{(3)} \dots \\ V &= \epsilon \delta v^{(1)} + \epsilon^2 \delta v^{(2)} + \epsilon^3 \delta v^{(3)} \dots \end{aligned} \tag{27}$$

On peut montrer que $u^{(1)}, v^{(1)}$ et $u^{(2)}, v^{(2)}$ dépendent de potentiels $\phi^{(1)}(x, y) = \phi(x, y)$, $\phi^{(2)}(x, y)$ mais qu'il n'en n'est plus de même de $u^{(3)}, v^{(3)}$, la rotation à l'ordre d'approximation retenue n'étant plus nulle à la traversée d'un choc, mais variable, tout en gardant une valeur constante le long des lignes de courant de l'écoulement non perturbé; on peut simplement introduire $\phi^{(3)}(x, y)$ tel que

$$d\phi^{(3)} = [u^{(3)} - \bar{\omega}(y)]dx + v^{(3)} dy.$$

En substituant dans (27), puis dans l'équation de Bernoulli et en utilisant la loi d'état, on obtient alors

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - \frac{\gamma-1}{2} [2 \epsilon \phi_x + \epsilon^2 (\phi_x^2 + \phi_x^{(2)}) + 2 \epsilon^3 (\phi_x \phi_x^{(2)} + \bar{\phi}_x^{(3)} + \bar{\omega} + \frac{\gamma+1}{2} \phi_x^2) + \dots], \\ \rho &= 1 - \epsilon \phi_x - \epsilon^2 (\phi_x^{(2)} + \frac{\gamma-1}{2} \phi_x^2) \dots, \\ \rho U &= 1 - \epsilon^2 \frac{\gamma+1}{2} \phi_x^2 \dots, \\ p &= \frac{1}{\gamma} - \epsilon \phi_x - \epsilon^2 \phi_x^{(2)} - \epsilon^3 [\phi_x^{(3)} - (\gamma+1) \left(\frac{\phi_x^3}{6} - \frac{\phi_x^2}{2}\right)] \dots \end{aligned} \tag{28}$$

II.2.2 Conservation de la masse

L'équation de continuité implique l'existence d'une fonction de courant $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})$ telle que

$$d\bar{\psi} = \rho U d\bar{y} - \rho V d\bar{x}.$$

La substitution des développements précédents conduit à poser

$$\bar{\psi} = \bar{y} - (\gamma + 1)^{1/2} \epsilon^{3/2} \psi(x, y),$$

avec

$$d\psi = \frac{\phi_x^2}{2} dy + \phi_y dx.$$

En écrivant que le second membre de (30) est une différentielle exacte on obtient l'équation (6). Exprimé avec les variables ζ et y , ζ étant donné par (11), on obtient:

$$k^4 d\psi = A_1(\zeta) y^{4n-3} d\zeta + B_1(\zeta) y^{4n-4} dy$$

avec

$$A_1(\zeta) = (3n - 2)f - n\zeta f'$$

$$B_1(\zeta) = n\zeta [(3n - 2)f - n\zeta f'] + \frac{1}{2}f'^2.$$

L'équation (12) peut donc s'écrire $dB_1/d\zeta = (4n - 3)A_1$. Si $4n - 3 \neq 0$ on a (à une constante additive près):

$$k^4 \psi = \frac{y^{4n-3}}{4n-3} B_1(\zeta),$$

ce qui permet d'étudier le comportement de la fonction ψ le long d'une ligne $\zeta = \text{constante}$. D'après (29), $(\gamma + 1)^{1/2} \epsilon^{3/2} \psi$ définit le déplacement subit par la ligne de courant $\bar{y} = \text{constante}$ en raison de la perturbation. On peut obtenir pour $n = \frac{1}{2}$ une fonction de ψ ne dépendant que de ζ ; c'est le cas où $B_1(\zeta) = 0$, c'est-à-dire

$$2n[(3n - 2)s - nt] + t^2 = 0. \tag{32}$$

La courbe intégrale dans le plan s, t est une parabole. On achève aisément l'intégration, en posant $t = \eta^{-1}$; il vient par exemple

$$\zeta = -\mu(-\eta)^{2/3}(1 - \eta)^{7/24},$$

et on obtient également des expressions explicites pour u et v

$$u = -\mu^{8/3}(-\eta)^{7/9}(1 - \eta)^{-7/9} x^{-2/3},$$

$$v = -\frac{1}{3}\mu^4(-\eta)^{2/3}(1 - \eta)^{-7/6} x^{-1}.$$

Une interprétation intéressante est représentée sur les figures 6 et 7. A un

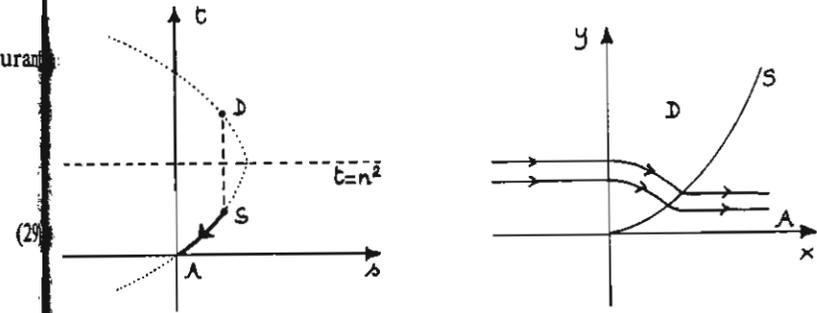


Figure 6

écoulement uniforme et sonique—par exemple dans le demi plan $\bar{x} < 0$ —fait suite une onde simple centrée dont l'image dans le plan (s, t) est le point D; cette onde simple est limitée par un choc le long d'une ligne $\zeta = \text{constante}$; l'image de l'écoulement aval du choc est le point S et l'écoulement après le choc a pour image l'arc SA de la parabole intégrale trouvée plus haut.

On peut alors vérifier que cette solution représente le comportement asymptotique à l'infini de l'écoulement d'un fluide le long d'une paroi présentant une certaine dénivellation h . La donnée de h détermine parfaitement le comportement asymptotique. Par exemple le choc se comporte comme la

$$\beta \bar{x}^4 = (\gamma + 1) h \bar{y}^3, \tag{33}$$

où β est un nombre pur ayant une valeur déterminée et qui a été calculée exactement.

II.2.3 Conservation de la quantité de mouvement longitudinale

La conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe des \bar{x} conduit à l'existence d'une fonction $\bar{\mathcal{D}}(\bar{x}, \bar{y})$ dont la différentielle est donnée

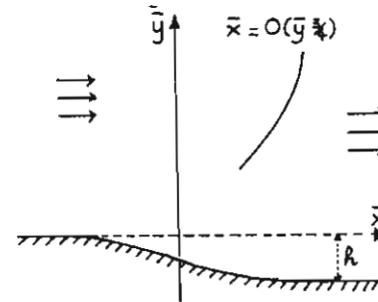


Figure 7 Écoulement à l'infini produit par une dénivellation

par

$$d\bar{\mathcal{D}} = (p + \rho U^2) dy - \rho UV dx.$$

En utilisant les développements (28) et l'équation de continuité, on en déduit l'existence d'une fonction $\mathcal{D}(x, y)$ telle que

$$d\mathcal{D} = (\varphi_y^2 + \frac{1}{3}\varphi_x^3) dy + 2\varphi_x \varphi_y dx;$$

de façon précise

$$\bar{\mathcal{D}} = \bar{y} + \bar{\psi} - \epsilon^{5/2}(\gamma + 1)^{1/2} \mathcal{D}(x, y) + \epsilon^{5/2}(\gamma + 1)^{-1/2} \Omega(y)$$

$\Omega(y)$ étant une primitive de $\bar{\omega}(y)$. Dans le cas d'un écoulement homogène (35) s'écrit

$$k^6 d\mathcal{D} = A_2(\zeta) y^{6n-5} d\zeta + B_2(\zeta) y^{6n-6} dy,$$

avec

$$A_2(\zeta) = 2f'[(3n - 2)f - n\{f'}]$$

$$B_2(\zeta) = (3n - 2)^2 f^2 + \frac{1}{3} f'^3 - n^2 \zeta^2 f'^2.$$

L'équation vérifiée par $f(\zeta)$ ne fait que traduire le fait que (37) est une différentielle exacte. Si $6n - 5 \neq 0$

$$k^6 \mathcal{D} = \frac{y^{6n-5}}{6n-5} B_2(\zeta).$$

Il existe un écoulement homogène pour lequel \mathcal{D} n'est fonction que de ζ . Il correspond à la valeur $n = 5/6$ de l'exposant et il est défini par la courbe intégrale

$$(3n - 2)^2 s^2 = n^2 t^2 - \frac{1}{3} t^3 \quad (n = \frac{5}{6}).$$

Il est aisé de paramétrer cette cubique et d'obtenir ζ en fonction de ce paramètre au moyen de fonctions élémentaires.

La solution obtenue—figures 8 et 9—s'interprète comme l'écoulement asymptotique autour d'un obstacle placé dans un écoulement à nombre de Mach unité lorsqu'on suppose que se développe en aval un sillage du type d'Helmholtz. La constante d'intégration qui apparaît comme facteur d'échelle dans ζ est directement liée à la trainée.

Ainsi la ligne de jet a un comportement asymptotique de la forme

$$y = Cx^{2/5}$$

et la constante C est la même pour deux obstacles ayant même trainée.

Remarque Un traitement analytique du même genre peut être appliqué à la conservation de la quantité de mouvement transversale (en projection sur l'axe des y). Mais aucune interprétation physique intéressante de cette solution exacte n'a été trouvée jusqu'ici.

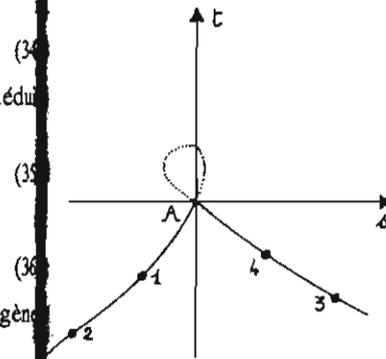


Figure 8 Écoulement à l'infini produit par un obstacle et son sillage d'Helmholtz (Fig. 9) son image dans le plan (s, t) (Fig. 8)

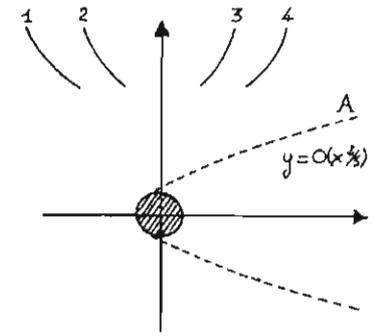


Figure 9

3 Remarques sur l'Intégration Qualitative de l'Equation (14)

Les écoulements homogènes sont donc définis par l'intégration du système (14) que nous écrivons à nouveau:

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{ds}{t - 3s} = \frac{(n^2 - t) dt}{2t^2 + (3n^2 - 5n)t - (3n - 2)(3n - 3)s} \quad (38)$$

qu'il s'agit d'intégrer. En fait quand nous chercherons une solution correspondant à un problème particulier donné, il faudra au préalable déterminer la valeur du paramètre n qui convient. En général, il s'agira en quelque sorte de résoudre un problème de valeurs propres d'une nature assez particulière. Pour y parvenir, il est intéressant d'avoir une première idée sur les propriétés qualitatives des intégrales. Par souci de concision, nous n'envisageons ci-dessous que le cas où n est inférieur à 1; les solutions correspondantes comme nous l'avons vu décrivent le comportement à l'infini des écoulements soniques. Bien sûr, le cas où n est supérieur à 1 se traite de manière analogue.

3.1 Isoclines remarquables. Points singuliers

Nous travaillons dans le plan (s, t) .

Le lieu des points en lesquels les courbes intégrales présentent une tangente parallèle à l'axe des t est constitué des deux droites

$$\Delta_1 : t - 3s = 0, \quad \Delta_2 : t - n^2 = 0.$$

Le lieu des points en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des s est en général une parabole

$$P : 2t^2 + (3n^2 - 5n)t - (3n - 2)(3n - 3)s = 0.$$

Les points communs à ces deux lieux sont les points singuliers (à distance finie) de l'équation (14). Ce sont

	s	t	τ
A	0	0	0
C	$\frac{5n^3}{3(3n-2)}$	n^2	$\frac{1}{3}n^3$
D	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$

Sur la figure 10 sont tracées les deux isoclines remarquables; on a de plus indiqué le signe de la pente des courbes intégrales dans les diverses régions ainsi délimitées. Notons qu'aucune singularité n'apparaît dans l'écoulement au voisinage d'une courbe $\zeta = \text{constante} = \zeta_1$, dont l'image est un point Δ_1 d'ordonnée t_1 (si $t_1 \neq n^2$); en effet lorsque t varie de façon monotone en traversant la valeur t_1 , ζ —qui garde bien une valeur finie—varie également de façon monotone en traversant la valeur ζ_1 . Aucune difficulté n'apparaît également à la traversée de l'isocline P. Mais il n'en n'est pas de même à la traversée de Δ_2 en un point distinct de C. En effet, $\zeta^{-1} d\zeta$ change de signe et comme ζ reste borné, la fonction $\zeta(t)$ passe par un minimum ou un maximum relatif. La ligne $\zeta = \text{constante} = \zeta_1$ correspondante est une ligne limite de l'écoulement le long de laquelle l'écoulement "rebrousse" sur un autre feuillet; une telle solution est donc physiquement inacceptable. Une courbe intégral physiquement acceptable ne peut traverser continûment la droite $t = n^2$ qu'au point singulier C.

On notera que pour $t = n^2$, le coefficient de f'' dans (12) est nul. En chaque

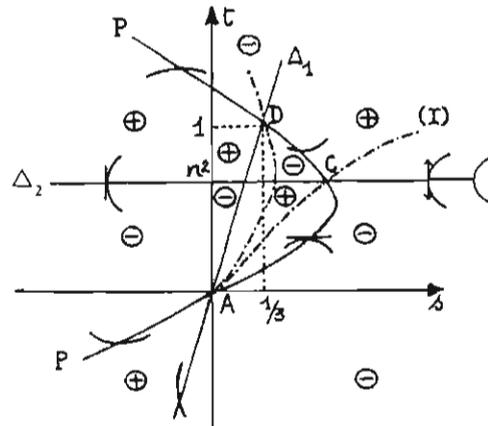


Figure 10 ($2/3 < n < 1$). Isoclines (pentes nulle et infinie). ———: intégrale (I) formule (20)

ces points la ligne $\zeta = \zeta_1$ est tangente à une direction caractéristique

$$\frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y} = \sqrt{t} \frac{dy}{y} \quad \text{ou} \quad dx^2 = u dy^2,$$

comme le montre (18). Mais $\zeta = \zeta_1$ n'est en général pas une caractéristique. Pour qu'elle le soit il faut de plus que

$$\frac{4u^3}{9v^2} = \frac{4t^3}{9\tau^2} = 1,$$

c'est-à-dire que, précisément, le point de Δ_2 considéré soit le point C.

3.2 Résultats relatifs aux points singuliers

Nous rappelons que nous nous limitons au cas où $n < 1$ et nous nous intéressons plus spécialement au cas où $2/3 < n < 1$.

Point A ($s = 0, t = 0$) (figure 11)

Il est facile de vérifier que le point A est un noeud régulier, c'est-à-dire que, à l'exceptionnel, s et t peuvent être représentés par des fonctions holomorphes d'une même variable uniformisante ξ ; ici on prendra par exemple

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{n} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{1}{n} \frac{ds}{t - 3s}$$

on a alors

$$s = a_0 \xi^2 + a_1 \xi^3 + a_2 \xi^4 \dots$$

$$t = a_0 \left(3 - \frac{2}{n}\right) \xi^2 + a_1 \left(3 - \frac{3}{n}\right) \xi^3 + a_2 \left(3 - \frac{4}{n}\right) \xi^4 \dots$$

La tangente ordinaire du noeud est la droite $(3n - 2)s - nt = 0$ ($a_0 \neq 0$); la tangente exceptionnelle est la droite $3(n - 1)s - nt = 0$ ($a_0 = 0, a_1 \neq 0$). Si

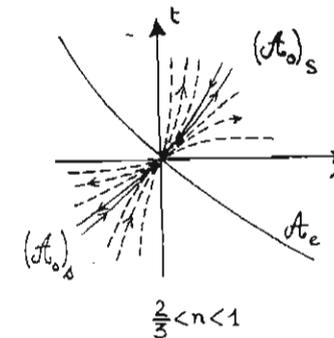


Figure 11 Le noeud A

$a_1 = 0, a_0 \neq 0$, tous les a_p d'indice impair sont nuls: le prolongement au-delà du noeud se fait par rebroussement; nous distinguerons l'arc (\mathcal{A}_0) , et l'arc (\mathcal{A}'_0) , ayant ces propriétés, selon que t est négatif (écoulement subsonique) ou positif (écoulement supersonique). L'arc tangent à la direction exceptionnelle ($a_0 = 0, a_1 \neq 0$) sera noté \mathcal{A}_e . Dans le plan physique, le point A correspond aux lignes particulières ζ infini, qui sont les demi-droites portées par l'axe des x . Ces demi-droites ne sont pas en général des lignes singulières pour l'écoulement. C'est pourquoi A est un noeud régulier.

Point C ($t = n^2, \tau = \frac{2}{3}n^3$)

Le point C lorsque $0 < n < 1, (n \neq 2/3)$, est un col, les tangents des deux courbes intégrales passant par C ont pour pentes

$$m_1 = \frac{3(n-1)(3n-2)}{n(n+1)}, \quad m_2 = \frac{3n-2}{2n}.$$

Nous avons déjà trouvé l'une de ces intégrales, l'intégrale (I) qui est tangente à la droite de pente m_2 en C . On peut de plus montrer que le long de l'intégral tangent en C à la droite de pente m_1, ζ varie de façon monotone en gardant une valeur finie. La courbe $\zeta = \zeta_1$ correspondant au point C , que nous l'avons vu, est une caractéristique, est en général une *frontière transsonique* de l'écoulement.

Point D ($s = 1/3, t = 1$)

C'est un noeud mais qui n'est pas régulier (à la différence de A). Il n'y a donc que deux intégrales régulières. L'une d'entre elles est précisément l'intégrale (I) déjà mentionnée.

Comportement à l'infini L'étude du comportement à l'infini des courbes intégrales est un peu plus délicate. On notera qu'un tel point correspond aux lignes $\zeta = 0$, c'est-à-dire aux demi-droites portées par l'axe des y . Les résultats sont les suivants (figure 12)

—dans le cas général, les intégrales se comportent comme

$$s = K (\epsilon t)^{3/2}, \quad \epsilon = \pm 1$$

on dit que de tels arcs sont des arcs B_0 .

—plus particulièrement, on peut avoir

a) une branche pour laquelle $s = t$

on dit qu'un tel arc est un arc B_1 (le point correspondant est un col)

b) une branche B_2 telle que

$$2(3n-2)(3n-3)s = t^2$$

le point correspondant est encore un col). En fait ce cas ne peut se présenter physiquement car on voit alors que l'axe des y serait une ligne limite.

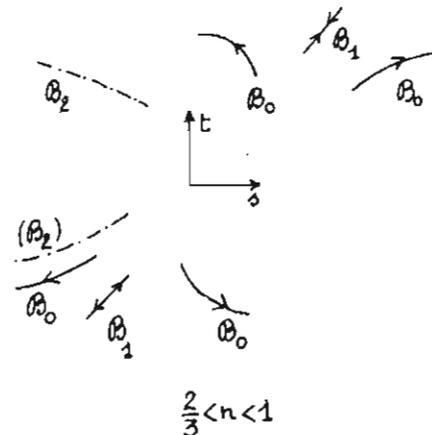


Figure 12 Comportement à l'infini

II.3.3 Allure du réseau des courbes intégrales

Compte tenu des résultats indiqués, on se rend compte que l'allure générale des courbes intégrales pour une valeur de n comprise entre $2/3$ et 1 est celle donnée par la figure 13. Mais cette connaissance qualitative risque d'être souvent insuffisante pour résoudre un problème donné. Une des difficultés

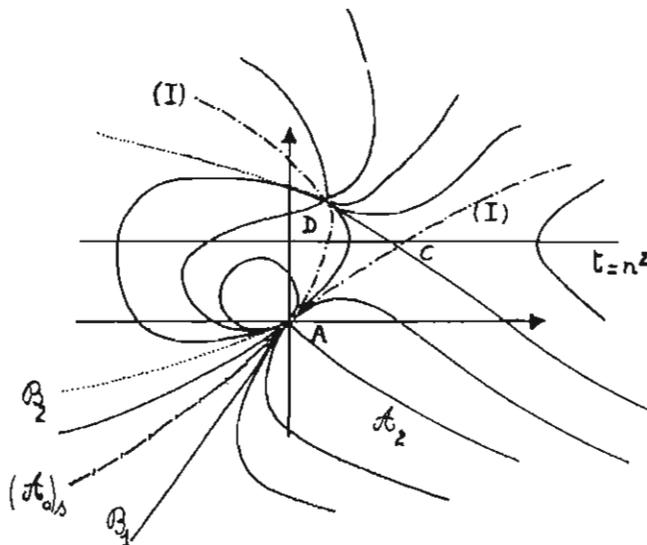


Figure 13 Allure des courbes intégrales

en effet consiste à savoir comment s'effectue la réflexion d'une courbe intégrale en A (si l'écoulement étudié comprend une demi-droite portée par Ox), comment s'effectue "la réflexion à l'infini" (si l'écoulement étudié comprend une demi-droite portée par Oy). Une étude plus précise risquerait donc d'être nécessaire.

En fait, dans le cas des écoulements plans, seuls considérés ici, il est possible de procéder à une intégration analytique de l'équation grâce à la méthode de l'hodographe. Si on effectue sur l'équation (6) une transformation de Legendre faisant correspondre à $\varphi(x, y)$ la fonction $\chi(u, v)$ par les formules

$$\begin{aligned} \chi &= ux + vy - \varphi \\ x &= \chi_u, \quad y = \chi_v \end{aligned}$$

on voit que $\chi(u, v)$ est solution de l'équation de Tricomi

$$\chi_{uu} - u \chi_{vv} = 0.$$

Aux solutions homogènes de l'équation (6) correspondent des solutions homogènes de l'équation (40) et réciproquement. Les solutions homogènes de (39) sont de la forme

$$\tilde{\chi} = v^p g(\eta), \quad \eta = \frac{4u^3}{9v^2},$$

et η n'est fonction que de ζ , puisque $\eta = 4t^3/9\tau^2$. Or, si on prend la transformation de Legendre de (10) on a:

$$\tilde{\chi} = \tilde{u}x + \tilde{v}y = \tilde{\varphi} = v^{(3n-2)/(3n-3)} H(\zeta),$$

où $H(\zeta)$ est une fonction de ζ qui s'explicite complètement à l'aide de f et f' . On notera que l'exposant p correspond à l'exposant n défini par

$$p = \frac{3n-2}{3n-3}, \quad n = \frac{3p-2}{3p-3}. \tag{42}$$

Le fait important est que $g(\eta)$ est une solution de l'équation hypergéométrique de Gauss, et par conséquent une fonction facile à étudier. Les formules (39) donnent alors immédiatement l'écoulement correspondant dans le plan physique. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de cette question qui est de nature particulière.

II.4 Applications: Etude aux Grandes Distances de l'Écoulement Symétrique Autour d'un Obstacle Borné ou Semi-infini

Nous nous concentrerons dans ce paragraphe sur l'étude de l'écoulement à l'infini autour d'un obstacle ayant un axe de symétrie et placé symétriquement dans l'écoulement.

Dans cette application, on sait que l'image dans le plan de l'écoulement du voisinage du demi-axe des x négatifs est l'arc de courbe (\mathcal{A}_0) . Il suffit d'étudier le demi plan $y > 0$. Donc il faut, pour obtenir l'image de l'écoulement, envisager une réflexion de cet arc à l'infini ($x = 0$) et vérifier que l'arc réfléchi aboutit en définitive en A ($y = 0, x > 0$).

Sur la figure 14 on a tracé l'allure de cette courbe intégrale pour $2/3 < n < 1$. Voici quelques commentaires justifiant ce tracé.

Il est facile de vérifier que dans le cas limite $n = 1$, la courbe (\mathcal{A}_0) , est simplement la droite $s = t$ — autrement dit c'est un arc B_1 à l'infini, la réflexion en B_1 ramène sur cette droite. La solution correspond à un cas banal sans intérêt.

Pour n inférieur à 1 mais voisin de 1, l'arc (\mathcal{A}_0) , subit à l'infini une réflexion régulière de type B_0 et revient en A selon une courbe distincte de (\mathcal{A}_0) , mais située dans le demi-plan $t > 0$. L'écoulement est entièrement subsonique. Cette disposition change lorsque le retour en A après la réflexion B_0 s'effectue suivant l'arc exceptionnel \mathcal{A}_c . Or, nous avons trouvé plus haut que cette circonstance se produisait pour $n = 5/6$.

Si nous continuons à faire décroître n , nous obtenons encore un retour en A , mais l'écoulement a une partie supersonique. Cette disposition reste valable jusqu'à ce que n prenne la valeur remarquable n_1 pour laquelle, après la réflexion B_0 , la courbe va passer par le point singulier C . On peut montrer que $n_1 = 4/5$.

Si on fait décroître encore n , on obtient une solution sans signification physique car l'écoulement correspondant aurait une ligne limite.

En conclusion, les seuls cas intéressants à retenir sont ceux correspondant à l'intervalle $4/5 < n < 1$. Reste à interpréter ces écoulements. A cet effet il est utile de déterminer pour ces écoulements les fonction ψ et \mathcal{D} ainsi que $\tilde{\psi}$ et

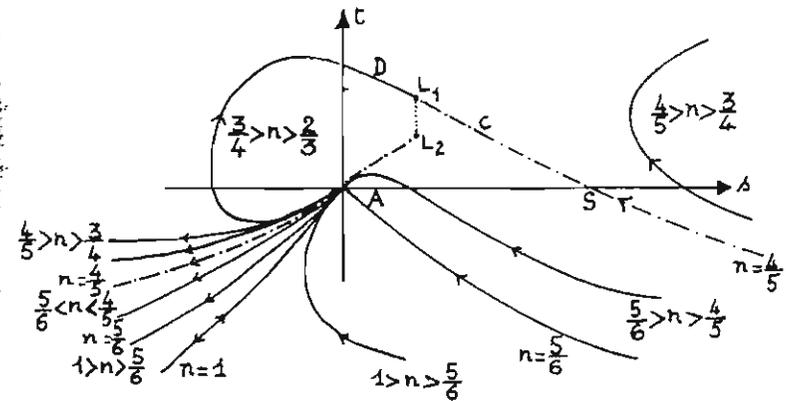


Figure 14 Evolution de l'intégrale (\mathcal{A}) , pour n décroissant de 1 à $2/3$

et $\bar{\psi}$ introduites plus haut. On trouve d'abord que ψ , le long du demi-axe des x positifs est proportionnel à x^m avec $m = (4n - 3)/n$

$$\text{on notera que } \begin{cases} n = 1 \rightarrow m = 1 \\ n = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{1}{4} \rightarrow m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ainsi ces écoulements sont ceux qui se produisent autour d'obstacles semi-infinis qui aux grandes distances ont un comportement asymptotique de la forme

$$\bar{y} = \eta \bar{x}^m \quad (43)$$

où m est compris entre $1/4$ et 1 . On voit qu'un tel écoulement est continu à l'infini. Si des chocs se produisent ils sont tous compris dans un domaine borné

—Si $2/5 < m < 1$ l'écoulement n'est jamais supersonique à l'infini;

—Si $1/4 < m < 2/5$ l'écoulement est supersonique au voisinage de l'obstacle à l'infini et la ligne sonique se comporte comme

$$\bar{x} = C\bar{y}^n, \quad n = \frac{3}{4-m}$$

—Si on écrit (43) sous la forme, L étant une longueur,

$$\frac{\bar{y}}{L} = \left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^m$$

on vérifie que le coefficient de pression est de la forme

$$(\gamma + 1)^{1/3} C_p = \alpha(m) \left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^{2(m-1)/3}$$

—Si $2/5 < m < 1$, la trainée du demi obstacle est infinie. Elle est finie si $1/4 < m < 2/5$

Le cas limite où $n = n_1 = 4/5$ requiert une attention spéciale. Nous avons vu que l'écoulement avait pour image un arc passant par le col C et se prolongeant jusqu'à D . Or, le point D , pour des raisons physiques, ne peut être atteint et, par ailleurs, nous souhaitons aboutir au point A afin de couvrir dans le plan physique tout le demi-plan $\bar{y} = 0$. L'écoulement comprend donc nécessairement une onde de choc.

Ce choc, qui permet de "sauter" à travers la droite $t = n^2$, peut avoir une image amont placée arbitrairement entre C et D . L'arc intégral issu de l'image aval passera finalement par A .

En général cet arc sera distinct de $(\mathcal{A}_0)_S$ et par suite l'écoulement correspond à un obstacle semi-infini de forme (asymptotique)

$$\bar{y} = C\bar{x}^{1/4}$$

Mais il existe une position particulière du choc—et une seule—pour laquelle l'image de l'écoulement en aval du choc est précisément l'arc $(\mathcal{A}_0)_S$. Tel est en particulier l'écoulement asymptotique que l'on obtient pour des obstacles de dimensions finies, (figure 15).

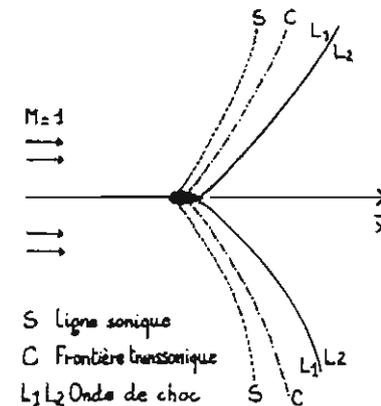


Figure 15 Comportement à l'infini de l'écoulement autour d'un profil. $n = 4/5$, $m = 1/4$

On ne saurait trop insister sur le fait suivant: tous ces écoulements (correspondants à $n = 4/5$) sont identiques jusqu'à la frontière transsonique qui est la courbe $\zeta = \zeta_c = \text{constante}$ dont l'image est en C —on l'appelle aussi parfois "caractéristique limite". L'existence de cette frontière transsonique est l'une des principales propriétés d'un écoulement transsonique. Sa signification physique est claire: une perturbation infinitésimale produite en amont affecte tout le domaine subsonique; une telle perturbation produite en aval n'affecte pas l'écoulement subsonique amont.

Soulignons en terminant que la détermination de ce nombre n_1 revient, comme nous l'avons déjà dit, à résoudre un problème de valeurs propres. Dans le cas présent la valeur trouvée $n_1 = 4/5$ peut s'obtenir en s'appuyant sur la représentation analytique de la solution à l'aide des solutions homogènes de l'équation de Tricomi évoquée à la fin de II.3.3. Il se trouve même qu'il est possible de donner une représentation analytique simple de cette solution en faisant appel uniquement à des fonctions algébriques.

Il n'est pas possible d'envisager ici d'autres applications des solutions homogènes étudiées dans ce chapitre.

Conclusion

Nous espérons avoir évoqué, à l'occasion des quelques exemples rapidement envisagés, les méthodes d'études des solutions homogènes des problèmes de physique mathématique et leurs principales applications.

Rappelons que ce sont des solutions invariantes par un sous-groupe du groupe des transformations d'échelles qui laisse invariant l'ensemble des solutions. Leur étude est facilitée d'une part en raison de la diminution du nombre de variables indépendantes—dans les exemples traités leur détermination résultait de l'intégration d'une équation différentielle du second ordre—et d'autre part de la possibilité ultérieure de réduire l'ordre de cette équation—dans les exemples traités, on pouvait ramener l'étude à une équation du premier ordre.

Dans l'ensemble des solutions homogènes, il faut distinguer spécialement celles qui sont attachées à une loi de conservation. Leur détermination est très simplifiée et peut même souvent être effectuée explicitement. Elles ont aussi souvent une interprétation physique intéressante. Dans les autres cas la détermination de la solution homogène intéressante pour un problème donné peut s'avérer délicate; dans les cas les plus difficiles, on aura à résoudre un problème de détermination de valeur propre (et de solution propre), dans un sens quelque peu généralisé.

Ce qui fait l'intérêt majeur des solutions homogènes, c'est que, de façon assez générale, les termes dominants du développement asymptotique d'une solution complète au voisinage d'un point remarquable ou au voisinage de l'infini sont des solutions homogènes. Elles apparaissent donc comme déterminant des comportements asymptotiques locaux.

L'objet de la suite de ce cours sera consacrée, par opposition, à la recherche de *comportements asymptotiques globaux* des écoulements.

Remarques Complémentaires pour la Première Partie

Il y a beaucoup d'ouvrages consacrés à l'analyse dimensionnelle. Citons par exemple ceux de Bridgman (1931), Palacios (1962), Pankhurst (1964), Saint-Guilhem (1962) etc. Mais la plupart d'entre eux n'aborde guère la question des solutions homogènes. Le célèbre livre de Sedov (1969) par contre leur réserve une large place et a contribué largement à la prise de conscience de l'importance du sujet et de son caractère général. En réalité, rares sont les ouvrages de mécanique des fluides—pour ne parler que de ceux-ci—où ne figurent pas des solutions homogènes. Il ne peut être question ici de tenter de faire un inventaire de tous les exemples intéressants que l'on trouve dans la littérature. Il n'en reste pas moins qu'il y a peu de monographies ou même d'articles de synthèse consacrés à l'étude générale de ce type de solutions. Il faut toutefois citer la récente contribution de Barenblatt et Zel'dovich (1972) qui peut être lue avec grand profit, surtout si on a déjà une certaine connaissance de quelques exemples dans telle ou telle discipline.

Il nous a paru intéressant de préconiser l'introduction de ces solutions à partir du groupe de transformations d'échelles qui laisse invariant l'ensemble

des solutions et des sous-groupes qui laissent invariante une solution. Le rôle des groupes en mécanique des fluides a été dégagé par plusieurs auteurs. Citons à titre d'exemple Birkhoff (1950) et plus récemment Ovsyannikov (1962). Mais dans le cas présent il n'est pas nécessaire de connaître la théorie des groupes continus pour pouvoir comprendre l'usage qui en est fait, étant donné leur caractère tout à fait élémentaire.

Les sections I.1 et I.2 sont tout à fait élémentaires et ne font que reprendre des questions très classiques traitées dans la quasi totalité des cours de mécanique des fluides. La section I.3 s'appuie sur le chapitre X du second volume de Zel'dovich et Raizer (1965) auquel le lecteur qui voudrait approfondir les conditions dans lesquelles on peut employer ce modèle de transfert thermique radiatif en physique et les conséquences des résultats obtenus pourra utilement se reporter. L'équation traitée se rencontre également dans un problème de filtration traité par Barenblatt (1964). Une étude plus élaborée du transfert radiatif mettant en oeuvre une perturbation singulière de la solution donnée en I.3.2 a été présentée par Traugott (1970).

La section I.4 ne peut que donner un premier aperçu sur les solutions homogènes de la théorie de la couche limite. La question est reprise dans le cours du Professeur Moffatt. On trouvera dans la contribution de Jones et Watson, au chapitre V du livre édité par Rosenhead (1963), une étude plus poussée de ces solutions qui ont joué un rôle considérable et des références nombreuses aux travaux qui leur ont été consacrés.

Le section II reprend l'exposé de base de l'auteur (1964), mais en se limitant ici pour simplifier au cas des écoulements plans. On a dû, faute de temps, limiter l'exposé des applications et renoncer à évoquer la question intéressante des lois de conservations particulières associées à chaque solution homogène. L'introduction des solutions homogènes en transsonique est due à Guderley (1957). On trouvera dans le livre de mécanique des fluides de Landau et Lifschitz, l'étude plus précise de l'écoulement asymptotique autour du profil au nombre de mach $M = 1$. Signalons encore pour le lecteur intéressé les travaux d'Euvrard et de ses collaborateurs qui ont déterminé les approximations d'ordre supérieur et utilisé les résultats asymptotiques pour calculer par une méthode numérique originale l'écoulement complet autour d'un profil symétrique donné à $M = 1$.

Il aurait fallu évoquer bien d'autres questions et tout spécialement le chapitre très important des écoulements unidimensionnels (rectilignes, cylindriques ou sphériques) d'un fluide parfait compressible. Le livre de Sedov et le livre de Zel'dovich et Raizer contiennent des développements très complets sur cette classe de solutions aux applications variées. On pourra consulter sur ce sujet les récents travaux de Oppenheim et de ses collaborateurs (1972).

Nous mentionnerons encore le rapprochement fait par Barenblatt et Zel'dovich (1972) entre les solutions homogènes et les ondes stationnaires.

Une solution de la forme

$$\varphi = \eta^q f\left(\frac{\xi}{\eta^v}\right)$$

si on pose

$$\psi = \text{Log } \varphi, \quad t = \text{Log } \eta, \quad x = \text{Log } \xi, \quad g(z) = f(e^z),$$

s'écrit

$$\psi = qt + g(x - vt);$$

en particulier si $q = 0$, la fonction φ a la forme d'une onde stationnaire de vitesse v . Les propriétés asymptotiques des solutions homogènes, sur lesquelles nous avons insisté, et les problèmes de valeurs propres généralisées que l'on rencontre dans la détermination d'une solution homogène répondant à des conditions données sont donc en quelque sorte analogues aux propriétés et aux problèmes de même nature que l'on rencontre dans l'étude des ondes stationnaires.

Signalons enfin une ingénieuse généralisation due à Cumberbatch et Varley (1966) conduisant à des solutions nouvelles pour les écoulements non stationnaires en dynamique des gaz, dépendant de deux variables d'espace.

DEUXIEME PARTIE Méthodes de Perturbations Singulières

Introduction

Dans la première partie de ce cours, nous avons étudié le comportement asymptotique *local* des solutions de problèmes de mécanique des fluides en dégageant l'importance à cet égard des solutions homogènes qui, tout en constituant certaines solutions exactes de problèmes particuliers, fournissent de façon plus générale la partie dominante, au voisinage de certains points ou à l'infini, des solutions générales.

Nous voulons aborder maintenant l'étude *asymptotique globale* des écoulements. Celle-ci s'impose en raison des difficultés très grandes que l'on rencontre dans l'étude générale des solutions exactes du système régissant le comportement de nombreux écoulements. On est donc conduit, lorsque cela s'avère possible, à tirer parti du fait qu'un paramètre du problème, soit ϵ ($\epsilon > 0$), reste petit, pour rechercher, au lieu de la solution exacte, les premiers termes (parfois le premier seulement) d'un développement asymptotique selon une suite d'échelles asymptotiques $\delta_n(\epsilon)$ décroissantes—par exemple dans le cas le plus simple ϵ^n où n est un entier positif $n = 1, 2, \dots$. La structure du système à étudier laisse prévoir très souvent la méthode d'itération "naïve" qui semble la plus naturelle. Mais dans de très nombreux cas, le développement asymptotique ainsi obtenu ne constitue pas une approximation uniformément valable dans le domaine qui nous intéresse, ou bien il n'est valable que dans des intervalles trop restreints des coordonnées d'espace et de temps pour être vraiment porteur de résultats ayant un intérêt indiscutable. On a pris l'habitude de dire quand il en est ainsi qu'on a affaire à un problème de *perturbations singulières*, le problème correspondant à une valeur petite mais finie de ϵ étant considéré comme une perturbation du problème plus simple—dit *non perturbé*—correspondant à $\epsilon = 0$ et pour lequel on suppose connue la solution.

La suite de ce cours se propose de dégager quelques méthodes d'étude de telles perturbations singulières. Pour être mathématiquement rigoureuse, une telle étude doit conduire à la formation d'un *développement asymptotique* en ϵ , dont on *démontre* effectivement qu'il constitue le *développement asymptotique uniformément valable* de la solution cherchée. De telles preuves définitives ont effectivement été obtenues dans un certain nombre de cas; elles sollicitent l'habileté et l'imagination des mathématiciens qui ont encore dans ce domaine un large champ de recherches importantes à mener à bien. Néanmoins, nous n'évoquerons pas ces travaux dans ce qui suit.

Par contre, nous traiterons des méthodes *cohérentes* à utiliser pour former ces développements asymptotiques de solutions, sans connaître ces solu-

tions, sans même souvent avoir la garantie mathématique de leur existence et de leur unicité. Quelques raisonnables que puissent paraître les résultats obtenus, ils ne seront donc jamais, au cours d'une telle étude, établis avec une totale certitude. Mais néanmoins les exigences de cohérence posées et surtout l'expérience acquise dans de multiples exemples fournissent une garantie pratique et quasi certaine de la validité de ces résultats. Les méthodes de perturbations singulières constituent donc des outils de choix pour aborder des problèmes dont la complexité rend l'étude mathématique, sinon impossible dans l'état actuel du développement scientifique, du moins extrêmement compliquée et les résultats de cette étude souvent trop limités pour pouvoir être exploités par le physicien ou l'ingénieur.

Le premier chapitre constitue une introduction aux diverses méthodes de perturbations singulières reposant sur l'étude de modèles différentiels très simples. Le second chapitre traite essentiellement de problèmes de couche limite en mécanique des fluides; il n'est pas besoin d'en souligner l'importance. Un autre grand chapitre où s'appliquent avec profit certaines méthodes de perturbations singulières est celui de la propagation des ondes non linéaires de faible amplitude. Vu son intérêt propre, il constituera en fait la troisième partie de ce cours.

III Introduction, sur des Modèles Différentiels, des Diverses Méthodes de Perturbations Singulières

Dans cette section, il ne sera pas question de mécanique des fluides. Il est indiqué en effet d'introduire les méthodes que nous voulons exposer sur les modèles simples d'équations différentielles, dont on connaît souvent la solution générale. La plupart des exemples considérés ont une interprétation physique digne d'intérêt. Nous la signalerons le plus souvent, sans toutefois insister trop longuement.

Nous considérons donc des problèmes très simples portant chacun sur une équation différentielle où se trouve impliqué un petit paramètre ϵ ($\epsilon > 0$), et pour lesquels la recherche d'un développement "naïf" en ϵ échoue. Nous aurons ainsi l'occasion de mettre en évidence diverses singularités qui peuvent être rencontrées, diverses méthodes d'attaque pour la recherche d'approximations convenables, diverses particularités présentées par les solutions.

III.1 La Méthode de Poincaré

Nous commençons par l'exemple bien classique de l'oscillateur non linéaire gouverné par l'équation

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k(y - \alpha y^3) = 0$$

α est un paramètre petit si bien que la force de rappel est faiblement non linéaire, A l'amplitude de l'oscillation. On posera $\epsilon = \alpha A^2$, $m\omega^2 = k$, $Y = A^{-1}y$, $t = \omega t$, pour obtenir une équation équivalente sans dimension avec les conditions initiales appropriées ($V = dy/dt$):

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + Y - \epsilon Y^3 = 0; t = 0, Y = A, V = 0. \quad (2)$$

Le mouvement est périodique comme le montre l'équation donnant son image dans le plan des phases (Y, V)

$$2(V^2 + Y^2) - \epsilon Y^4 = A^2(2 - \epsilon A^2).$$

Un développement "naïf" de la solution cherchée s'obtiendrait en posant:

$$Y(t, \epsilon) = h_0(t) + \epsilon h_1(t) + \epsilon^2 h_2(t) + \dots \quad (3)$$

La substitution dans (2) montre immédiatement que:

$$h_0 = \cos t, \frac{d^2 h_1}{dt^2} + h_1 = h_0^3 = \cos^3 t, h_1(0) = \dot{h}_1(0) = 0; \quad (4)$$

et par suite:

$$h_1(t) = \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) + \frac{3}{8}t \sin t. \quad (5)$$

L'approximation obtenue n'est pas bonne; d'une part on ne voit pas apparaître la modification de la période et, d'autre part, la présence dans (5) du terme en $t \sin t$ (terme séculaire) fait que le terme $\epsilon h_1(t)$ n'est effectivement d'ordre ϵ que si t varie dans un intervalle $0 \ll t \ll T$ de durée finie, $T = 0(1)$, [si $T = 0(\epsilon^{-1})$, ce terme est du même ordre que le premier]. La présence de ce terme en $\epsilon t \sin t$ est due à la résonance artificielle introduite par la méthode dans l'équation (4) déterminant h_1 . Nous dirons que ce problème est un problème de perturbation singulière et plus précisément du type "séculaire" ou "cumulatif".

L'idée de Poincaré est de "distordre" convenablement la variable temps en introduisant une nouvelle variable temps t^* définie par

$$t = t^* + \epsilon f_1(t^*) + \epsilon^2 f_2(t^*) + \dots, \quad (6)$$

où les fonctions f_1, f_2, \dots doivent être introduites pour éviter la présence des termes séculaires. On cherchera alors la solution de (2) sous la forme

$$Y(t, \epsilon) = Y_0(t^*) + \epsilon Y_1(t^*) + \dots \quad (7)$$

L'introduction de (6) et de (7) dans le premier membre de (2) conduit en égalant à 0 les deux premiers termes du développement en ϵ aux équations

$$\frac{d^2 Y_0}{dt^{*2}} + Y_0 = 0, \quad \frac{d^2 Y_1}{dt^{*2}} + Y_1 = Y_0^3 + 2 \frac{df_1}{dt^*} \frac{d^2 Y_0}{dt^{*2}} + \frac{d^2 f_1}{dt^{*2}} \frac{dY_0}{dt^*}. \quad (8)$$

Compte tenu des conditions aux limites on a d'abord:

$$Y_0 = \cos t^*,$$

et le second membre de (8)₂ s'écrit alors:

$$\frac{3}{4} \cos t^* + \frac{1}{4} \cos 3t^* - 2 \frac{df_1}{dt^*} \cos t^* - \frac{d^2 f_1}{dt^{*2}} \sin t^*.$$

On évitera la présence de termes séculaires si on peut choisir $f_1(t^*)$ pour faire disparaître les termes éventuels en $\cos t^*$, $\sin t^*$ dans ce second membre.

Nous écrivons donc:

$$\sin t^* \frac{d^2 f_1}{dt^{*2}} + 2 \cos t^* \frac{df_1}{dt^*} = \frac{3}{4} \cos t^*,$$

soit:

$$\sin^2 t^* \frac{df_1}{dt^*} = \frac{3}{8} \sin^2 t^* + C_1,$$

où C_1 est une constante d'intégration mais qui doit être nulle pour que $f_1(t^*)$ ne soit pas singulière en $t^* = 0$. Ainsi $f_1 = \frac{1}{8} t^*$, ce qui assure que $t = 0$ lorsque $t^* = 0$, et on obtient le résultat:

$$Y(t, \epsilon) = \cos \left\{ \left(1 - \frac{1}{8} \epsilon\right) t \right\}. \quad (9)$$

A cet ordre d'approximation, on constate que le mouvement est encore harmonique (des harmoniques d'ordre supérieur apparaissent lorsqu'on veut chercher $f_2(t^*)$ et $Y_1(t^*)$). Mais on a mis en évidence la dépendance de la période vis à vis de ϵ . La comparaison avec la solution exacte montre que celle obtenue est exacte à $O(\epsilon^2)$. La position approchée de l'oscillation définie par (9) sera encore voisine de la position exacte à $O(\epsilon)$ près au bout d'un temps de l'ordre $O(\epsilon^{-1})$ —c'est-à-dire d'autant plus long que ϵ est petit.

III.2 La Méthode de Distorsion des Coordonnées (Lighthill)

La méthode de distorsion peut être appliquée à d'autres problèmes de perturbations singulières que ceux de type cumulatif.

Soit par exemple à chercher la fonction $f(x)$ définie dans $0 \ll x \ll 1$ vérifiant l'équation et la condition aux limites

$$(x + \epsilon f) \frac{df}{dx} + f = 1, \quad f(1) = 2.$$

La recherche "naïve" d'un développement en ϵ conduit à:

$$f = \frac{1+x}{x} - \epsilon \frac{(1-x)(1+3x)}{2x^3} + \epsilon^2 \frac{(1+x)(1-x)(1+3x)}{2x^5} + \dots \quad (11)$$

La série en ϵ converge pour tout $\delta \ll x \ll 1$ où $\delta > 0$, mais le rayon de convergence tend vers zéro si x tend vers zéro. Le développement n'est pas uniformément valable dans $0 \ll x \ll 1$. Pourtant la solution exacte

$$f(x) = \left\{ \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{1+x}{\epsilon} + 4 \right\}^{1/2} - \frac{x}{\epsilon} \quad (12)$$

est finie en $x = 0$. La raison de cet échec tient à ce que l'équation est singulière lorsque $x = -\epsilon f$, alors que le procédé naïf porte cette singularité en $x = 0$.

Introduisons la "distorsion" de la coordonnée x :

$$x = s + \epsilon x_2(s) + \epsilon^2 x_3(s) + \dots, \quad (13)$$

et cherchons f sous la forme d'un développement

$$f(x, \epsilon) = f_1(s) + \epsilon f_2(s) + \epsilon^2 f_3(s) + \dots \quad (14)$$

Substituant dans (10), on obtient (en désignant avec un accent la dérivée par rapport à s):

$$(s f_1)' = 1, \quad f_1(1) = 2, \quad \text{soit} \quad f_1(s) = \frac{1+s}{s}, \quad (15)$$

$$(s f_2)' = f_1' (s x_2' - x_2 - f_1) = [x_2(1 - f_1) - \frac{1}{2} f_1^2]' \quad (16)$$

$$f_2(s) = \frac{c}{s} - \frac{1}{s^2} \left[x_2(s) + \frac{1+2s}{2s} \right]. \quad (17)$$

La règle pratique que l'on peut utiliser est la suivante:

On choisira $x_2(s)$ pour que, au voisinage du point singulier ($s = 0$), la seconde approximation ne soit pas plus singulière que la première.

Ceci laisse encore une grande latitude dans le choix de $x_2(s)$. Il suffit en effet que, au voisinage de $s = 0$, on ait par exemple:

$$x_2(s) = -\frac{1+2s}{s} + \xi_2(s) \quad (18)$$

avec $\xi_2(s) = O(s)$. Le terme en ϵ de $f(x, \epsilon)$ sera alors déterminé par $f_1(s)$ et $x_2(s)$; point n'est besoin de calculer $f_2(s)$. Si on prend $\xi_2 = 0$ il vient:

$$f(x, \epsilon) = \frac{1+s}{s} + \dots; \quad x = s - \epsilon \frac{1+2s}{s} + \dots \quad (10)$$

soit

$$f(x, \epsilon) = \left\{ \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{1+x}{\epsilon} + 1 \right\}^{1/2} - \frac{x}{\epsilon} + \dots \quad (19)$$

En comparant avec (12) on note que la différence entre la solution exacte et la présente approximation est bornée par $(3/2\sqrt{2}) (\epsilon)^{1/2}$ dans tout l'intervalle $[0, 1]$ car

$$\frac{\left\{ \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{1+x}{\epsilon} + 4 \right\}^{1/2} - \left\{ \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{1+x}{\epsilon} + 1 \right\}^{1/2}}{3\epsilon} = \frac{1}{[x^2 + 2(1+x)\epsilon + 4\epsilon^2]^{1/2} + [x^2 + 2(1+x)\epsilon + \epsilon^2]^{1/2}}$$

est uniformément bornée dans tout intervalle fixé $\alpha < x < 1$, où $\alpha > 0$ par $K\epsilon^2$ où K est une constante dépendant de α .

On notera d'ailleurs que, accidentellement ici, si on prend $\xi_2(s) = (3/2)s$ (ce qui assure que $x_2(1) = 0$), on retrouve par ce procédé d'approximation la solution exacte (12).

La figure 1 explique assez clairement la raison du succès de la méthode des échelles multiples. La déficience du développement naïf (11) apparaît au voisinage de la frontière $x = 0$ de l'intervalle limite; on dit que ce problème est un problème de perturbation singulière du type "couche" et plus précisément du type "couche limite".

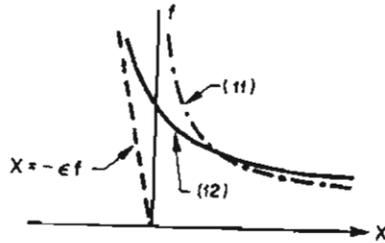


Figure 1

III.3 Méthode des Échelles Multiples

III.3.1 Oscillateur linéaire amorti

Nous allons à nouveau considérer un problème de perturbation singulière de type cumulatif ou séculaire, de l'oscillateur harmonique; celui, très simple, de la perturbation par un amortissement linéaire. Utilisant de suite des variables réduites, nous écrivons l'équation sous la forme

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dY}{dt} + Y = 0,$$

et, pour fixer les idées, nous prendrons les conditions initiales:

$$Y(0) = 0, \quad \frac{dY}{dt}(0) = 1.$$

Une remarque essentielle pour ce problème consiste à noter, dès le départ, que sa donnée implique deux échelles de temps, celle de la période de l'oscillation non perturbée égale ici à l'unité et celle donnée par ϵ^{-1} représentant la durée nécessaire (très longue) pour que les effets d'amortissement soient appréciables. Il est à prévoir que ces deux échelles vont jouer un rôle dans le problème et que le fait que leur rapport soit infiniment petit va entraîner le caractère singulier de notre problème.

Nous introduisons donc une variable temps t définie par:

$$t = \epsilon t; \quad (22)$$

où nous dirons que t est le "temps lent", et, comme dans la méthode de Poincaré, une variable temps modifiée construite à partir de t

$$t^* = t(1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots), \quad (23)$$

les ω_i sont ici des constantes, la constante ω_1 ayant été supposée nulle puisque les termes en ϵt sont pris en compte par t .

La méthode des échelles multiples consiste à chercher $Y(t, \epsilon)$ sous la forme d'une fonction de \bar{t} , t^* , ϵ où \bar{t} et t^* sont supposés être des variables indépendantes, que l'on développe en ϵ sous la forme:

$$Y(t, \epsilon) = Y_0(t^*, \bar{t}) + \epsilon Y_1(t^*, \bar{t}) + \epsilon^2 Y_2(t^*, \bar{t}) + \dots \quad (24)$$

On suppose que les $Y_p(t^*, \bar{t})$ et leurs dérivées sont effectivement indépendants de ϵ et bornés dans le domaine des valeurs de t^* , \bar{t} que l'on est conduit à considérer. On cherche à vérifier (20), et par suite on calcule

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial Y_0}{\partial t^*} (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) + \epsilon \frac{\partial Y_0}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial t^*} (1 + \dots) + \\ &\epsilon^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{t}^2} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial t^*} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^{*2}} (1 + 2\epsilon^2 \omega_2 + \dots) + 2\epsilon \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^* \partial \bar{t}} + \\ &\epsilon^2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial \bar{t}^2} + \epsilon \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^{*2}} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^* \partial \bar{t}} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^{*2}} + \dots \end{aligned}$$

En substituant dans (20) et en annulant successivement les coefficients du développement en ϵ ainsi obtenu, on a:

$$\begin{aligned} (20) \quad &\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^{*2}} + Y_0 = 0 \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^{*2}} + Y_1 = -1 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^* \partial \bar{t}} - 2 \frac{\partial Y_0}{\partial t^*}, \\ (21) \quad &\frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^{*2}} + Y_2 = -2\omega_2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 Y_0}{\partial \bar{t}^2} - 2 \frac{\partial Y_0}{\partial \bar{t}} - 2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^* \partial \bar{t}} - 2 \frac{\partial Y_1}{\partial t^*}. \end{aligned} \quad (26)$$

Naturellement, on obtient ainsi des équations aux dérivées partielles pour les fonctions de 2 variables introduites. Mais leur intégration ramène en fait à celle d'équations différentielles.

Compte tenu des conditions aux limites, (26)₁ donne

$$Y_0(t^*, \bar{t}) = A_0(\bar{t}) \cos t^* + B_0(\bar{t}) \sin t^*,$$

avec (utiliser (25)):

$$A_0(0) = 0, \quad B_0(0) = 1.$$

A ce stade les fonctions $A_0(\bar{t})$ et $B_0(\bar{t})$ sont donc largement indéterminées. Cherchons maintenant $Y_1(t^*, \bar{t})$. L'équation (26)₂ s'écrit:

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^{*2}} + Y_1 = 2 \left\{ \frac{dA_0}{d\bar{t}} \sin t^* - \frac{dB_0}{d\bar{t}} \cos t^* \right\} + 2 \{ A_0 \sin t^* - B_0 \cos t^* \}$$

Pour éviter les termes séculaires on peut imposer:

$$\frac{dA_0}{d\bar{t}} + A_0 = 0, \quad \frac{dB_0}{d\bar{t}} + B_0 = 0,$$

soit, compte tenu de (28):

$$A_0(\bar{t}) = 0, \quad B_0(\bar{t}) = \exp(-\bar{t}).$$

A ce stade du développement on a obtenu l'approximation (27), soit

$$Y(t, \epsilon) = \exp(-\epsilon t) \sin t + \dots,$$

qu'il faut comparer à la solution exacte

$$Y = \exp(-\epsilon t) \sin \left(\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} t}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right).$$

et qui constitue bien une approximation à $O(\epsilon)$ près dans tout intervalle de la forme $0 < t < K\epsilon^{-1}$, K étant une constante. Le développement n'aurait conduit à

$$Y = (1 - \epsilon t) \sin t$$

qui n'est une approximation valable à $O(\epsilon)$ près que dans un intervalle beaucoup plus petit $0 < t < K_1$, $K_1 = O(1)$, (à cause de la présence du terme séculaire).

Nous avons ainsi, dans ce cas simple, obtenu l'amplitude—lentement variable—à $O(\epsilon^2)$ près, mais aucune modification pour la période. Cherchons à calculer Y_1 ; d'après (29) et (30) on a

$$Y_1 = A_1(\bar{t}) \cos t^* + B_1(\bar{t}) \sin t^*$$

Les conditions initiales, d'après (25), montrent que

$$A_1(0) = 0, \quad B_1(0) = 0. \quad (34)$$

On ne peut être dit de plus à ce stade pour les fonctions $A_1(\bar{t})$ et $B_1(\bar{t})$.

Toute information complémentaire provient de l'équation en Y_2 pour laquelle nous voulons éviter les termes séculaires. Or elle s'écrit:

$$\frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^{*2}} + Y_2 = (1 + 2\omega_2) \exp(-\bar{t}) \sin t^* + 2 \left(\frac{dA_1}{d\bar{t}} \sin t^* - \frac{dB_1}{d\bar{t}} \cos t^* \right) + 2(A_1 \sin t^* - B_1 \cos t^*).$$

Pour éviter les termes séculaires on pourra prendre:

$$2 \left(\frac{dA_1}{d\bar{t}} + A_1 \right) + (2\omega_2 + 1) \exp(-\bar{t}) = 0. \quad (35)$$

$$\frac{dB_1}{d\bar{t}} + B_1 = 0.$$

Si le terme non homogène dans (35) n'était pas nul, il apparaîtrait dans A_1 un terme séculaire en $\bar{t} \exp(-\bar{t})$ qui ruinerait la qualité du développement. Compte tenu de (34), on est donc conduit à écrire

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2},$$

et au stade d'approximation atteint, on a obtenu

$$Y = \exp(-\epsilon t) \sin \left\{ (1 - \frac{1}{2}\epsilon^2)t \right\} + \dots \quad (36)$$

Cette fois la période est déterminée à $O(\epsilon^3)$ près (et même $O(\epsilon^4)$) et l'approximation trouvée est uniformément valable à $O(\epsilon^2)$ près.

On peut résumer les caractéristiques essentielles de la méthode des échelles multiples telles qu'elles sont apparues au cours de cet exemple élémentaire comme suit:

Lorsque les données du problème font apparaître que le petit paramètre est le rapport de deux échelles de temps—il en serait de même de deux échelles d'espace—la méthode consiste à introduire deux variables de temps construites avec ces échelles (l'une d'entre elles étant éventuellement distordue) et à envisager le développement formel de la solution en ϵ , chaque coefficient du développement étant fonction des deux variables temps ainsi introduites considérées tout au long du calcul comme indépendantes. Pour déterminer complètement un coefficient de ce développement, il ne suffit pas de résoudre l'équation où il apparaît pour la première fois. Les indéterminées

qui demeurent nécessairement sont à choisir en imposant que l'équation dans laquelle apparaît le terme suivant pourra conduire à une solution qui ne détruise pas la validité de l'approximation cherchée, mais, au contraire, assure au mieux cette validité.

III.3.2 Approche du cycle limite de l'oscillateur de Van der Pol

Il convient sans doute de compléter ce paragraphe par un exemple moins banal. A cet effet considérons un oscillateur de Van der Pol avec amortissement non linéaire, régi par l'équation réduite

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - \epsilon \left[\frac{dY}{dt} - \frac{1}{3} \left(\frac{dY}{dt} \right)^3 \right] + Y = 0, \quad (37)$$

et cherchons la solution pour laquelle

$$Y(0) = 0, \quad \frac{dY}{dt}(0) = a. \quad (38)$$

Nous nous contenterons de déterminer le premier terme et par suite les deux variables temps seront t et $\bar{t} = \epsilon t$. Nous écrirons

$$Y(t, \epsilon) = Y_0(t, \bar{t}) + \epsilon Y_1(t, \bar{t}) + \dots$$

On obtient aisément d'abord

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0, \quad Y_0 = A_0(\bar{t}) \cos t + B_0(\bar{t}) \sin t, \quad A_0(0) = 0,$$

$$B_0(0) = a,$$

puis l'équation définissant Y_1 :

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \bar{t}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial Y_0}{\partial t} \right)^3 + \frac{\partial Y_0}{\partial \bar{t}}. \quad (39)$$

Si on met le second membre sous la forme d'une somme de termes en $\sin pt$ et $\cos pt$, les coefficients étant des fonctions de \bar{t} , et si on écrit que les termes en $\sin t$ et $\cos t$ sont absents, on voit que $\alpha(\bar{t}) = A_0(\bar{t}) + iB_0(\bar{t})$ est nécessairement de la forme

$$\alpha(\bar{t}) = \frac{2 \exp(i\theta)}{\sqrt{1 - k \exp(-\bar{t})}}$$

où k et θ sont des constantes réelles qui sont déterminées par les conditions initiales $\alpha(0) = i a$. On a donc:

$$A_0 = 0, \quad B_0 = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - (a^2 - 4) \exp(-\bar{t})}}$$

en première approximation

$$Y = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - (a^2 - 4) \exp(-\epsilon t)}} \sin t + \dots \quad (40)$$

Ce premier terme montre à la fois l'existence du cycle limite (obtenu pour $a = 2$) et la manière dont une solution tend vers ce cycle si $a \neq 2$. L'amplitude varie très lentement pour atteindre finalement la valeur 2 (fig. 2). Pour obtenir le glissement de la fréquence en $O(\epsilon^2)$, il faudrait effectuer complètement la détermination de $Y_1(t, \bar{t})$, éventuellement en introduisant une distorsion possible dans la variable de temps rapide t .

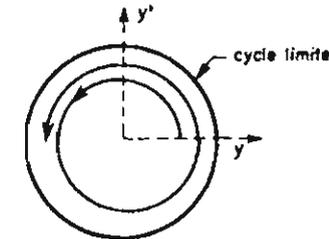


Figure 2 Approche du cycle limite

III.4 La Méthode des Développements Raccordés

Nous avons déjà signalé que lorsque le paramètre petit ϵ , présent dans l'énoncé d'un problème et qui incite à le traiter par une méthode asymptotique, est le rapport de deux longueurs ou de deux temps, on doit s'attendre à rencontrer un problème de perturbations singulières. Nous avons déjà envisagé, notamment en III.3, des exemples de tels problèmes de type cumulatif ou séculaire. Dans ces exemples le développement naïf qui ne peut tenir compte des effets dus au temps lent conduit à une solution approchée qui n'est valable que pour des durées trop courtes pour être intéressantes et qui de plus ne rend pas compte de propriétés essentielles du mouvement (par exemple de sa périodicité). Par contre, la méthode des échelles multiples, introduite sur des exemples, permet d'obtenir une représentation très satisfaisante du phénomène physique considéré.

Nous avons aussi, en III.2, traité un exemple de problème de type couche limite, nettement différent des précédents, en ce sens que la non validité du développement naïf se produisait et de façon catastrophique dès le premier terme au voisinage même de la frontière du domaine d'étude. A vrai dire ce problème de couche limite était de nature assez spéciale. Ceux que l'on rencontre habituellement apparaissent liés aux cas où le petit coefficient ϵ figure en facteur des termes contenant la ou les dérivées d'ordre

le plus élevé, si bien que l'équation régissant la perturbation n'est plus de même ordre que celle obtenue en faisant $\epsilon = 0$. C'est ce phénomène que nous allons étudier maintenant. Bien que souvent on puisse en aborder l'étude par une méthode d'échelles multiples, il est plus habituel et d'ailleurs plus intéressant de le traiter par la méthode dite des développements raccordés ou des approximations raccordées (matched asymptotic expansions). Nous aurons bien à introduire deux variables distinctes, de longueur par exemple, (une longue et une courte) mais chacune d'entre elles apparaît seule dans chacun de deux développements asymptotiques, qui ensemble permettent une représentation satisfaisante de la solution dans tout le domaine étudié. Illustrons de suite ces considérations sur un exemple élémentaire.

III.4.1 Etude d'un modèle linéaire à coefficients constants

Nous nous intéressons à la fonction $y(x, \epsilon)$ définie dans l'intervalle fermé $0 \leq x \leq 1$ par les conditions

$$L(y) = \epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - a = 0, \quad y(0, \epsilon) = 0, \quad y(1, \epsilon) = 1. \quad (41)$$

Deux échelles de longueur apparaissent : la longueur unité qui est celle de l'intervalle de définition et ϵ . L'équation (41) sera considérée comme un modèle des équations de Navier-Stokes, ϵ étant l'analogue d'un coefficient de dissipation supposé petit. Dans ces conditions, l'équation obtenue en faisant $\epsilon = 0$ sera un modèle des équations d'Euler régissant les écoulements de fluide parfait. Sa solution générale est ici très simple: $y = ax + b$, mais il est évidemment impossible de déterminer la constante b pour pouvoir satisfaire les deux conditions aux limites.

La solution complète du problème (41) s'écrit ici explicitement:

$$y(x, \epsilon) = (1 - a) \frac{1 - \exp(-\epsilon^{-1} x)}{1 - \exp(-\epsilon^{-1})} + ax. \quad (42)$$

Si sur (42) on effectue le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, on constate que pour tout $x \neq 0$, y tend vers

$$\bar{y}(x) = ax + 1 - a \quad (43)$$

qui est bien une solution de "l'équation d'Euler"

$$\frac{dy}{dx} = a \quad (44)$$

et qui vérifie bien la condition aux frontières en $x = 1$. Mais pour $x = 0$, la limite du second membre de (42) est nulle évidemment; dans le cas général où nous nous plaçons, $a \neq 1$, elle est différente de $\bar{y}(0)$. La conver-

gence de $y(x, \epsilon)$ vers $\bar{y}(x)$ est uniforme dans tout intervalle fixe fermé $0 < x < 1$, ($a > 0$), mais elle n'est pas uniforme dans l'intervalle d'étude $(0, 1)$, et plus particulièrement au voisinage de $x = 0$, c'est-à-dire dans la couche limite.

C'est dans cet intervalle qu'il faut faire intervenir la variable courte. Nous allons maintenant faire passer la variable x à la forme $x = \epsilon \xi$. C'est dans cet intervalle qu'il faut faire intervenir la variable courte. Nous allons maintenant faire passer la variable x à la forme $x = \epsilon \xi$. C'est dans cet intervalle qu'il faut faire intervenir la variable courte.

La variable "courte", appelée aussi variable *locale*; est celle qu'il faut choisir pour décrire le comportement de la solution dans la couche limite. On pose

$$\lim_{\xi} y(x, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \xi \in \epsilon^{-1} x} \mathcal{Y}(\epsilon \xi, \epsilon) = \bar{y}(\xi), \quad (45)$$

on trouve aisément à partir de (42) que:

$$\lim_{\xi} y(x, \epsilon) = \bar{y}(\xi) = (1 - a)(1 - \exp\{-\xi\}). \quad (46)$$

Comment aurait-on pu trouver (46) sans connaître (42)? Telle est la question essentielle que nous nous proposons d'examiner.

On note d'abord que $x = \epsilon \xi$ est une application linéaire conservant l'origine telle que, si on applique formellement l'opérateur \lim_{ξ} à l'équation (41) on obtienne effectivement, en faisant ensuite $\epsilon = 0$, une équation du second ordre "significative"† qui s'écrit

$$\lim_{\xi} \left\{ \left(\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - a \right) \epsilon \right\} = \frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2} + \frac{d\bar{y}}{d\xi} = 0, \quad (47)$$

et que, ensuite, (46) est bien une solution de (47) qui pour $\xi = 0$ prend la valeur 0. Mais reste à déterminer la seconde constante d'intégration dans l'intégrale de (47) pour obtenir (46).

On remarque alors (subtilement !) que $(1 - a)$ est dans (46) la valeur prise par $\bar{y}(\xi)$ pour ξ infini et dans (43) celle prise par $\bar{y}(x)$ pour $x = 0$. Telle est la condition qu'il faut écrire pour lever l'indétermination restante ou encore effectuer le "raccord" entre les deux représentations de la solution données par $\bar{y}(x)$ et $\bar{y}(\xi)$. La condition de raccord s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} \bar{y}(\infty) &= \bar{y}(0) \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lim_{\xi} y(x, \epsilon) &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_x y(x, \epsilon), \end{aligned} \quad (48)$$

où il est entendu que \lim_x désigne l'opération du passage à la limite quand ϵ tend vers zéro, x gardant une valeur fixe.

On dit que l'équation (47) est l'équation de la couche limite du problème (41) et que $\bar{y}(\xi)$ est la solution de cette équation pour ce même problème.

† Nous précisons cette notion plus loin. Voir III.4.4.

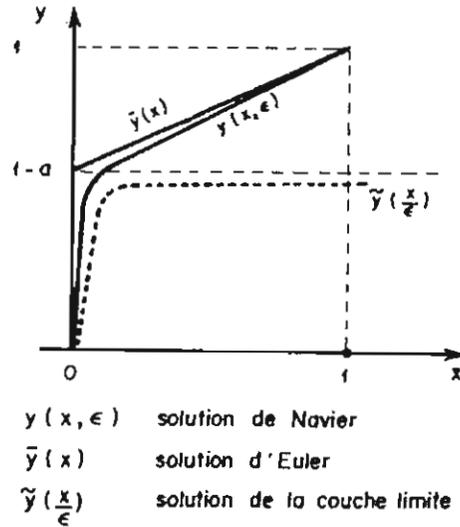


Figure 3

La figure 3 illustre les résultats trouvés. Elle suggère aussi que l'on peut trouver une représentation asymptotique \hat{y} , dite "composite", construite à partir de (43) et de (46) suivant le schéma:

$$y = \hat{y} + \bar{y} - (\text{partie commune}) \tag{49}$$

la "partie commune" étant d'ailleurs donnée ici par (48). On a ainsi

$$\hat{y}(x, \epsilon) = ax + (1 - a) \left(1 - \exp \left\{ -\frac{x}{\epsilon} \right\} \right) \tag{50}$$

III.4.2 Domaines de validité des approximations distale et proximale

Précisons les domaines de validité des approximations trouvées. A cet effet il n'est pas inutile d'utiliser une représentation graphique dans le plan x, ϵ (figure 4).

1) $|y - \bar{y}|$ et $|\hat{y} - \bar{y}|$ tendent tous les deux vers zéro, et uniformément quand le point (x, ϵ) ($\epsilon \neq 0$) tend vers un point quelconque du segment (I), ($0 < x < 1, \epsilon = 0$), pourvu que ce point reste dans un domaine fermé \mathcal{D}_1 , défini par une relation de la forme

$$\eta_1(\epsilon) < x < 1$$

où $\eta_1(\epsilon)$ est une fonction de ϵ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_1(\epsilon)/\epsilon = \infty$.

2) $|y - \bar{y}|$ et $|\hat{y} - \bar{y}|$ tendent uniformément vers zéro et uniformément quand le point (x, ϵ) tend vers le point $x = 0$ du segment (I) pourvu que ce point (x, ϵ) reste dans un domaine fermé \mathcal{D}_2 de la forme

$$0 < x < \eta_2(\epsilon)$$

où $\eta_2(\epsilon)$ est une fonction de ϵ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_2(\epsilon) = 0$. Naturellement, on peut trouver de tels domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ayant une partie commune. Leur réunion \mathcal{D}_0 recouvre donc tout le domaine du plan (x, ϵ) de la forme

$$0 < x < 1, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

On dit plus brièvement que cette réunion recouvre complètement l'intervalle (0.1).

Il est clair que l'on peut dire que l'approximation \bar{y} —qu'on appelle souvent l'approximation *extérieure* ou *distale* ou *régulière*—est uniformément valable dans \mathcal{D}_1 , que l'approximation \hat{y} —qu'on appelle souvent l'approximation *intérieure* ou *proximale* ou *locale*—est uniformément valable dans \mathcal{D}_2 et que l'approximation composite est uniformément valable dans \mathcal{D}_0 .

Raccorder deux approximations c'est écrire qu'elles ont un domaine commun de validité, c'est-à-dire dans lequel leur différence tend vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro, le point (x, ϵ) restant dans ce domaine commun. Si la réunion des domaines de validité de ces deux approximations recouvre l'intervalle d'étude $(0, 1)$, les approximations intérieure et extérieure définis-

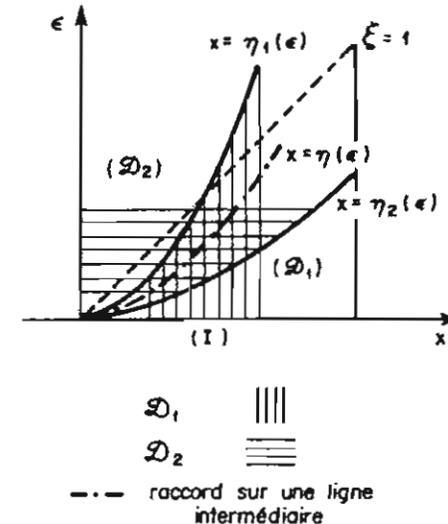


Figure 4

sent une approximation uniformément valable de y dans l'intervalle $0 \ll x \ll 1$.

Le raccord des deux approximations a en général pour but de déterminer une (ou plusieurs) constante qui n'a pu être trouvée directement. D'après ce que l'on vient de voir, il suffira d'écrire que $|\bar{y} - \bar{y}|$ tend vers zéro quand le point (x, ϵ) tend vers l'origine de (I) en restant dans le domaine de validité commun, c'est-à-dire par exemple sur une courbe

$$x = \eta(\epsilon) x^*, \quad x^* \text{ fixe,}$$

située à l'intérieur du domaine de validité commun ($\eta_2 < \eta < \eta_1$). On devra donc écrire

$$\lim_{\substack{x^* \text{ fixe} \\ \epsilon \rightarrow 0}} (\bar{y} - \bar{y}) = \lim_{x^*} (\bar{y} - \bar{y}) = 0. \quad (51)$$

A cet effet, on exprimera au préalable \bar{y} et \bar{y} avec x^* et ϵ . On dit que x^* est une variable *intermédiaire* et on qualifie souvent d'intermédiaire la limite figurant dans (51) prise à x^* fixé.

III.4.3 Approximations asymptotiques d'ordre supérieur. Règles de raccord

Si on veut former une représentation asymptotique plus précise de la solution d'un problème comme celui envisagé en (41), on cherchera:

—d'une part un développement asymptotique, appelé *extérieur* ou *distal* ou *régulier*, de la forme

$$y_{as}(x, \epsilon) = \bar{y}_0(x) + \epsilon \bar{y}_1(x) + \dots \quad (52)$$

qui, par hypothèse de travail, est escompté valable dans tout intervalle fermé $\alpha \ll x \ll 1$, $\alpha > 0$ et

—d'autre part un développement asymptotique appelé *intérieur* ou *proximal* ou *local* de la forme

$$\bar{y}_{as}(x, \epsilon) = \bar{y}_0(\epsilon) + \epsilon \bar{y}_1(\xi) + \dots \quad (53)$$

que l'on escompte valable au voisinage de $x = 0$. Les approximations $\bar{y}(x)$, $\bar{y}(\xi)$ étudiées plus haut représentent les termes dominants des développements (52) et (53).

Utilisant la représentation dans un plan (x, ϵ) comme plus haut, on peut définir le domaine \mathcal{D}_1 de validité de la série (52) réduite à ces deux premiers termes: c'est le domaine fermé de frontière (I) ($\epsilon = 0$, $0 \ll x \ll 1$) dans

lequel, si un point (x, ϵ) ($\epsilon \neq 0$) tend vers un point de I on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{y - (\bar{y}_0 + \epsilon \bar{y}_1)\} = 0 \quad (54)$$

uniformément par rapport à x ; de même le domaine \mathcal{D}_2 où l'on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{y - (\bar{y}_0 + \epsilon \bar{y}_1)\} = 0. \quad (55)$$

Les développements asymptotiques (52) et (53) réduits à leurs deux premiers termes constituent une approximation uniformément valable à $o(\epsilon)$ près si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ont une partie commune et si leur réunion recouvre l'intervalle $(0, 1)$.

Une première méthode de raccordement consistera alors à utiliser une limite intermédiaire "appartenant" à la partie commune. On écrira par exemple

$$\lim_{x^*} \frac{1}{\epsilon} \{(\bar{y}_0 + \epsilon \bar{y}_1) - (\bar{y}_0 + \epsilon \bar{y}_1)\} = 0, \quad (56)$$

généralisant ainsi (51).

Une autre méthode de raccord très populaire est la règle (m, n) qui généralise la règle très simple écrite en (48). Elle peut s'énoncer de la façon suivante: "Le développement intérieur jusqu'à $O(\epsilon^m)$ du développement extérieur jusqu'à $O(\epsilon^n)$ est égal au développement extérieur jusqu'à $O(\epsilon^n)$ du développement intérieur jusqu'à $O(\epsilon^m)$."

Naturellement il faut exprimer les deux membres de l'égalité avec les mêmes variables x, ϵ ou ξ, ϵ afin de pouvoir écrire l'identité.

Ces deux règles de raccord constituent des hypothèses de travail qui le plus souvent conduisent au résultat correct. Mais il faut bien se garder de leur donner une valeur absolue. L'idée essentielle semble bien celle des "domaines de validité" d'une approximation; la règle de la limite intermédiaire est une méthode simple de l'exploiter. Quant à la règle (m, n) on a pu montrer qu'elle s'applique bien dans le cas très général où les fonctions $\bar{y}_p(x)$, $\bar{y}_q(\xi)$ ont certaines propriétés analytiques simples.

Il convient de noter enfin que l'on peut étendre ces considérations au cas où l'on doit user d'échelles $\delta_m(\epsilon)$ autres que celle des ϵ^m .

L'application de ces concepts à l'équation (41) se révèle assez banale vu la simplicité du problème. Mais bien sûr il n'est que trop facile de compliquer un peu le modèle pour illustrer la mise en oeuvre de la méthode.

III.4.4 Equations limites formelles. Equations significatives

Nous avons analysé avec assez de détails la question du raccord. Mais dans le traitement fait en III.4.1 pour trouver $\bar{y}(x)$ et $\bar{y}(\xi)$, il reste de nombreux points à éclaircir si on veut trouver ces termes de façon cohérente sans

connaître la solution exacte. Il convient pour ce faire d'appliquer à l'équation (41) l'opérateur $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ introduit en (51). On obtient alors

$$\frac{\epsilon}{\eta^2} \frac{d^2y}{dx^{*2}} + \frac{1}{\eta} \frac{dy}{dx^*} - a = 0.$$

Il est alors commode d'introduire la notion d'ordre ou plutôt de classe d'ordre pour les échelles. On dira que "ord $\epsilon <$ ord η " si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \eta^{-1} \rightarrow 0$ et que ord $\epsilon =$ ord η si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \eta^{-1}$ existe et n'est ni nulle ni infini. Ceci dit, si on effectue la limite formelle de (57) on obtient les résultats suivants—on notera que l'on a rétabli la variable x dans le résultat pour faciliter la comparaison:

$$\text{ord } \eta = \text{ord } 1 : \frac{dy}{dx} - a = 0 \quad (E_1)$$

$$\text{ord } \epsilon < \text{ord } \eta < \text{ord } 1 : \frac{dy}{dx} = 0 \quad (E_2)$$

$$\text{ord } \eta = \text{ord } \epsilon : \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (E_3)$$

$$\text{ord } \eta < \text{ord } \epsilon : \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (E_4)$$

Nous dirons que ces équations E_i sont des η -limites de l'équation initiale ou encore que les premiers membres de ces équations sont des *dégénérescences* de l'opérateur $L(y)$.

Il est naturel de poser les définitions suivantes:

1) Si F est une équation, si F_1 est une η_1 -limite de F , F_2 une η_2 -limite de F et si aussi F_2 est une η_2 -limite de F_1 , nous dirons que l'équation F_1 contient l'équation F_2 .

2) Une équation limite F_1 est dite "significative" si elle n'est contenue dans aucune autre limite de F .

3) Le domaine formel de validité d'une équation F_1 limite de F est constitué par les classes ord η telles que la η -limite de F est soit F_1 , soit une équation limite contenue dans F_1 .

Ici il est clair que (E_1) et (E_3) sont des équations significatives; ce sont respectivement les équations (44) et (47). Le domaine de validité de (E_1) est

$$\Delta_1 = \{ \eta \mid \text{ord } \eta > \text{ord } \epsilon \}$$

celui de (E_3) est

$$\Delta_2 = \{ \eta \mid \text{ord } \eta < \text{ord } 1 \}.$$

(57) On constate dans ce cas que les domaines Δ_1 et Δ_2 sont les domaines décrits autrement par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 à l'aide de la représentation graphique de la figure 4.

Ceci acquis, la construction des approximations $\bar{y}(x)$ et $\bar{y}(\xi)$ et leur aptitude à constituer une approximation uniformément valable de la solution supposée inconnue) de (41) reposent sur l'énoncé suivant:

Hypothèses de travail sur les domaines de validité—Si y est une solution de l'équation E , si E_p une équation limite de E , alors il existe au moins une solution y_p de E_p dont le domaine de validité comprend le domaine formel de validité de l'équation E_p .

(58) D'après cette hypothèse de travail, on est en droit d'attendre qu'il existe une solution y_1 de E_1 dont le domaine de validité \mathcal{D}_1 soit au moins égal à Δ_1 . Cette équation devra donc satisfaire la condition aux limites pour $x = 1$. C'est la solution $\bar{y}(x)$. De même, il existe une solution y_3 de E_3 dont le domaine de validité \mathcal{D}_2 soit au moins égal à Δ_2 ; c'est une solution de (47) qui vérifie donc $y_3(0) = 0$. Comme la réunion de Δ_1 et de Δ_2 couvre tout l'intervalle $(0, 1)$, il en est de même de \mathcal{D}_1 et de \mathcal{D}_2 : on peut donc écrire la condition de raccord.

On voit en particulier comment l'hypothèse travail permet de préciser quelle condition aux limites doit être appliquée à chacune des équations significatives.

En pratique on procédera plus simplement, par exemple, s'il y a lieu, en tenant compte de remarques physiques évidentes. Dans le cas de l'équation (41), on peut voir qu'il ne peut exister de couche limite qu'en un point frontière situé à gauche de l'intervalle. C'est donc la condition en $x = 1$ qui est conservée pour "l'équation d'Euler", (44).

III.4.5 Exemple élémentaire d'une double couche limite

Il est parfois nécessaire d'introduire plusieurs échelles comme le montre l'exemple élémentaire suivant:

Soit:

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(1 + \frac{\epsilon}{x + \epsilon^2} \right) \phi = 0,$$

une équation dont on cherche, dans le domaine $x \gg 0$, la solution vérifiant

$$\phi(0) = 1.$$

Le phénomène physique gouverné par ce modèle comporte 3 échelles de longueur, $x = O(1)$, $x = O(\epsilon)$, $x = O(\epsilon^2)$. Au voisinage de $x = 0$ on se vrait vraisemblablement conduit à introduire les variables locales† ξ et $\bar{\xi}$

$$x = \epsilon \xi, \quad x = \epsilon^2 \bar{\xi}.$$

C'est bien ce que montre d'ailleurs la solution exacte de ce problème

$$\phi(x, \epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + x} \exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Il est facile de voir qu'il est impossible d'obtenir une représentation asymptotique correcte en utilisant les remarques précédentes avec une seule des variables ξ ou $\bar{\xi}$. Si on cherche une solution locale de la forme

$$\phi(x, \epsilon) = \sum_0^{\infty} \epsilon^n \psi_n(\xi),$$

on trouve

$$\psi_0 = A \xi^{-1} \exp(-\xi)$$

et on ne peut écrire la condition aux limites

Si on cherche la solution locale sous la forme

$$\phi(x, \epsilon) = \sum_0^{\infty} \epsilon^n \bar{\psi}_n(\bar{\xi}),$$

on trouve bien d'abord

$$\bar{\psi}_0 = (1 + \bar{\xi})^{-1},$$

mais on s'aperçoit qu'on ne peut trouver $\bar{\psi}_1$.

On trouvera donc des problèmes de type couche limite comme celui-ci où plusieurs représentations locales devront être mises en oeuvre et déterminées simultanément par les conditions aux limites et par les conditions de raccord.

III.4.6 Indications sur un modèle non linéaire

Nous n'évoquerons, sans faire les justifications complètes, qu'un seul exemple simple non linéaire qui permettra de mettre en évidence certaines particularités dues à la non linéarité. Nous considérons l'équation ($\epsilon > 0$)

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

On peut effectuer l'intégration complète de cette équation sans difficulté

† Dans un cas comme celui-ci le terme "local" est préférable aux termes "intérieur" ou "proximal".

on peut montrer, après une étude qui demande quelque soin, qu'il existe dans le plan (x, y) un arc intégral et un seul passant par deux points donnés (x_0, y_0) et (x_1, y_1) (x restant borné).

Pour fixer les idées, nous prendrons donc les conditions aux limites, a et b étant deux nombres réels,

$$y(-1) = a, \quad y(1) = b. \tag{60}$$

Il est facile alors d'étudier la limite de cette intégrale lorsque, a, b étant fixes, on fait tendre ϵ vers zéro. On obtient alors les résultats figurés schématiquement sur la figure 5.

On peut retrouver ces résultats à partir de:

1) l'intégrale de l'équation "d'Euler"

$$y^2 = K^2 \tag{61}$$

2) l'étude de l'équation de la couche limite. Si on pose pour étudier une couche limite au voisinage de x_0

$$x - x_0 = \epsilon \xi, \quad \epsilon > 0,$$

on vient l'équation de la couche limite:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{\xi}^2} - 2\bar{y} \frac{d\bar{y}}{d\bar{\xi}} = 0. \tag{62}$$

Cette équation n'est pas essentiellement plus simple que l'équation complète de départ. Mais l'une des conditions aux limites exprimant le raccord est à écrire pour $\xi = +\infty$ où $\xi = -\infty$. On a donc:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{\xi}} = \bar{y}^2 - k^2$$

où $y = k$ est la solution d'Euler à laquelle on doit raccorder la couche limite.

Si $k = 0$, l'intégrale générale de cette équation est:

$$\bar{y} = \frac{\alpha}{1 - \alpha \bar{\xi}}, \quad \bar{y}(0) = \alpha, \tag{63}$$

étant une constante. Si $k \neq 0$ on a:

$$y = -k \operatorname{th} k(\bar{\xi} - \beta), \quad \bar{y}(0) = \alpha = k \operatorname{tg} k\beta, \quad |\alpha| < k \tag{64}$$

ou

$$y = -k \operatorname{Coth} k(\bar{\xi} - \beta), \quad \bar{y}(0) = \alpha = k \operatorname{Coth} k\beta, \quad |\alpha| > k. \tag{65}$$

La figure 5 résume les différents cas que l'on peut obtenir:

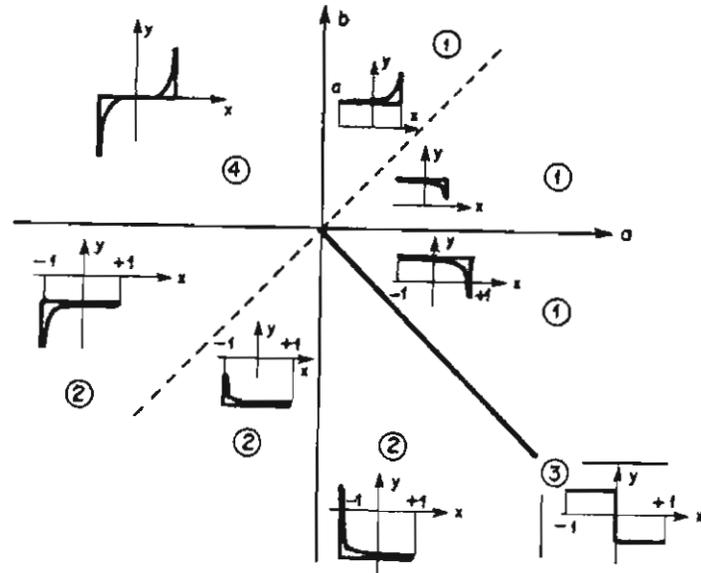


Figure 5

- 1) Si $a > 0, b > -a$, il y a une couche limite au voisinage de $x = k = K = a$.
- 2) Si $b < 0, a < -b$, il y a une couche limite au voisinage de $x = -1$ et $k = K = b$.
- 3) Si $a > 0, b < 0$ et $a = -b$; la considération de l'équation d'Euler (61) et l'analyse de l'équation de Prandtl (62) conduisent à une indétermination. Le passage à la limite sur la solution de l'équation exacte donne:

$$y = -a \operatorname{th} \frac{ax}{\epsilon}$$

et révèle l'existence d'une couche de choc au voisinage de $x = 0$.

- 4) Si $a < 0$ et $b > 0$, la seule possibilité consiste à prendre $K = k = 0$. On y a, en général, deux couches limites au voisinage de $x = -1$ et $x = 1$ qui sont données par des expressions du type (63).

On peut vérifier que toutes les déterminations ainsi effectuées sont uniques—hors le cas (3) déjà signalé—et que le résultat trouvé est bien la limite de la solution complète du problème complet (59)–(60).

De cette analyse nous soulignerons les conclusions suivantes:

—La considération de la compatibilité des solutions d'Euler et de Prandtl ne suffit pas toujours pour déterminer de façon unique l'approximation uniformément valable de la solution exacte, (cas (3)).

—Si dans les cas généraux (1) et (2) il n'y a qu'une seule couche limite au voisinage de l'un des points frontières de l'intervalle où l'on étudie la solution, il peut arriver, comme dans le cas général (4) que l'on observe deux couches limites.

—On peut trouver des solutions limites vérifiant les deux conditions aux limites et l'équation d'Euler (61), l'équation différentielle (59) avec $\epsilon \neq 0$ étant vérifiée au sens des distributions dans tout l'intervalle $-1 < x < 1$; mais ces solutions présentent un choc. Une solution "avec choc" ne peut avoir lieu que dans le cas (3). On notera qu'au voisinage du choc $x = x_c$, on a pour cette solution limite

—On peut trouver des solutions limites vérifiant les deux conditions aux limites et l'équation d'Euler (61), l'équation différentielle (59) avec $\epsilon \neq 0$ étant vérifiée au sens des distributions dans tout l'intervalle $-1 < x < 1$; mais ces solutions présentent un choc. Une solution "avec choc" ne peut avoir lieu que dans le cas (3). On notera qu'au voisinage du choc $x = x_c$, on a pour cette solution limite

$$y(x_c - 0) + y(x_c + 0) = 0, \quad y(x_c - 0) \geq y(x_c + 0). \quad (66)$$

Les relations (66) donnent à la fois l'égalité et l'inégalité qui doivent être satisfaites au droit d'un choc.

Les phénomènes qui viennent d'être dégagés tiennent essentiellement du caractère non-linéaire du problème.

1.5 La Méthode des Développements Composés

Dans certains cas particulièrement favorables, il est possible de deviner a priori la forme d'un développement composite uniformément valable.

Par exemple, si on reprend le problème particulièrement simple (41), on peut se proposer de chercher la solution sous la forme

$$y(x, \epsilon) = [h_0(x) + \epsilon h_1(x) + \dots] + \exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) [k_0(x) + \epsilon k_1(x) + \dots] \quad (67)$$

En substituant dans (41) et en écrivant que les coefficients de ϵ^p et de $\exp(-x/\epsilon)\epsilon^p$ sont nuls, on obtient aisément

$$y(x, \epsilon) = (1 - a)(1 - \exp\{-\epsilon^{-1}x\}) + ax + \dots \quad (68)$$

L'approximation ainsi trouvée est supposée être uniformément valable dans $(0, 1)$ avec une erreur inférieure à toute puissance de ϵ . C'est ce que

on peut vérifier par comparaison avec la solution exacte. D'ailleurs l'expression écrite au second membre de (68) n'est autre que l'approximation composite $\tilde{y}(x, \epsilon)$ donnée en (50).

Une telle méthode, qui a cependant été appliquée avec succès dans certains cas, ne peut être que d'un emploi exceptionnel. Il faut, pour obtenir une cohérence satisfaisante, être en mesure de déterminer tous les termes du développement composite et de montrer, à tout ordre, la validité de ce développement asymptotique composite.

Conclusion

Au terme de ce chapitre d'introduction où nous avons tenté d'introduire quelques idées simples sur les méthodes de perturbations singulières, reprenons rapidement quelques-unes des conclusions dégagées à propos d'exemples élémentaires qui ont été traités.

On rencontre de façon générale deux grands types de problèmes de perturbations singulières, le type "cumulatif ou séculaire" et le type "couche". La méthode la plus indiquée pour traiter les problèmes du premier type est la méthode des échelles multiples. Bien que très souvent cette méthode puisse aussi être utilisée pour traiter certains problèmes du type couche, la méthode des développements raccordés est souvent préférable car elle conduit à des calculs plus simples, car elle prend directement en compte le fait que les approximations asymptotiques représentant la solution dans un sous-domaine donné ne font intervenir que l'une ou l'autre des variables, lente ou rapide, qui apparaissent de façon essentielle dans la formulation même du problème.

Outre ces deux méthodes générales, on peut aussi faire appel à la méthode de distorsion des coordonnées. Cette méthode a l'avantage d'être conceptuellement plus simple et de fournir directement une représentation numérique formellement valable de la solution. Mais son domaine d'application est limité. Elle donne de bons résultats pour l'étude de problèmes gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique (c'est-à-dire pour des problèmes de propagation d'ondes (problèmes de type cumulatif) et par suite peut, dans certains cas, remplacer la méthode des échelles multiples. Nous avons vu, d'ailleurs, qu'il y a souvent intérêt à l'application de cette méthode à effectuer une distorsion sur la variable rapide. Elle échoue, en général, dans l'étude de problèmes régis par un système de type elliptique. Elle ne peut être appliquée dans le cas où un petit paramètre apparaît comme coefficient des dérivées d'ordre supérieur car pour lesquels la méthode des développements raccordés se révèle particulièrement efficace.

Insistons enfin sur le fait que les méthodes de perturbations singulières ne suffisent pas pour obtenir un résultat d'approximation rigoureusement établi. Ce sont des méthodes fondamentalement heuristiques de construction d'approximation asymptotiques uniformément valables.

L'étude de ces méthodes consiste à préciser les règles de cohérence auxquelles on peut s'appuyer dans les applications. Plus ces règles sont formulées avec soin plus on a de chances d'obtenir le résultat convenable. Mais dans l'ignorance de la solution complète on ne peut jamais être certain en toute généralité et en toute rigueur du résultat obtenu, tant qu'une démonstration mathématique n'a pas été produite. Ceci étant dit, il convient de redire en terminant que, grâce aux analyses très fines qui ont été faites à l'expérience acquise, on peut avec grande sécurité faire appel à ces méthodes pour attaquer des problèmes nouveaux et difficiles.

Sur quelques Applications à la Mécanique des Fluides de la Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés

Introduction

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en œuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés pour étudier, à titre d'illustration, certains problèmes de mécanique des fluides. Ceux-ci, même dans les cas les plus simples, sont régis par une équation aux dérivées partielles ou, plus généralement, par un système d'équations aux dérivées partielles. La méthode dont nous nous exposons les grandes lignes sur des modèles simples devra donc être étendue à des cas plus complexes du point de vue mathématique.

Nous commencerons donc IV.1 par rassembler de façon succincte mais assez précise les définitions et hypothèses de travail dégagées pour l'essentiel dans le chapitre précédent, mais formulées ici pour des équations aux dérivées partielles et pour leurs solutions qui sont des fonctions de plusieurs variables. Nous aborderons ensuite, en IV.2, le problème de l'écoulement rectiligne d'un fluide parfait incompressible et visqueux dans le cadre classique de la magnétohydrodynamique des fluides, aux grands nombres de Hartmann. Il s'agit d'un problème de couche limite portant sur une équation aux dérivées partielles très simple de type elliptique et à coefficients constants. L'étude mathématique a pu être poussée très avant, en ce sens que des démonstrations ont pu être données prouvant la validité des résultats. Nous n'évoquons pas ces travaux et nous nous contenterons de l'étude heuristique et constructive des approximations et développements asymptotiques pour montrer la mise en œuvre des méthodes dégagées en IV.1.

Nous avons prévu initialement d'aborder, au moins sommairement, l'étude très classique de la couche limite le long d'un obstacle ou d'une paroi, qui à elle seule fait l'objet de nombreux et volumineux ouvrages et d'évoquer d'autres problèmes importants de mécanique des fluides nécessitant l'application des méthodes de développements raccordés (écoulements aux faibles nombres de Reynolds, structure d'une onde de choc, ...). Le temps réservé à ces conférences était trop court pour nous permettre de réaliser ce projet. Nous avons donc dû nous contenter de l'exemple simple, mais instructif, qui fait l'objet de IV.2.

IV.1 Définitions Générales et Hypothèses de Travail

Comme toujours ϵ est une variable réelle positive. Une échelle $\delta(\epsilon)$ est une fonction de ϵ à valeurs réelles et positives définie dans l'intervalle $0 < \epsilon \ll \epsilon_0$ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$ existe ou soit infinie (pour $\epsilon = 0$, l'ensemble des valeurs s'accumule à au plus un élément).

IV.1.1 Définitions relatives à une fonction

Nous considérons une fonction $\phi(x, y, \epsilon)$ définie dans $D_0 \times [0, \epsilon_0]$, D_0 étant un domaine fermé du plan x, y .

1) $\phi(x, y, \epsilon) = O(\delta)$ dans le sous-domaine fermé D_1 de D_0 s'il existe deux constantes k, ϵ_1 positives telles que

$$|\phi| < k\delta \text{ si } (x, y) \in D_1, \quad 0 < \epsilon \ll \epsilon_1.$$

2) $\phi(x, y, \epsilon) = o(\delta)$ dans D_1 si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta^{-1} \phi = 0 \text{ en tout point de } D_1.$$

3) $\phi_{as} = \sum_0^m \delta_n(\epsilon) \phi_n(x, y, \epsilon)$ est une série asymptotique (de rang $m + 1$) dans D_1 si:

$$\delta_{n+1} = o(\delta_n) \text{ pour tout } n \ll m - 1$$

$$\phi_n = O(1) \text{ pour } (x, y) \in D_1, n \ll m.$$

4) ϕ_{as} est une approximation asymptotique de ϕ (de rang $m + 1$) dans D_1 si

$$\phi - \phi_{as} = R_m = o(\delta_m).$$

5) Une approximation asymptotique ϕ_{as} de ϕ dans D_1 est dite régulière si les ϕ_n ne dépendent pas de ϵ . Alors les ϕ_p peuvent être définis par des passages à la limite successifs ($p = 0, \dots, m$)

$$\phi_p(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \delta^{-1} [\phi(x, y, \epsilon) - \sum_0^{p-1} \delta_n(\epsilon) \phi_n(x, y)] \}.$$

On dit aussi alors que ϕ_{as} est un développement asymptotique régulier de ϕ (à $m + 1$ termes).

Si D_1 est identique à D_0 , on dit que l'approximation asymptotique est uniformément valable ou plus simplement uniforme.

Dans les problèmes de type couche et plus spécialement de type couche limite, il existe des développements asymptotiques dont le domaine de validité consiste en un voisinage d'un arc L de largeur d'autant plus étroite que ϵ est petit. Pour simplifier nous supposerons qu'il existe une application bijective continue $(x, y) \leftrightarrow (x', y')$ telle que sur l'image de L on ait $x' = 0$. Cette transformation permet d'introduire les définitions suivantes:

6) Avec deux échelles $\delta_\xi = o(1), \delta_\eta = O(1)$ on construit un système de variables locales le long de L par les formules

$$x' = \delta_\xi \xi, \quad y' = \delta_\eta \eta.$$

7) Si D_1^* est un sous-domaine fermé de (ξ, η) et ϕ_{as}^* une série asymptotique

définie dans D_1^* , de la forme

$$\phi_{as}^* = \sum_0^m \delta_n^*(\epsilon) \phi_n(\xi, \eta),$$

on dit que ϕ_{as}^* est une approximation asymptotique locale de ϕ (ou un développement asymptotique local à $m + 1$ termes de ϕ) dans D_1^* si, dans D_1^*

$$\phi(x, y, \epsilon) - \phi_{as}^*(\xi, \eta, \epsilon) = R_m^* = o(\delta_m^*).$$

8) Nous définirons de façon naturelle la limite locale (ξ, η) par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x, y, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi^*(\xi, \eta, \epsilon) = \lim_{\xi, \eta \text{ fixés}} \phi(x, y, \epsilon);$$

est-à-dire la limite obtenue quand $\epsilon \rightarrow 0$, ξ et η gardant des valeurs fixes. Ainsi on peut écrire ($p = 0, 1, 2, \dots, m$)

$$\phi_p(\xi, \eta) = \lim_{\xi, \eta} \left\{ \frac{(\phi(x, y, \epsilon) - \sum_0^{p-1} \delta_n^*(\epsilon) \phi_n(\xi, \eta))}{\delta_p^*(\epsilon)} \right\}.$$

Remarque Un processus de limite locale est défini dans l'espace x, y, ϵ par un arc de courbe Γ ayant une extrémité dans le plan $\epsilon = 0$, ou une famille d'arcs de courbes ayant cette extrémité dans un sous-domaine de D_0 ou sur un arcs L de D , ou encore en un point de D .

9) Une approximation asymptotique uniforme dans D_0 s'exprimant à l'aide d'approximations asymptotiques régulières et locales, chacune d'entre elles étant valable dans certains sous-domaines de D_0 est appelée une approximation composite.

IV.1.2 Définitions relatives à un opérateur ou à une équation

Toutes ces définitions sont relatives à l'approximation d'une fonction $\phi(x, y, \epsilon)$ donnée et faciles à appliquer dans ce cas. Mais en général, on aura simplement que ϕ vérifie dans un domaine D une certaine équation dépendant du petit paramètre ϵ . Soit:

$$L\phi = 0,$$

l'opérateur L pouvant dépendre de ϵ , cette équation et $D_0 = D + \partial D$, la fermeture de D .

On supposera que pour toute fonction $f(x, y)$, $Lf = O(1)$ mais que $Lf \neq o(1)$.

1) La série $\phi_{as} = \sum_{n=0}^m \delta_n \phi_n(x, y)$ est une approximation régulière formelle de ϕ , ϕ étant une solution de $L\phi = 0$, dans $D_1 \subset D_0$ (à $m + 1$ termes) si

pour tout $(x, y) \in D_1$

$$L\phi_{as} = \sum_0^q \delta_n \theta_n(x, y) + Z_q, \quad \delta_{n+1} = o(\delta_n), \quad q \gg m$$

avec:

$$\theta_n = 0 \text{ pour } n = 0, 1, \dots, m, \quad Z_q = o(\delta_q).$$

2) La série $\phi_{as}^* = \sum_{n=0}^m \delta_n^* \phi_n^*(\xi, \eta)$ est une *approximation locale formelle* ϕ dans D_1^* si, pour tout (ξ, η) de D_1^* , on peut écrire:

$$\delta^* L\phi_{as}^* = \sum_{n=0}^{q^*} \delta_n^* \theta_n^*(\xi, \eta) + Z_q^*, \quad \delta_{n+1}^* = o(\delta_n^*),$$

$$\delta_0^* = 1, \quad q^* \gg m,$$

avec:

$$\theta_n^* = 0 \text{ pour } n = 0, 1, \dots, m; \quad Z_q^* = o(\delta_q^*).$$

Remarques sur la terminologie Les approximations asymptotiques formelles ϕ_{as} et ϕ_{as}^* sont aussi appelées *développements asymptotiques formels*. Le qualificatif *régulier* est parfois remplacé par "extérieur" ou "distal". Le qualificatif *local* par "intérieur" ou "proximal".

Exemples

a) Si $L = \epsilon L_2 + L_1$, où par exemple

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_1 = -\frac{\partial}{\partial y},$$

$\phi_{as} = \sum_0^m \epsilon^n \phi_n(x, y)$ est une approximation régulière si

$$\theta_0 = L_1 \phi_0 = 0 \quad \theta_n = L_1 \phi_n + L_2 \phi_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

b) On peut avoir à considérer des approximations locales formelles même si ϵ n'intervient pas dans l'équation. Prenons ici l'opérateur

$$L_2 + L_1$$

où L_2 et L_1 sont définis par (1) et les variables locales

$$x = \epsilon^{1/2} \xi, \quad y = \eta$$

$\phi_{as}^* = \sum_0^m \epsilon^n \phi_n^*(\xi, \eta)$ est une approximation locale formelle si

$$\theta_0^* = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = 0$$

$$\theta_n^* = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi_n}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \psi_{n-1}}{\partial \eta^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

V.1.3 Approximations significatives—Domaines de validité

Nous introduisons d'abord la notation suivante: on notera $E_{\xi, \eta}^{(m)}$, l'opérateur qui associe à une fonction $\phi(x, y)$ son développement asymptotique $\phi_{as}^* = \sum_{n=0}^m \delta_n^*(\epsilon) \psi_n(\xi, \eta)$ introduit plus haut, autrement dit nous écrirons $\phi_{as}^* = E_{\xi, \eta}^{(m)} \phi$. On notera de même $\phi_{as} = E_{x, y}^{(m)} \phi$.

Ceci fait, nous pourrons, dans certains cas, comparer deux approximations asymptotiques en faisant appel à la définition suivante:

Définition Soient deux systèmes de variables locales ξ_1, η_1 , et ξ_2, η_2 . Si $E_{\xi_1, \eta_1}^{(q)} \phi$ et $E_{\xi_2, \eta_2}^{(p)} \phi$ existent $[(\xi_1, \eta_1) \in D_1^*, (\xi_2, \eta_2) \in D_2^*]$ et si $E_{\xi_1, \eta_1}^{(q)} \phi = E_{\xi_2, \eta_2}^{(p)} \phi$, $(\xi_1, \eta_1) \in D_1^*$, alors on dit que l'approximation $E_{\xi_1, \eta_1}^{(q)} \phi$ est contenue dans $E_{\xi_2, \eta_2}^{(p)} \phi$.

Cette définition se justifie aisément: l'opérateur d'approximation $E_{\xi_1, \eta_1}^{(q)}$ donne le même résultat si on l'applique à ϕ ou à $E_{\xi_2, \eta_2}^{(p)} \phi$. Son application ne peut donc fournir aucune autre indication sur le comportement de ϕ que celles qui sont déjà incluses dans la connaissance de $E_{\xi_2, \eta_2}^{(p)} \phi$.

Définition Si on considère l'ensemble des approximations d'une fonction $\phi(x, y, \epsilon)$ définie dans le domaine D_0 , nous dirons que dans cet ensemble, une approximation est significative si elle n'est contenue dans aucune autre.

On peut étendre la notion de domaine de validité d'une approximation, donnée au chapitre précédent en considérant dans l'espace à trois dimensions x, y, ϵ le domaine $\mathcal{D}_0 = D_0 \times [0, \epsilon_0]$. Précisons, par exemple, cette notion dans le cas d'une approximation locale (A) valable au voisinage d'un arc de courbe L appartenant au domaine fermé D_0 . Un processus d'approximation locale est défini par une surface de l'espace x, y, ϵ coupant le plan $\epsilon = 0$ suivant L .

On dit qu'un sous domaine \mathcal{D}_A de \mathcal{D}_0 appartient au domaine de validité de l'approximation locale (A) si toutes les surfaces que l'on peut tracer dans \mathcal{D}_A et coupant $\epsilon = 0$ suivant L définissent soit l'approximation (A) elle-même, soit une approximation contenue dans (A).

Si deux approximations d'une même fonction ont des domaines de validité qui ont une partie commune qui soit elle-même un domaine \mathcal{D} (ayant au moins un point frontière dans D_0 pour ϵ tendant vers zéro), on dit que ces deux approximations se raccordent.

Nous ferons une première hypothèse de travail.

Hypothèse de travail 1 Nous admettrons qu'il n'existe pour les fonctions $\phi(x, y, \epsilon)$ étudiés qu'un nombre fini d'approximations significatives et que l'on peut trouver pour chacune d'elles un domaine de validité, tel que la réunion de tous ces domaines de validité recouvre tout le domaine \mathcal{D}_0 .

Cette hypothèse revient à dire qu'on peut former avec l'ensemble de ces approximations significatives une approximation de ϕ uniformément valable.

IV.1.4 Règles de raccord de deux approximations

L'existence d'un arc Γ compris dans le domaine de validité commun à deux approximations locales définies par (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) permet d'introduire des coordonnées locales intermédiaires (ξ_i, η_i) telles que pour un système d'entiers m, q, s on ait

$$E_{\xi_i, \eta_i}^{(s)} E_{\xi_1, \eta_1}^{(m)} \phi = E_{\xi_i, \eta_i}^{(s)} \phi$$

$$E_{\xi_i, \eta_i}^{(s)} E_{\xi_2, \eta_2}^{(q)} \phi = E_{\xi_i, \eta_i}^{(s)} \phi.$$

En écrivant l'identité du résultat des opérations définies sur ϕ par les deux premiers membres, on obtient $s + 1$ égalités traduisant les règles de raccord. Telles sont les règles de raccord tirées de l'existence d'approximations intermédiaires.

La règle (m, q) de Van Dyke est un peu différente et, si son application est assez simple, sa justification repose sur certaines hypothèses sur la structure des approximations qu'il est difficile de vérifier a priori.

Voici un exemple:

Supposons qu'il existe une approximation régulière et une approximation locale permettant d'obtenir une approximation uniforme de ϕ du type

$$\phi(x, y, \epsilon) = E_{x, y}^{(m)} \phi + E_{\xi, \eta}^{(q)} \phi - E_{\xi, \eta}^{(q)} E_{x, y}^{(m)} \phi + O(\delta_r) \tag{2}$$

$\delta_r, \delta_q^*, \delta_m$ étant des échelles équivalentes. Si on considère l'expression

$$E_{x, y}^{(m)} E_{\xi, \eta}^{(q)} \phi - E_{\xi, \eta}^{(q)} E_{x, y}^{(m)} \phi$$

et qu'on lui applique l'opérateur $E_{x, y}^{(m)}$ on obtient identiquement zéro, ainsi qu'on le voit en appliquant cet opérateur aux deux membres de (2). Il en est de même si on lui applique l'opérateur $E_{\xi, \eta}^{(q)}$.

Telle est essentiellement la règle de Van Dyke justifiée dans le cas où l'approximation de ϕ satisfait à une hypothèse de structure telle que (2). On a pu aussi étudier d'autres hypothèses sous lesquelles l'application de cette règle se trouve justifiée.

IV.1.5 Dégénérescences significatives d'un opérateur

En pratique, la fonction ϕ n'est pas connue explicitement; on sait seulement qu'elle est solution d'une équation aux dérivées partielles $L(\phi) = 0$.

Pour simplifier nous supposerons que L est un opérateur linéaire-affine.

Si on opère le changement de variables $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ conduisant à un système de variables locales, l'opérateur L devient un opérateur différentiel \mathcal{L} faisant intervenir les dérivées partielles $\partial/\partial\xi$ et $\partial/\partial\eta$.

Si on peut trouver une échelle $\bar{\delta}$ telle que

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \sum_0^m \bar{\delta}_n(\epsilon) \mathcal{L}_n, \quad \bar{\delta}_0 = 1, \quad \bar{\delta}_{n+1} = o(\bar{\delta}_n),$$

où les \mathcal{L}_n sont des opérateurs indépendants de ϵ , on dit que \mathcal{L}_0 est une *dégénérescence locale* de L (pour les variables locales ξ, η).

Ceci signifie que si $f(\xi, \eta)$ est une fonction suffisamment différentiable

$$\lim_{\xi, \eta} \bar{\delta} \mathcal{L} f = \mathcal{L}_0 f.$$

Nous pouvons maintenant (comme en III.1.4) comparer les dégénérescences.

Définition: $\mathcal{L}^{(1)}$ est une dégénérescence de L pour les variables ξ_1, η_1 ; $\mathcal{L}^{(2)}$ est une dégénérescence de L pour les variables ξ_2, η_2 . De plus le changement de variables $(\xi_1, \eta_1) \rightarrow (\xi_2, \eta_2)$ transforme $\mathcal{L}^{(1)}$ en $\mathcal{L}^{(2)}$. Soit $f(\xi_2, \eta_2)$ une fonction suffisamment différentiable de ξ_2, η_2 . On dit que $\mathcal{L}^{(2)}$ est contenu dans $\mathcal{L}^{(1)}$ si pour tout f , il existe une échelle $\bar{\delta}$ telle que

$$\lim_{\xi_2, \eta_2} \bar{\delta} \mathcal{L}^{(2)} f = \mathcal{L}^{(1)} f$$

Définition On dit que \mathcal{L}_0 est une *dégénérescence significative* de L (dans une classe de variables locales) si \mathcal{L}_0 n'est contenue dans aucune dégénérescence (de la classe considérée).

Si \mathcal{L}_0 est une dégénérescence significative, l'équation $\mathcal{L}_0 = 0$ est dite *équation limite significative*.

Nous ferons une nouvelle hypothèse de travail.

Hypothèse de travail 2 Si une dégénérescence $\mathcal{L}^{(2)}$ est contenue dans une dégénérescence significative $\mathcal{L}^{(1)}$ alors il existe des couples m, q tels que $E_{\xi_2, \eta_2}^{(m)} \phi$ est contenu dans $E_{\xi_1, \eta_1}^{(q)} \phi$, ϕ étant une solution de l'équation $L(\phi) = 0$.

On peut enfin définir le *domaine formel de validité* Δ_1 d'une dégénérescence significative $\mathcal{L}^{(1)}$. C'est un domaine engendré par des arcs Γ définissant des processus limites conduisant, à partir de L , soit à la dégénérescence $\mathcal{L}^{(1)}$, soit à une dégénérescence contenue dans $\mathcal{L}^{(1)}$.

La méthode des développements raccordés se trouve justifiée si l'hypothèse de travail suivante est vérifiée:

Hypothèse de travail 3 Si ϕ est une solution de l'équation $L\phi = 0$, si $\mathcal{L}^{(1)}$ est une dégénérescence significative (ξ_1, η_1) de L dont le domaine de validité est Δ_1 , alors il existe au moins une approximation locale $E_{\xi_1, \eta_1}^{(0)} \phi$ dont le domaine de validité \mathcal{D}_1 comprend le domaine de validité Δ_1 .

Les définitions posées et les hypothèses de travail énoncées donnent un

guide pour l'étude des représentations locales d'une solution d'une équation $L\phi = 0$.

1) On cherchera les équations limites significatives ou dégénérescences significatives

2) L'hypothèse 3 permet d'escompter que l'on pourra former une approximation uniformément valable de la solution dans \mathcal{D}_0 en écrivant pour chaque approximation locale, d'une part, les conditions aux frontières conservées (dans le processus limite ζ, η) et les conditions de raccord. Il suffira en effet de s'assurer que les domaines de validité formels des équations significatives limites recouvrent \mathcal{D}_0 pour que l'hypothèse 1 soit vérifiée et l'hypothèse 2 garantit alors la validité du raccord par "limite intermédiaire".

Nous verrons sur un exemple traité plus loin (naissance de la couche limite) comment ces principes peuvent être mis en oeuvre.

IV.2 Écoulement Magnétohydrodynamique Stationnaire dans un Tube à Parois Isolantes

IV.2.1 Réduction du problème à une équation aux dérivées partielles linéaire

Désignons par \bar{x}_i les coordonnées cartésiennes, \bar{x}_1 la direction des génératrices (Fig. 1).

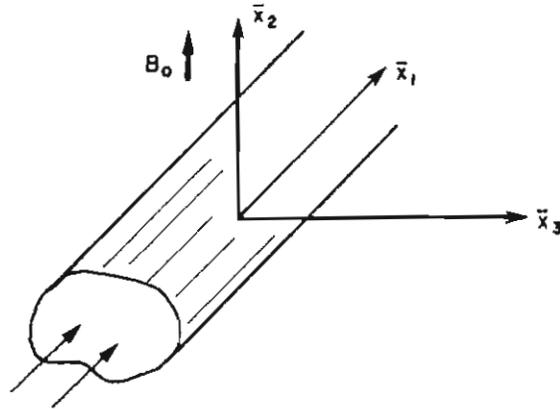


Figure 1 Écoulement dans un tube

On suppose que les trajectoires sont parallèles à l'axe de \bar{x}_1 . En vertu de l'équation de continuité la seule composante non nulle de la vitesse (portée

par cet axe) est indépendante de \bar{x}_1 ; nous l'écrivons $\bar{u}(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Supposons le champ électrique \mathbf{E} normal à l'axe des \bar{x}_1 . Il en est de même de la densité de courant \mathbf{J} d'après la loi d'Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \wedge \mathbf{B})$$

où σ désigne la conductivité électrique. De plus E_2 et E_3 sont indépendants de \bar{x}_1 d'après l'équation de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Enfin, on notera que l'on peut supposer simultanément que B_2 et B_3 sont constants, B_1 indépendant de x_1 . Ceci en effet entraîne que l'équation $\text{div } \mathbf{B} = 0$

est satisfaite et que, d'après l'équation

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$$

μ_0 perméabilité magnétique, J_1 est bien nul. On a ainsi

$$J_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial \bar{x}_3} = \sigma(E_2 - \bar{u}B_3), J_3 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial \bar{x}_2} = \sigma(E_3 + \bar{u}B_2).$$

En écrivant que $\text{rot } \mathbf{E}$, est nul, il vient:

$$0 = \frac{\partial E_3}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\partial E_2}{\partial \bar{x}_3} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta B_1 - B_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_2} + B_3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_3}.$$

Si maintenant on écrit les équations de Navier-Stokes, compte tenu des forces électromagnétiques,

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \text{grad } p = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{U},$$

on voit que les deux dernières montrent que

$$p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \frac{B_1^2(\bar{x}_2, \bar{x}_3)}{2\mu_0}$$

est une fonction de \bar{x}_1 seul dont la dérivée par rapport à \bar{x}_1 est constante d'après la première et que l'on peut poser égale à $-P\bar{x}_1$, P étant la chute linéique de pression généralisée. La première équation de Navier s'écrit donc

$$\mu \Delta \bar{u} + \frac{1}{\mu_0} \left(B_3 \frac{\partial B_1}{\partial \bar{x}_3} - B_2 \frac{\partial B_1}{\partial \bar{x}_2} \right) + P = 0.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $B_3 = 0, B_2 = B_0$ et

introduire les grandeurs indépendantes et dépendantes sans dimension:

$$\bar{x}_2 = Lx_2, \quad \bar{x}_3 = Lx_3,$$

$$u(x_2, x_3) = \frac{\sigma B_0^2}{P} \bar{u}(\bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad b(x_2, x_3) = \frac{B_0}{\mu_0 PL} B_1(\bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

$$j_3(x, x) = \frac{B_0}{P} J_3 = -\frac{\partial b}{\partial x_2}, \quad j_2(x_2, x_3) = \frac{B_0}{P} J_2 = \frac{\partial b}{\partial x_3}.$$

Si on désigne enfin par

$$\eta = \frac{\mu}{\sigma B_0^2 L^2}$$

le carré de l'inverse du nombre de Hartmann caractérisant l'ordre de grandeur du rapport des forces visqueuses et des forces électromagnétiques, on obtient:

$$\eta \Delta u + \frac{\partial b}{\partial x_2} + 1 = 0,$$

$$\Delta b + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Posant:

$$\eta = \epsilon^2, \quad b + \epsilon u + x_2 = v, \quad b - \epsilon u + x_2 = w,$$

le système peut encore s'écrire sous forme de deux équations découplées

$$\epsilon \Delta v + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad \epsilon \Delta w - \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0.$$

Réglons maintenant le sort des conditions aux limites. Tout d'abord dans tous les cas, la paroi du tube étant fixe:

$$u = 0.$$

Si la paroi est *isolante* on doit avoir

$$-J_3 d\bar{x}_2 + J_2 d\bar{x}_3 = \frac{1}{\mu_0} dB_1 = 0,$$

si bien que B_1 est une constante le long de la paroi.

Si la paroi est conductrice, le champ électrique qui est nul dans la paroi doit avoir une composante tangentielle nulle dans le fluide le long de la paroi (continuité de la composante tangentielle); par suite B_1 a une dérivée normale nulle le long de cette paroi.

Nous nous limiterons au cas de *parois isolantes*. Il faut donc rechercher

la solution de l'équation

$$L\phi = \epsilon L_2 + L_1 = 0, \quad L_2 = \Delta\phi, \quad L_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (1)$$

qui prend des valeurs connues sur la frontière ∂D du domaine D représentant la section droite du tube.

L'étude qui suit permet, en principe, de répondre à la question suivante: *Quelle est l'approximation asymptotique du débit pour une induction transversale donnée et une chute linéique de pression généralisée donnée aux grands nombres de Hartmann?*

IV.2.2 Couche limite classique

Considérons jusqu'à nouvel ordre un domaine D connexe et strictement convexe du plan x, y dont la frontière est composée de deux arcs Γ_- et Γ_+ , d'équations

$$a < x < b, \quad y = y_-(x), \quad y = y_+(x), \quad y_-(a) = y_+(a), \\ y_-(b) = y_+(b), \quad y_-(x) < y_+(x). \quad (2)$$

On cherche dans D la solution de l'équation

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

connaissant les valeurs qu'elle prend sur la frontière

$$\phi(x, y_-(x)) = a_-(x), \quad \phi(x, y_+(x)) = a_+(x). \quad (4)$$

Lorsque $\epsilon = 0$, l'équation obtenue en (3) est une équation du premier ordre

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

dont la solution générale est une fonction arbitraire de x . Il est impossible de satisfaire avec une telle fonction les conditions aux frontières (4) dès que l'on suppose que $a_-(x)$ et $a_+(x)$ ne sont pas identiques.

L'équation (5) est une *équation limite significative*.

Au voisinage d'un arc de courbe C , de pente bornée, définie par $y = b(x)$, on peut introduire les variables locales

$$x = \delta_\zeta \xi, \quad b(x) - y = \delta_\eta \eta.$$

L'équation de la couche limite est simplement la deuxième équation limite significative, la première étant donnée par (5), que l'on peut construire à partir de (3): elle est obtenue par exemple en prenant $\delta_\zeta = 1$,

$\delta_\eta = \epsilon$. Elle s'écrit

$$\lambda(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0,$$

avec

$$\lambda(x) = 1 + \left(\frac{db}{dx} \right)^2.$$

La solution de cette équation est de la forme

$$\bar{\phi} = A(x) \exp \{ -(\lambda(x)^{-1} \eta) \} + B(x),$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des constantes d'intégration. Comme $\lambda(x)$ est négatif, on voit qu'une couche limite ne peut se développer que dans le voisinage $\eta > 0$ de la courbe C .

Ainsi pour notre problème, l'arc C est porté par Γ_+ (Figure 2). Admettant les hypothèses de travail usuelles sur les domaines de validité et les règles de raccord, l'approximation extérieure ou régulière est donnée par

$$\phi(x, y, \epsilon) = \bar{\phi}_0(x) + \dots = a_+(x) + \dots,$$

et l'approximation intérieure ou locale par

$$\epsilon \eta = y_+(x) - y, \quad \lambda(x) = 1 + \left(\frac{dy_+}{dx} \right)^2$$

$$\phi(x, y, \epsilon) = \bar{\phi}_0(x, \eta) + \dots = (a_+(x) - a_-(x)) \exp \left[-\frac{\eta}{\lambda(x)} \right] + a_-(x) + \dots$$

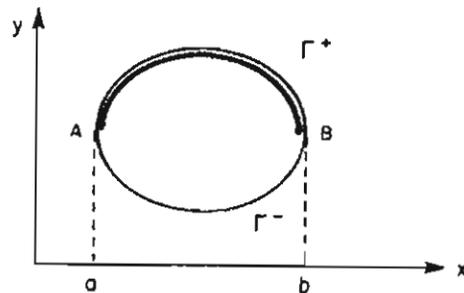


Figure 2 — Couche limite ordinaire $O(\epsilon)$.

On notera que cette dernière représentation perd sa signification au voisinage de A et de B , où $\lambda(x)$ devient infini. Néanmoins on a réussi à

montrer que $\bar{\phi}_0(x, \eta)$ (qui ici contient le terme dominant $\bar{\phi}_0(x)$ de l'approximation asymptotique extérieure) constitue une approximation uniformément valable dans le domaine fermé \bar{D} :

$$|\phi(x, y, \epsilon) - \bar{\phi}_0(x, \eta)| = o(1) \text{ dans } \bar{D}.$$

On peut envisager maintenant de former les développements asymptotiques extérieurs et intérieurs. Procédant de façon formelle mais naturelle nous avons pour le premier

$$\phi_{as}(x, y, \epsilon) = \sum_{n=0}^m \epsilon^n \bar{\phi}_n(x, y), \tag{11}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial y} = \Delta \bar{\phi}_{n-1}, \quad \bar{\phi}_n(x, y_-(x)) = 0, \quad n \geq 1.$$

La détermination de ce développement se fait donc sans aucune difficulté.

Cherchons maintenant le développement intérieur ou local. A cet effet il est commode de remplacer la recherche de ϕ vérifiant (3) et (4) par celle équivalente de

$$\phi(x, y, \epsilon) = \varphi(x, y, \epsilon) - \sum_0^m \epsilon^n \bar{\phi}_n(x, y). \tag{12}$$

Cette fonction φ satisfait à l'équation et aux conditions aux limites:

$$\epsilon \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\epsilon^{m+1} \Delta \bar{\phi}_m,$$

$$\varphi(x, y_-(x)) = 0, \quad \varphi(x, y_+(x)) = a_+(x) - a_-(x) + \sum_1^m \epsilon^p a_p(x). \tag{13}$$

et les $a_p(x) = -\bar{\phi}_p(x, y_+(x))$ étant connus puisque l'approximation asymptotique extérieure de ϕ est supposée déterminée. Par construction l'approximation asymptotique extérieure de φ à $O(\epsilon^m)$ près est identiquement nulle.

Cherchons un développement asymptotique formel local de φ au voisinage de Γ_+ , soit

$$\bar{\varphi}_{as} = \sum_0^m \epsilon^m \bar{\varphi}_n(x, \eta), \tag{14}$$

η étant la variable introduite en (10); tout d'abord

$$\bar{\varphi}_0 = (a_+(x) - a_-(x)) \exp \left[-\frac{\eta}{\lambda(x)} \right].$$

Quant à $\tilde{\phi}_p$, il vérifie une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \tilde{\phi}_p}{\partial \eta} - G(\tilde{\phi}_0, \dots, \tilde{\phi}_{p-1}, x, \eta) = 0,$$

dont la solution générale s'écrit:

$$\tilde{\phi}_p = A_p(x) \exp \left[-\frac{\eta}{\lambda(x)} \right] + B_p(x) + \frac{1}{\lambda(x)} \int_0^\eta (\exp \left[-\frac{\eta - \eta'}{\lambda(x)} \right] - 1) G' d\eta'$$

les fonctions $A_p(x)$ et $B_p(x)$ étant déterminées:

— d'une part par la condition aux limites (13) imposée à ϕ sur Γ_+ .

$$A_p(x) + B_p(x) = a_p(x),$$

d'autre part, par la condition de raccord selon laquelle $\tilde{\phi}_p$ doit être nul pour η infini.

Les développements ainsi formés sont des développements formels: est exclu qu'ils puissent définir une approximation asymptotique uniformément valable dans tout le domaine D (à cause de la présence des points A et B). Mais on a pu prouver rigoureusement que dans tout domaine \bar{D} intersection de D par la bande

$$a + \alpha < x < b - \alpha, \quad \alpha > 0,$$

on avait

$$|\phi - (\phi_{as} + \tilde{\phi}_{as})| = o(\epsilon^m);$$

$\phi_{as} + \tilde{\phi}_{as}$ constitue donc un développement composite uniformément valable dans \bar{D}_α à $o(\epsilon^m)$ près.

On voit qu'on ne pourra progresser dans la recherche d'une approximation asymptotique au-delà de $m = 0$ que lorsqu'on aura élucidé le comportement au voisinage des points A et B . C'est l'objet de l'étude de "la naissance de la couche limite" dont il sera question plus loin. Mais auparavant nous allons sur un exemple simple examiner le cas où la frontière contient au moins un segment parallèle à l'axe des y .

IV.2.3 Notions sur les couches limites paraboliques

L'équation est toujours l'équation (3) mais le domaine D sera le rectangle $OABC$, $0 < x < 1$, $0 < y < l$ (Fig. 3). Sans restreindre en fait la généralité, nous supposons que les données aux limites sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1, \\ \phi(x, l) &= f(x), & 0 < x < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= g_0(y), & 0 < y < l, & \quad g_0(0) = 0, \quad g_0(l) = f(0), \\ \phi(1, y) &= g_1(y), & 0 < y < l, & \quad g_1(0) = 0, \quad g_1(l) = f(l). \end{aligned}$$

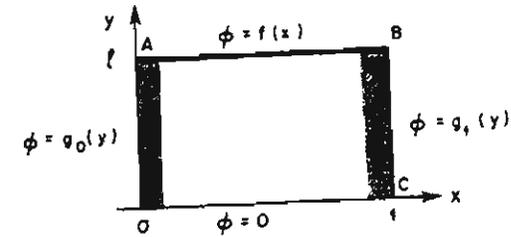


Figure 3 — Couche limite ordinaire $O(\epsilon)$
 — Couche limite parabolique $O(\epsilon^{1/2})$

Nous allons chercher d'abord une approximation locale le long du segment OA . On introduit donc une variable locale ξ par

$$x = \delta(\epsilon) \xi$$

on veut définir $\delta(\epsilon)$ pour avoir à la limite une équation significative. Il suffit pour cela, comme il a été dit plus haut, que pour toute fonction $f(\xi, y)$,

$$\epsilon \frac{L_2(f)}{L_1(f)} = O(1) \neq o(1).$$

Ceci conduit au choix simple $\delta = \sqrt{\epsilon}$, et pour l'approximation locale formelle à

$$\phi_{as}^* = \sum_{n=0}^m \epsilon^n U_n(\xi, y), \tag{16}$$

à U_m vérifiant les équations

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial U_0}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial U_n}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial y^2}. \tag{18}$$

Nous imposons au développement (16) les conditions aux limites vérifiées par ϕ sur OA et sur OC .

$$\begin{aligned} U_0(0, y) &= g_0(y), & U_n(0, y) &= 0 \\ U_n(\xi, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

On forme aisément U_0 qui, solution de l'équation de la chaleur, est complètement déterminée par les conditions aux frontières. On peut écrire par exemple

$$U_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{y/\sqrt{2x}}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) g_0\left(y - \frac{\xi^2}{2t^2}\right) dt. \quad (20)$$

On constate de plus que, pour tout x fixé et non nul et quel que soit N :

$$U_0\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) = o(\epsilon^N)$$

La solution de couche limite ainsi trouvée est dite *parabolique* en raison du fait qu'elle vérifie une *équation aux dérivées partielles du type parabolique*, (et non une équation différentielle, comme pour une couche limite ordinaire).

Notons maintenant que cette construction formelle échoue quand on aborde la détermination de U_1 en raison de la singularité qui apparaît au second membre de (18) dès que $g_0(y)$ n'a pas une dérivée première nulle en $y = 0$. Nous nous en tiendrons donc dans la suite au cas $m = 0$.

Il est facile de calculer de même le terme dominant du développement formel local au voisinage de BC . Il est de la forme $V_0(1-x)/\sqrt{\epsilon}, y$. Finalement, considérant la fonction

$$\phi = \phi - U_0\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) - V_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}, y\right),$$

on observe que le terme dominant de l'approximation régulière est nul et que le terme dominant de l'approximation locale le long de AB s'étudie comme plus haut, et est de la forme

$$\tilde{\phi}_0\left(x, \frac{1-y}{\epsilon}\right).$$

La représentation asymptotique formelle ainsi déterminée s'avère être correcte et uniformément valable. On a prouvé rigoureusement en effet que

$$\left| \phi - U_0\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) - V_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) - \tilde{\phi}_0\left(x, \frac{1-y}{\epsilon}\right) \right| = O(\epsilon).$$

Remarque Il importe de bien noter que la différence d'échelle qui apparaît dans le cas où un arc de la frontière est parallèle à l'axe des y tient à ce que, dans ce cas, cet arc est un arc de *subcaractéristique*, c'est-à-dire une caractéristique de l'équation formellement obtenue en posant $\epsilon = 0$ dans

l'équation originale. Le long d'un arc de subcaractéristique "l'épaisseur" de la couche limite est $O(\sqrt{\epsilon})$ alors qu'en général elle est $O(\epsilon)$. Si on considère l'équation de type elliptique à coefficients constants:

$$\epsilon L_2 \phi + L_1 \phi = \epsilon \left(a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial y} = h,$$

$$b^2 - ac < 0,$$

les subcaractéristiques sont les droites

$$\beta x - \alpha y = \text{constante};$$

c'est le long d'arcs frontières subcaractéristiques que l'on aura des couches limites paraboliques.

Dans la théorie classique de la couche limite en mécanique des fluides, on a affaire à une couche limite parabolique parce que l'obstacle est ligne de courant et que les lignes de courants constituent une famille de caractéristiques pour le système des équations d'Euler.

IV.2.4 Naissance de la couche limite.

Pour étudier le comportement local de la solution en un point tel que B (figure 2) où la tangente est une subcaractéristique, on pourra envisager le cas où D est le cercle.

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } r < 1, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Nous allons donc étudier le voisinage du point $r = 1, \theta = 0$, conformément aux indications générales données plus haut, et analyser avec soin les dégénérescences de notre équation afin de mettre en évidence les *équations limites significatives*. A cet effet nous introduirons les variables locales ξ_ν, η_μ .

$$(1-r) = \epsilon^\nu \xi_\nu, \quad \theta = \epsilon^\mu \eta_\mu. \quad (21)$$

L'opérateur $L = \epsilon \Delta - \partial/\partial y$ que nous étudions s'écrit alors:

$$L = \epsilon^{1-2\nu} \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_\nu} + \frac{\epsilon^{1-2\mu}}{(1-\epsilon^\nu \xi_\nu)^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta_\mu^2} + \left\{ \epsilon^{\mu-\nu} \left(\frac{\sin(\epsilon^\mu \eta_\mu)}{\epsilon^\mu} \right) - \frac{\epsilon^{1-\nu}}{1-\epsilon^\nu \xi_\nu} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \epsilon^{-\mu} \frac{\cos(\epsilon^\mu \eta_\mu)}{(1-\epsilon^\nu \xi_\nu)^2} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu}.$$

Il est facile de mettre en évidence les dégénérescences *significatives* que l'on peut obtenir. De façon pratique on cherche à garder le maximum de termes soit trois dans le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$. On trouve deux tels cas $\nu = 1, \mu = 1$ et $\nu = 2/3, \mu = 1/3$. Puis on détermine les droites (Fig. 4) du plan ν, μ pour lesquelles il reste deux termes. Ce sont les segments AC, BC, CD . Pour les autres points du plan, il ne reste qu'un seul terme. On obtient

ainsi (en écrivant ξ au lieu de ξ_ν , η au lieu de η_μ , lorsqu'aucune confusion n'est possible) les équations limites ou les dégénérescences de l'opérateur L :

$$\text{Sur } AC, \quad \mu = 2\nu, \quad \mathcal{L}_{AC} = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\text{Sur } BC, \quad \mu = 1 - \nu, \quad \mathcal{L}_{BC} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\text{Sur } CD, \quad 1 - \mu = 2(1 - \nu), \quad \mathcal{L}_{CD} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

et aux points A, B, C, D

$$\nu = 0, \quad \mu = 0, \quad \mathcal{L}_A = \sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \cos \eta \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\nu = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathcal{L}_D = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\nu = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{L}_C = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\nu = 1, \quad \mu = 0, \quad \mathcal{L}_B = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Il apparaît clairement que les dégénérescences de \mathcal{L}_{CD} sont contenues

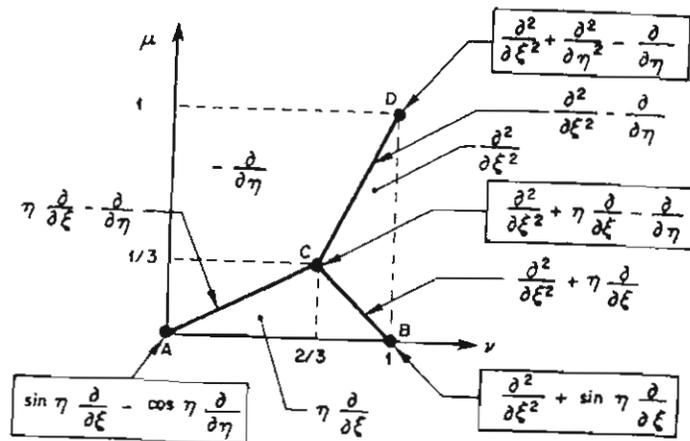


Figure 4

ans les dégénérescences \mathcal{L}_C et \mathcal{L}_D . On peut montrer de même que les dégénérescences de \mathcal{L}_{BC} sont contenues dans les dégénérescences de \mathcal{L}_C et de \mathcal{L}_B . Ce dernier point pouvant paraître moins évident, nous allons le vérifier.

On a, en effet, avec $0 < \mu < 1/3$,

$$(22) \quad \xi_1 = \epsilon^{-\mu} \xi_{1-\mu}, \quad \eta_0 = \epsilon^\mu \eta_\mu,$$

et, par suite

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B(F(\xi_{1-\mu}, \eta_\mu)) &= \epsilon^{2\mu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{1-\mu}^2} + \frac{\sin(\epsilon^\mu \eta_\mu)}{\epsilon^\mu} \frac{\partial F}{\partial \xi_{1-\mu}} \right) \\ &= \epsilon^{2\mu} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_{1-\mu}^2} + \eta_\mu \frac{\partial F}{\partial \xi_{1-\mu}} + 0(1) \right), \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que \mathcal{L}_{BC} est une dégénérescence de \mathcal{L}_B .

(23) De même \mathcal{L}_{AC} est une dégénérescence de \mathcal{L}_A et de \mathcal{L}_C .

En définitive, les 4 dégénérescences (23) sont les 4 dégénérescences significatives de l'opérateur initial L .

Selon nos hypothèses de travail, le raccord entre deux approximations significatives devra s'effectuer grâce aux dégénérescences intermédiaires le long du segment joignant ces deux points.

Envisageons ces quatre dégénérescences significatives auxquelles correspondent 4 approximations significatives formelles d'après nos hypothèses de travail.

Nous supposons que les données au voisinage du point A peuvent être développées en série de Taylor de la forme

$$\phi(r=1) = \sum_0^{\infty} \alpha_n \theta^n \quad (24)$$

A conduit à l'approximation régulière ou extérieure déjà étudiée.

B à l'approximation locale de la couche limite ordinaire qui, elle aussi, a déjà été considérée.

D à l'approximation locale (formelle) de la couche limite interne

$$\phi_{in}^{(i)} = \sum_0^m \epsilon^n \phi_n^{(i)}(\xi_{i1}, \eta_{i1}). \quad (25)$$

C à l'approximation locale formelle de la couche limite intermédiaire

$$\phi_{in}^* = \sum_0^q \epsilon^{\nu/3} \phi_n^*(\xi_{2\nu/3}, \eta_{1/\nu}). \quad (26)$$

On a vu que l'approximation régulière peut se déterminer complètement à partir des données aux limites (4). Pour chacune des couches limites, on

écrivra la condition aux frontières, par exemple on aura

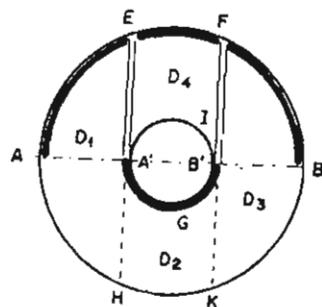
$$\psi_n^{(i)}(0, \eta_1) = \alpha_n \eta_1^n, \quad \psi_n^*(0, \eta_{1/3}) = \alpha_n \eta_{1/3}^n.$$

Il restera, pour chacune, une autre condition à écrire par raccord. Pour la couche limite intermédiaire, le raccord s'effectue le long de OA , c'est-à-dire avec l'approximation régulière, l'approximation de la couche limite intermédiaire étant ainsi déterminée, on achèvera celles des autres couches limites écrivant leurs raccords avec elle (le long de CB et de CD respectivement).

Les calculs ainsi évoqués ont été effectués et la preuve mathématique de la validité de l'approximation ainsi construite a été donnée.

IV.2.5 Couche limite libre.

Le simple problème de l'écoulement par trajectoires rectilignes dans une conduite annulaire en magnétodynamique classique des fluides montre qu'il y a encore d'autres approximations locales qu'il faudra en général faire intervenir, (fig. 5).



- Couches limites ordinaires
- A, B Naissance d'une couche limite
- A', B' Naissance d'une couche limite avec couche limite libre
- Couches limites libres

Figure 5

On note, en effet, que l'on pourra étudier les domaines fermés intersections de D_2 et D_4 avec une bande $x(A') + \alpha < x < x(B') - \alpha$, $\alpha > 0$ arbitrairement petit, avec l'approximation régulière et l'approximation locale de couche limite ordinaire le long des arcs $A'GB'$ et EF respectivement. Dans les domaines $(x(A) < x < x(A') - \alpha) \cap \bar{D}_1$ et $(x(B') + \alpha < x < x(B) - \alpha) \cap \bar{D}_3$ à des approximations de même type devront s'ajouter les approximations locales correspondant à la naissance de couches limites en A et B . Aucune difficulté spéciale n'est à attendre le long de HA' et

KB' . Par contre, un raccord s'avèrera en général nécessaire grâce à un développement local d'un type nouveau, valable le long de $A'E$ et $B'F$ car ces approximations régulières dans D_1 et D_4 déterminées respectivement par des données de ϕ sur AH et sur $A'JB'$ n'ont pas de raison a priori de se raccorder. Les couches le long de $A'E$ et de $B'F$ qui, notons-le sont des *subcaractéristiques*, sont appelées "couches limites libres". Leur existence vient encore compliquer l'étude locale des points A' et B' . Nous ne pouvons pousser plus avant l'examen de ces questions très délicates qui n'ont d'ailleurs pas toutes reçu de réponses définitives.

Conclusion

Il est clair qu'il faudrait maintenant, après avoir examiné un cas linéaire à la section IV.2, appliquer ces méthodes à l'étude de la couche limite en mécanique des fluides, cas où la couche limite est régie par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires ou tout au moins une équation non linéaire de type parabolique. Dans le cas compressible, notamment aux grands nombres de Mach peuvent apparaître le long des parois des couches limites multiples. Il faudrait aussi évoquer la question des couches de choc.

Le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds est lui aussi très important; son étude réclame un usage très raffiné des méthodes de raccordement qu'il n'était pas possible d'évoquer au niveau de cette introduction aux méthodes de perturbations singulières.

Remarques Complémentaires pour la Deuxième Partie

Le terme de perturbation singulière semble avoir été utilisé de façon systématique au cours des recherches menées au Caltech au début des années cinquante dans l'entourage de Lagerstrom. Les idées originales de base ont été exploitées par un jeune et brillant chercheur, le regretté Saul Kaplun. Un ouvrage publié en 1967, plusieurs années après sa mort, rassemble un certain nombre de documents publiés ou inédits d'un grand intérêt pour celui qui veut comprendre cette théorie. Les méthodes de perturbations singulières sont exposées avec de nombreux exemples dans les ouvrages aujourd'hui classiques de Van Dyke (1964) et de Cole (1968), tous les deux anciens élèves de Lagerstrom; quiconque doit utiliser de façon pratique ces méthodes trouvera dans ces deux ouvrages de précieux enseignements.

En préparant le présent exposé, nous avons tiré avantage de quelques publications récentes: l'article de Lagerstrom et Casten (1972), le livre de Eckhaus (1973) qui expose un cours donné par cet auteur à l'école d'été

organisée en France au Bréau 1972 et les notes inédites du cours de Van Dyke donné à cette même école.

Dans ces dernières notes, Van Dyke indique que plusieurs savants célèbres avaient déjà raccordé des approximations asymptotiques de Laplace en 1805, dans le problème du ménisque de liquide au voisinage d'une paroi, Maxwell en 1860 pour le mouvement d'un fluide visqueux entre deux disques circulaires en rotation lente, Kirchoff en 1877 pour le calcul de la capacité électrique de deux disques chargés et séparés par une petite distance etc.

Mais c'est en 1904 avec Prandtl dans son mémoire donnant naissance au concept de la couche limite que cette notion apparaît décisive; elle permettait, en effet, de rendre compte, après plus de cent années de recherches du phénomène si évident de la traînée d'un obstacle placé dans un écoulement uniforme. Il a fallu près de 40 ans pour que l'on comprenne la nature mathématique de ce phénomène singulier en dépit de l'exploitation intensive faite depuis 1904 du concept de couche limite. L'exemple donné dans la section III.4 est dû à Friedrichs; exposé dans un cours d'été au cours des années 40, il figure dans la publication de cet auteur de 1953.

Mais en 1949, Lighthill publiait une méthode différente pour rendre "uniformément valable" une approximation. C'est la méthode dite, dans les présentes notes, de distorsion des coordonnées (strained coordinates). De nombreuses applications en furent données (voir en particulier les travaux de Whitham cités dans la troisième partie). Un exposé d'ensemble en a été donné par Tsien (1956). En fait, comme l'a reconnu son auteur un peu plus tard (1961), cette méthode s'applique principalement aux problèmes de type hyperbolique. Ce n'est que plus récemment que la méthode des échelles multiples a fait son apparition et révélé son intérêt dans l'étude des problèmes de type cumulatif. Son introduction systématique est due à Kevorkian (lui aussi élève de Lagerstrom). On pourra consulter, par exemple, l'exposé publié par cet auteur en 1966. Cette méthode s'apparente à celle dite des "moyennes" de Bogoliubov et Mitropolsky (1961) et les relations entre ces deux méthodes ont fait l'objet d'un article de Morrison (1966). Il nous semble qu'en fait la méthode de distorsion des coordonnées et celle des échelles multiples doivent être rapprochées: elles gagnent souvent à être employées simultanément. C'est le point de vue que nous avons tenté de prendre dans cet exposé et qui se trouve fondé sur les travaux récents de Crocco et de Bois cités dans la bibliographie de la troisième partie.

On trouvera dans le livre de Cole des exemples complémentaires de ceux traités en III.3. Pour un exposé plus précis sur le concept de raccord, et les diverses particularités qui peuvent se présenter, on se reportera à l'article de Lagerstrom et Casten où sont analysés très profondément plusieurs modèles différentiels particulièrement bien choisis. La méthode des

développements composites est due à Latta (1951). Elle est d'un emploi assez rare. Signalons toutefois que c'est une méthode de ce genre qui a été mise en oeuvre par Germain et Guiraud (1966) pour donner une solution complète, à tout ordre d'approximation, du problème local de l'onde de choc (relations de choc et structures).

Pour le section IV, nous nous sommes largement inspiré des travaux d'Eckhaus, en particulier pour la section IV.2 de son exposé de synthèse de 1972, où l'on trouvera des références sur les justifications mathématiques rigoureuses. Pour une étude plus approfondie des fondements de ces méthodes de raccord on pourra consulter, outre les travaux de Kaplun déjà cités, l'article d'Eckhaus de 1969. Les conditions d'applicabilité de la règle (m, n) de Van Dyke ont été très précisément élucidées dans les mémoires de Fraenkel (1969).

Le problème physique de l'écoulement d'un fluide conducteur dans un tube a été initialement posé par Shercliff et étudié dans divers articles publiés au Journal of Fluid Mechanics.

En ce qui concerne les problèmes qui n'ont pu être abordés relatifs à la couche limite classique et aux écoulements à faible nombre de Reynolds on se reportera à la bibliographie donnée dans le cours de mon collègue Moffatt. Ces questions sont d'ailleurs traitées ou évoquées dans la plupart des livres classiques de mécanique des fluides [voir, par exemple, Rosenhead (1963)].

On trouvera dans les livres de Cole et de Van Dyke, une analyse de ces problèmes conduite à partir des méthodes de perturbations singulières. Les techniques de raccord dans le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds sont particulièrement délicates. C'est en vue de bien les comprendre que Lagerstrom et Casten, dans l'article cité, ont étudié avec soin certains modèles différentiels appropriés.

Nous signalerons, en outre, le grand article de synthèse de Lagerstrom (1964) et le mémoire célèbre de Kaplun (1954) sur les coordonnées optimales.

Un exemple de couches multiples en mécanique des fluides est donné dans le livre de Van Dyke (p. 182-192). Il s'agit de l'écoulement hypersonique autour d'un dièdre émoussé de faible ouverture.

TROISIÈME PARTIE Notions sur la Propagation des Ondes de Faible Amplitude

Introduction

Nous nous proposons, dans cette dernière partie, d'illustrer l'application de la méthode des échelles multiples à des problèmes simples de propagation d'ondes. Dès que l'on tient compte des effets non linéaires, même si ceux-ci sont petits, on doit s'attendre à trouver un problème de perturbation singulière. La solution simple donnée par l'approximation linéaire ne saurait être uniformément valable aux grands temps ou aux grandes distances.

Le cinquième chapitre est consacré à une rapide étude de l'équation de Burgers. Celle-ci peut d'abord être regardée comme un modèle mathématique très simple où sont présents à la fois des effets non linéaires de convection et des effets dissipatifs et particulièrement remarquable puisque l'on peut expliciter complètement la solution générale. Mais c'est aussi et c'est sans doute ce qui rend cette équation si intéressante, l'équation qui permet dans des situations générales de décrire les effets non linéaires, du moins si leur amplitude est faible. C'est pourquoi, à titre de motivation, nous commençons ce chapitre en évoquant des problèmes de propagation d'ondes planes faiblement non linéaires.

Le sixième chapitre aborde le problème de la propagation des ondes progressives de faible amplitude dans un contexte assez général. L'exemple le plus remarquable, rencontré en mécanique des fluides, est sans doute celui du «Bang sonique», problème dont l'importance pratique n'a pas besoin d'être soulignée.

V L'Équation de Burgers

Introduction

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

où ν est un coefficient constant et positif. On peut très brutalement la considérer comme l'équation décrivant (dans un tube) les écoulements

rectilignes d'un fluide fictif dans lequel la pression resterait constante. Effectivement, le terme $u(\partial u/\partial x)$ représente bien les termes non linéaires de convection en variables d'Euler, et le terme $\nu(\partial^2 u/\partial x^2)$ décrit bien une dissipation visqueuse, si on interprète u comme une vitesse. Cette propriété montre également que l'équation (1) vérifie le principe de l'invariance galiléenne. Si on pose, w étant constant,

$$u^* = w + u, \quad x^* = x + wt, \quad t^* = t,$$

alors $u^*(x^*, t^*)$ est encore solution de l'équation (1).

On notera aussi que pour ce modèle, les écoulements stationnaires sont régis par l'équation différentielle étudiée en III.4.6, dans la deuxième partie de ce cours.

Ces diverses remarques montrent que l'équation de Burgers constitue un modèle intéressant pour étudier, au moins de façon qualitative, certaines propriétés des fluides visqueux et compressibles. A cet égard, l'équation d'Euler associée au modèle des équations de Navier-Stokes que constitue l'équation (1), soit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

pourra servir de modèle pour l'étude de certaines propriétés des fluides parfaits compressibles. Mais il convient de se rendre compte, dès le départ, que ces équations (1) ou (2) sont plus qu'un modèle et qu'elles jouent directement un rôle dans l'étude de certains problèmes d'ondes faiblement non linéaires.

V.1 Application de la Méthode des Échelles Multiples à l'Étude de la Propagation d'Ondes Planes Faiblement Non Linéaires

V.1.1 Principe général de l'étude

Nous considérons un phénomène gouverné par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon H \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad \epsilon > 0, \quad (3)$$

et le problème est de trouver $u(x, t)$ dans le domaine

$$-\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0$$

connaissant les conditions initiales

$$u(x, 0) = a_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = b_0(x) \quad (4)$$

Le problème non perturbé— $\epsilon = 0$ —est bien classique: c'est celui de la propagation des ondes acoustiques planes. Ici ϵ est un paramètre petit, si bien que les termes non linéaires ϵH peuvent être supposés petits en chaque point. Néanmoins, on peut s'attendre, pour les temps assez grands, à un effet cumulatif de ces petites perturbations qui vont se propager avec l'onde et qui par suite peuvent affecter son mouvement. Le problème va donc être un problème de perturbation singulière et la méthode indiquée pour le traiter est celle des échelles multiples. Nous introduirons donc, comme au chapitre III de la deuxième partie, un temps lent

$$\bar{t} = \epsilon t$$

et éventuellement une distorsion du temps rapide t . En fait, ici, nous nous contenterons d'étudier le terme dominant dans le développement asymptotique, si bien que cette distorsion ne sera pas nécessaire. Elle serait par contre utile dans l'étude des termes suivants des développements. Nous chercherons donc u sous la forme

$$u(x, t, \epsilon) = u_0(x, t, \bar{t}) + \epsilon u_1(x, t, \bar{t}) + \dots$$

On se limitera au cas où u , et ses dérivées premières, restent partout et toujours bornées; ceci impose à la fonction H et aux conditions initiales certaines conditions restrictives.

Si on porte le développement (6) dans l'équation (3), on trouve les équations auxquelles satisfont les fonctions u_p en annulant les coefficients des puissances de ϵ . Les deux premières équations s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \bar{t}} - H \left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right).$$

En fait, pour écrire les suivantes, il conviendrait, d'une part, de tenir compte de la distorsion du temps rapide en posant par exemple:

$$\frac{dt^*}{dt} = 1 + \omega_2(\bar{t}) \epsilon^2 + \dots$$

et, d'autre part, de procéder au développement de Taylor de la fonction H en la supposant analytique par rapport à ces arguments.

La solution générale de (7) s'écrit

$$u_0(x, t, \bar{t}) = f_0(\sigma, \bar{t}) + g_0(\tau, \bar{t}),$$

si on pose

$$\sigma = x - t, \quad \tau = x + t$$

les fonctions f_0 et g_0 étant des fonctions arbitraires. Introduisons la notation

$$\mathcal{H}_0(\sigma, \tau, \bar{t}) = H \left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau} - \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial g_0}{\partial \tau} + \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right); \quad (11)$$

la fonction \mathcal{H}_0 est déterminée dès que l'on connaît u_0 . L'équation (8) prend alors la forme

$$-4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \tau} = 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \bar{t}} - 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau \partial \bar{t}} - \mathcal{H}_0(\sigma, \tau, \bar{t}),$$

et en intégrant on obtient

$$-4 \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} = -2 \frac{\partial g_0}{\partial \bar{t}} + \left\{ 2\tau \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \bar{t}} - \int^\tau \mathcal{H}_0(\sigma, \tau', \bar{t}) d\tau' \right\}, \quad (12)$$

$$-4 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial f_0}{\partial \bar{t}} - \left\{ 2\sigma \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau \partial \bar{t}} + \int^\sigma \mathcal{H}_0(\sigma', \tau, \bar{t}) d\sigma' \right\}. \quad (13)$$

Pour assurer l'uniformité de l'approximation asymptotique (6) et éviter que u_1 et ses dérivées premières ne deviennent infinis pour les grandes valeurs de t , il faut que le terme entre parenthèses dans (12)—resp. (13)—reste borné quand τ —resp. σ —augmente indéfiniment. Ceci impose en particulier que les fonctions f_0 et g_0 soient choisies de manière à vérifier les équations aux dérivées partielles que nous écrirons sous la forme

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \bar{t}} = \mathcal{A}_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, \bar{t} \right), \quad 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau \partial \bar{t}} = -\mathcal{B}_0 \left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau}, \bar{t} \right), \quad (14)$$

en posant

$$\mathcal{A}_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int^\tau \mathcal{H}_0(\sigma, \tau', \bar{t}) d\tau', \quad (15)$$

$$\mathcal{B}_0 = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sigma} \int^\sigma \mathcal{H}_0(\sigma', \tau, \bar{t}) d\sigma'.$$

La définition de \mathcal{H}_0 montre que \mathcal{A}_0 et \mathcal{B}_0 dépendent bien des variables indiquées aux seconds membres de (14). Ces équations (14), compte tenu des conditions initiales (4), doivent permettre la détermination des fonctions f_0 et g_0 . En règle générale, ces équations seront couplées, les fonctions \mathcal{A}_0 et \mathcal{B}_0 dépendant sous forme de paramètres (fonctions de \bar{t}), des fonctions g_0 et f_0 respectivement.

Nous nous contenterons ici de ces remarques de principe sans pousser plus avant l'analyse dans le cas général. Nous noterons toutefois que l'opérateur définissant \mathcal{A}_0 (ou \mathcal{B}_0) est en définitive un opérateur de moyenne portant sur les valeurs de la contribution des termes non linéaires dans l'équation de

départ évalués pour la solution linéaire, moyenne prise le long d'une caractéristique $\sigma = \text{constante}$ (ou $\tau = \text{constante}$). Cette constatation, qui n'est pas possible d'approfondir ici, est à la base d'une comparaison constructive entre l'application de la méthode des échelles multiples que nous présentons et l'application des moyennes de Bogoliubov.

La méthode formelle, esquissée plus haut, peut s'étendre dans certains cas où H dépend également des dérivées secondes, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon H \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (16)$$

On peut montrer alors que f_0 et g_0 doivent vérifier des relations de la forme

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial t} = \mathcal{A}_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma^2}, t \right), \quad 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau \partial t} = -\mathcal{B}_0 \left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2}, t \right), \quad (17)$$

où \mathcal{B}_0 et \mathcal{A}_0 sont définis par des formules analogues à (15).

V.1.2 Application de la méthode à l'étude de l'écoulement supersonique stationnaire autour d'un profil mince

Soit M le nombre de Mach à l'infini et posons

$$\beta^2 = M^2 - 1, \quad \beta > 0. \quad (18)$$

Si \bar{x}, \bar{y} sont des coordonnées cartésiennes sans dimension, si la vitesse à l'infini est prise pour unité et parallèle à l'axe des \bar{x} et si on pose

$$x = \bar{x}, \quad y = \beta \bar{y},$$

alors le potentiel des vitesses

$$\phi = x + \epsilon \varphi$$

où $\epsilon \varphi$ désigne le potentiel de perturbation, conduit, lorsqu'on écrit l'équation exacte à laquelle satisfait ϕ , à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par φ :

$$\begin{aligned} \varphi_{yy} - \varphi_{xx} = & \epsilon \frac{M^2}{\beta^2} \left\{ (\gamma + 1) \varphi_x \varphi_{xx} + 2\beta^2 \varphi_x \varphi_{xy} + \beta^2 (\gamma - 1) \varphi_x \varphi_{yy} \right\} \\ & + \epsilon^2 \frac{M^2}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{2} (\gamma - 1) (\varphi_x^2 + \beta^2 \varphi_y^2) (\phi_{xx} + \beta^2 \phi_{yy}) + \phi_x^2 \phi_{xx} \right. \\ & \left. + 2\beta^2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \beta^4 \varphi_y^2 \varphi_{yy} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

En un point d'une paroi faisant l'angle $\epsilon \alpha(x)$ avec l'axe des \bar{x} (Fig. 1) la condition de glissement sur la paroi s'écrit

$$\epsilon \beta \varphi_y = (1 + \epsilon \varphi_x) \tan \{ \epsilon \alpha(x) \} \quad (20)$$

Les relations (19) et (20) sont exactes.

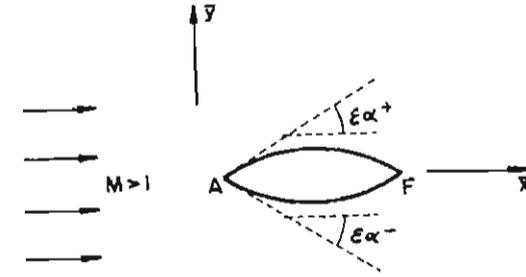


Figure 1 Géométrie du profil mince

Si les parois limitant l'obstacle font toujours un angle petit avec $O\bar{x}$, on peut considérer ϵ comme un paramètre petit, $\alpha(x)$ étant $O(1)$. La linéarisation formelle de (19) et de (20) conduit à:

$$\varphi_{yy} - \varphi_{xx} = 0 \quad (21)$$

$$\varphi_y(x, +0) = \frac{\alpha^+(x)}{\beta}, \quad \varphi_y(x, -0) = \frac{\alpha^-(x)}{\beta} \quad (22)$$

Si l'obstacle correspondant à $\epsilon = 0$ est porté par l'axe des x . Compte tenu du fait que l'écoulement amont ne saurait être perturbé, la solution du problème (21), (22) est celle schématisée sur la Fig. 2.

En fait l'équation (19) est bien du type (16). Aussi peut-on prévoir que la solution du problème linéarisé ne sera pas convenable aux grandes distances

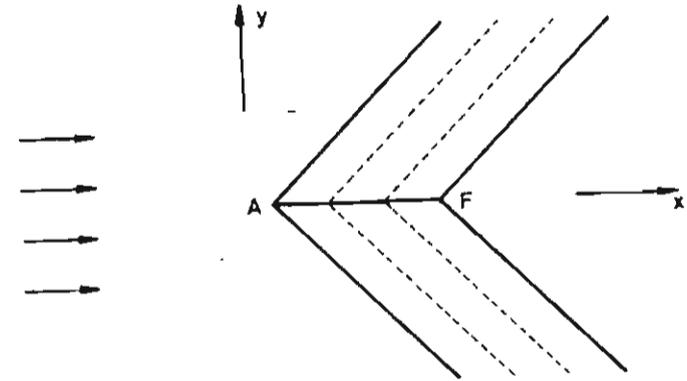


Figure 2 Schéma de l'écoulement supersonique linéarisé (Les vitesses de perturbation sont constantes sur les caractéristiques.)

pour lesquelles les termes non linéaires vont avoir un effet cumulatif sensible.

Appliquons la méthode dégagée dans la section précédente. Introduisons donc la variable lente

$$\bar{y} = \epsilon y$$

posons

$$\sigma = x - y, \quad \tau = x + y;$$

et cherchons φ sous la forme

$$\varphi(x, y, \epsilon) = \varphi_0(\sigma, \tau, \bar{y}) + \epsilon \varphi_1(\sigma, \tau, \bar{y}) + \dots$$

On a d'abord bien évidemment

$$\varphi_0 = f_0(\sigma, \bar{y}) + g_0(\tau, \bar{y})$$

Pour écrire l'équation vérifiée par φ_1 , il suffit de retenir au second membre de (19) les termes en ϵ . Il vient immédiatement

$$-4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \sigma \partial \tau} = 2f_{0\sigma\bar{y}} - 2g_{0\tau\bar{y}} + \frac{M^2}{\beta^2} \left\{ (\gamma + 1)(f_{0\sigma} + g_{0\tau})(f_{0\sigma\sigma} + g_{0\tau\tau}) + 2\beta^2(g_{0\tau} - f_{0\sigma})(g_{0\tau\tau} - f_{0\sigma\sigma}) + (\gamma - 1)\beta^2(g_{0\tau} + f_{0\sigma})(g_{0\tau\tau} + f_{0\sigma\sigma}) \right\}.$$

Intégrons d'abord par rapport à τ , puis par rapport à σ , après avoir posé

$$a(\sigma, \bar{y}) = f_{0\sigma}, \quad b(\tau, \bar{y}) = g_{0\tau}$$

qui sont d'ailleurs les quantités utiles pour la détermination de la vitesse et écrivons les relations analogues à (17). On notera que dans l'intégrale par rapport à τ définissant \mathcal{A}_0 , seuls les termes ne contenant que des dérivées par rapport à σ sont à retenir puisque les fonctions f_0 et g_0 ainsi que leurs dérivées sont supposées bornées, c'est-à-dire les termes en $f_{0\sigma} f_{0\sigma\sigma}$ qui ont pour coefficient

$$\frac{M^2}{\beta^2} [\gamma + 1 + 2\beta^2 + (\gamma - 1)\beta^2] = \frac{M^4(\gamma + 1)}{\beta^2}.$$

En définitive, les fonctions $a(\sigma, \bar{y})$ et $b(\tau, \bar{y})$ définies par (27) vérifient deux équations de Burgers sans dissipation analogues à (2)

$$2 \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{M^4}{\beta^2} (\gamma + 1) a \frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0,$$

$$2 \frac{\partial b}{\partial \bar{y}} - \frac{M^4}{\beta^2} (\gamma + 1) b \frac{\partial b}{\partial \tau} = 0.$$

Ici, ces deux équations sont découplées. Ceci tient au fait, qu'en vertu des

conditions amont, on doit prendre $g = 0$ si $y > 0$, $f = 0$ si $y < 0$. Dans ces deux demi-plans, la condition aux frontières (20), lorsqu'on y reporte le développement (26) montre que

$$\beta a(x, 0) = -\alpha^+(x), \quad \beta b(x, 0) = \alpha^-(x). \tag{30}$$

Il est ainsi conduit, pour déterminer a et b , à traiter un problème de Cauchy pour l'équation (2). Nous allons étudier cette question dans le paragraphe suivant.

L'écoulement est un écoulement d'onde progressive et même d'onde simple. Il en est encore ainsi quand on tient compte des termes du second ordre, mais non quand on inclut dans le développement les termes du troisième ordre. Ce n'est qu'à ce stade que le formalisme des échelles multiples est vraiment utile et même nécessaire. Pour étudier le problème considéré, on aurait pu faire appel, ici, à la méthode de distorsion des coordonnées qui aurait conduit à des calculs légèrement plus simples.

2. Modèle de Burgers sans Dissipation

2.1 Solution classique du problème de Cauchy

L'équation (2), si on l'interprète comme un modèle de mécanique des fluides, exprime que la dérivée particulaire de la vitesse est nulle:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire que la vitesse d'une particule que l'on suit dans son mouvement est constante. Ainsi chaque particule se meut d'un mouvement uniforme avec la vitesse qu'elle a à l'instant $t = 0$; l'image de sa trajectoire dans le plan x, t est une caractéristique de (2). On a donc ainsi résolu le problème de Cauchy: trouver la solution $u(x, t)$ de (2) connaissant ses valeurs à l'instant $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{31}$$

La Fig. 3 en donne un exemple dans un cas simple. On peut même ainsi, dans certains cas, trouver la solution si $u_0(x)$ présente une discontinuité (Fig. 4). Analytiquement, la solution $u(x, t)$ est définie paramétriquement et implicitement par

$$u = u_0(\xi), \quad x - u_0(\xi)t = \xi. \tag{32}$$

Mais une telle solution ne définit *univoquement* $u(x, t)$ pour tout t que si $u_0(x)$ est une *fonction non décroissante* de x . Or cette condition est impérative si u représente une grandeur physique comme la vitesse. S'il n'en n'était pas ainsi, $u(x, t)$ pourrait prendre plusieurs valeurs. Par exemple, dans le cas

représenté Figure 5, la solution cesse d'être acceptable, pour tout x dès que t dépasse la valeur 1. La ligne L enveloppe des trajectoires, qui sont ici les caractéristiques de (2), et est appelée "ligne limite" de l'écoulement.

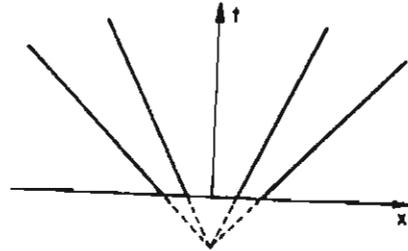


Figure 3 $u_0(x) \rightarrow u = \frac{x}{1+t}$

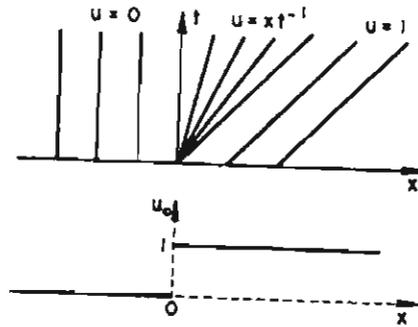


Figure 4

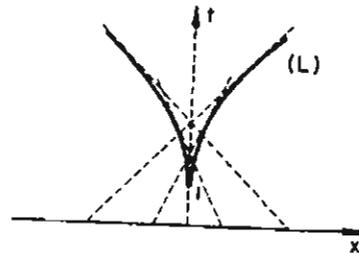


Figure 5 $u_0 = -th x$
 (L): $t = Ch^2 \xi$
 $x = \xi - Sh \xi Ch \xi$

On remarquera sur les Fig. 3 et 4 que, dans le cas où $u_0(x)$ est non décroissant — nous dirons dans le cas d'une détente, par analogie avec la situation contrée en mécanique des fluides — les pentes des profils des vitesses constant sont atténuées ou adoucies lorsque t croît, alors que lorsque $u_0(x)$ est décroissant (Fig. 5), les pentes de ces profils sont accentuées ou durcies lorsque t croît (en restant inférieur à 1).

En conclusion, le traitement classique de ce problème de Cauchy ne fournit pas toujours une solution satisfaisante si on veut obtenir une solution univoquement définie pour tout temps t .

2.2 Solutions faibles

Il en est ainsi c'est que la classe des solutions classiques ($u(x, t)$ continues continument dérivables par morceaux ou presque partout) est trop restreinte. Comme on peut écrire (2) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}u^2) = 0 \tag{33}$$

il voit que l'on peut définir au sens des distributions les deux termes figurant dans le premier membre de (33) pour des fonctions $u(x, t)$ à valeurs numériques d'un caractère très général (fonctions sommables et de carré sommable par exemple). Si (33) est vérifiée pour une telle fonction $u(x, t)$, on dira que $u(x, t)$ est une solution faible de (2). Il est équivalent de dire que $u(x, t)$ est solution de (33) si

$$\int_C u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0 \tag{34}$$

pour tout contour fermé tracé dans le demi-plan $t \gg 0$ du plan (x, t) .

Si $u(x, t)$ est continu par morceaux et pour fixer les idées discontinu à la traversée d'un arc Γ , on doit avoir, d'après (34), pour tout arc PQ de Γ

$$\int_{PQ} [u] dx - \frac{1}{2}[u^2] dt = 0, \tag{35}$$

on note $[h]$ le saut de $h(x, t)$ à travers Γ :

$$[h] = h(x + 0, t) - h(x - 0, t).$$

Comme PQ est arbitraire ceci implique

$$w[u] = \frac{1}{2}[u^2]$$

ou

$$w = \frac{u_1 + u_2}{2} \tag{36}$$

en tout point de Γ , w étant la vitesse d'un point de Γ que l'on suit sur la

surface de discontinuité. On dit que (36) est la condition de saut (juste relation) à travers la discontinuité.

Si $u(x, t)$ est une fonction continue et continument différentielle par morceaux dans $t \gg 0$ et si $u(x, t)$ vérifie (2) en tout point de continuité et (36) en tout point de discontinuité, alors $u(x, t)$ est une solution faible de (2).

On peut procéder à la recherche des solutions faibles en introduisant

$$\phi(x, t) = \int_{0,0}^{x,t} u \, dx - \frac{u^2}{2} dt$$

et en remarquant que ϕ est solution de l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Nous allons chercher les solutions continues de (38) qui prennent à l'instants initial les valeurs

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \int_0^x u_0(x') \, dx'.$$

On obtient aisément une solution de (38) dépendant de deux paramètres s et c

$$\phi = sx - \frac{s^2}{2}t - c$$

et par suite l'intégrale générale en éliminant s entre

$$\begin{cases} \phi = sx - \frac{s^2}{2}t - c(s) \\ 0 = x - st - c'(s). \end{cases}$$

La solution cherchée du problème de Cauchy correspond au cas où on admet plus, d'après (39),

$$\begin{cases} \phi_0(x) = sx - c(s) \\ 0 = x - c'(s). \end{cases}$$

Au lieu de s introduisons le paramètre y défini par

$$y = c'(s),$$

alors (41) s'écrit

$$\phi_0(y) = sy - c(s),$$

d'où, par différentiation

$$u_0(y) \, dy = s \, dy + (y - c'(s)) \, ds$$

en vertu de (43) on obtient

$$s = u_0(y) \tag{45}$$

qui constitue la résolution de (43). En tenant compte de (41), (45) les équations (40) s'écrivent

$$\begin{cases} \phi = \frac{(x-y)^2}{2t} + \phi_0(y) = F(x, y, t) \\ x - y = tu_0(y). \end{cases} \tag{46}$$

On voit donc—et on peut le vérifier directement—que par élimination de y entre les deux équations (46), on obtient une fonction $\phi(x, t)$ vérifiant (38) au voisinage de chaque point de continuité, et vérifiant la condition initiale (39) pour $t = 0$. Plus précisément:

En un point x, t fixé, la valeur de ϕ s'obtient en cherchant les valeurs stationnaires en y . Par suite, en un point x, t , $u(x, t)$ peut subir une discontinuité s'il existe deux valeurs de y qui donnent à F deux valeurs stationnaires et égales.

On a, en effet, en dérivant (46)₁, puisque F est stationnaire en y

$$u(x, t) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, t) = u_0(y)$$

conformément d'ailleurs à (32)₁.

En définitive, dans la classe des solutions faibles, on peut toujours résoudre le problème de Cauchy, mais on n'est plus assuré de l'unicité de la solution.

Vérifions-le sur un exemple: la solution définie par

$$\begin{cases} u = 0 & \text{si } 2x < t \\ u = 1 & \text{si } 2x > t \end{cases}$$

est une solution faible qui vérifie la même condition initiale que la solution donnée à la figure 4.

Autrement dit, la classe des solutions faibles est trop vaste pour les applications que nous avons en vue. Il nous faut trouver une classe de solutions qui permettent de trouver une solution, et une seule, du problème de Cauchy définie univoquement en tout point du demi-plan $t > 0$, sauf peut-être sur certaines lignes de discontinuité.

V.3 Résolution de l'Équation de Burgers

L'équation (2) est un modèle de fluide parfait; les solutions qui nous intéressent sont celles qui sont en fait les limites quand ν tend vers zéro des solutions de l'équation (1). Soit donc à résoudre pour cette équation le problème de Cauchy avec la donnée initiale

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

On peut reprendre l'analyse faite en V.2.2. Ecrire l'équation (1), c'est écrire qu'il existe une fonction $\phi(x, t)$ telle que

$$u dx - \left(\frac{u^2}{2} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dt = d\phi.$$

Par suite $\phi(x, t)$ est solution de

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Le fait très remarquable est que si on pose

$$\phi = -2v \log \theta(x, t),$$

la fonction $\theta(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur que nous avons déjà rencontrée plusieurs fois

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Il est donc aisé de calculer $\theta(x, t)$ compte tenu des conditions initiales, comme $u(x, t) = -2v(\theta_x/\theta)$, on trouve que:

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t} \exp \left\{ -\frac{1}{2v} F(x, y, t) \right\} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2v} F(x, y, t) \right\} dy},$$

où $F(x, y, t)$ est définie comme en (46):

$$F(x, y, t) = \frac{(x-y)^2}{2t} + \phi_0(y). \quad (49)$$

Il est alors possible d'étudier, pour une donnée $u_0(x)$ fixée, la limite de (48) lorsque v tend vers zéro. Il est intuitif que la contribution dominante dans les intégrales figurant dans (48) sera obtenue pour les valeurs de y proches de celle (ou exceptionnellement de celles) qui donnent à F la valeur minimum pour (x, t) fixés. On peut établir de façon précise le résultat suivant:

Pour les données de Cauchy fixées, la solution de (47), lorsque v tend vers zéro, tend vers la fonction continue

$$\phi(x, t) = \inf_y \{ F(x, y, t) \}. \quad (50)$$

Soit D l'ensemble des points de $t > 0$ en lesquels le minimum absolu de F est atteint pour une seule valeur de y , soit $y_m(x, t)$; alors la limite du second membre de (48) quand $v \rightarrow 0$ est égale à

$$u = \frac{x - y_m(x, t)}{t}. \quad (51)$$

complémentaire de D est coupé par toute ligne $t = \text{constante}$ suivant un ensemble de points au plus dénombrable. En chacun de ces points on a

$$u_- = u(x - 0, t) = \frac{x - y_-(x, t)}{t}, \quad u_+ = u(x + 0, t) = \frac{x - y_+(x, t)}{t} \quad (52)$$

(47) $y_-(x, t)$ et $y_+(x, t)$ sont, pour x, t donnés, la plus petite valeur et la plus grande valeur qui donnent à F sa valeur minimale. Par suite, en chacun de ces points

$$u(x - 0, t) > u(x + 0, t). \quad (53)$$

En d'autres termes, nous dirons qu'une fonction $u(x, t)$ définie comme il vient d'être dit, à partir de (49), (51), (52) et qui par suite vérifie (53) est la solution avec chocs du problème de Cauchy posé pour l'équation (2). Il est clair alors que

—les solutions avec chocs constituent une sous classe des solutions faibles. — le long d'une ligne de discontinuité—qu'on appellera alors "onde de choc"—une telle solution vérifie non seulement la condition de saut appelée aussi équation du choc (36), mais aussi l'inégalité du choc (53);

(48) —dans la classe des solutions avec chocs, le problème de Cauchy a une solution et une seule (il suffit, par exemple, que $u_0(x)$ soit sommable et $|u_0(x)|$ pour $|x|$ grand).

La figure 6 donne un exemple simple de solutions avec chocs.

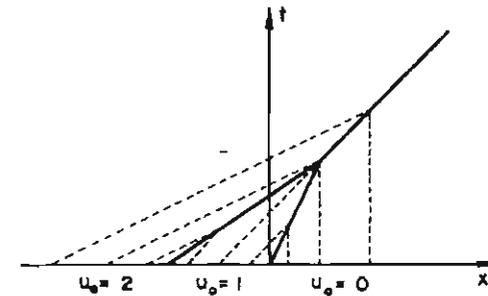


Figure 6

La structure des solutions avec chocs, leurs propriétés, leur détermination numérique, leur caractérisation parmi l'ensemble des solutions faibles, leur généralisation à d'autres équations de conservation ou même à des systèmes d'équations de conservation, ont fait l'objet de multiples travaux.

V.4 Détermination d'une Solution avec Chocs

Comment construire la solution $u(x, t)$ connaissant $u_0(x)$ et en particulier comment construire les ondes de choc?

La réponse repose sur la remarque suivante. Si x, t est un point d'un choc la continuité de ϕ entraîne d'après (50) et (49):

$$\phi_0(y_+) - \phi_0(y_-) = \frac{1}{t} \left[x - \frac{y_+ + y_-}{2} \right] [y_+ - y_-],$$

ou compte tenu de (39) et de (52)

$$\int_{y_-}^{y_+} u_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2} [u_+ + u_-] [y_+ - y_-]. \tag{54}$$

Sur le graphe G d'équation $\eta = u_0(\xi)$ dans un plan ξ, η (Fig. 7), la droite joignant les points (y_-, u_-) et (y_+, u_+) doit donc découper deux aires hachurées égales. Elle a d'ailleurs pour équation

$$\xi + \eta t = x, \tag{55}$$

car d'après (52), $\xi = u_-, \eta = y_-$ et $\xi = u_+, \eta = y_+$ sont bien deux points de la droite (55). Elle détermine donc le point x, t : elle coupe l'axe des ξ au point d'abscisse x et sa pente est égale à $-1/t$.

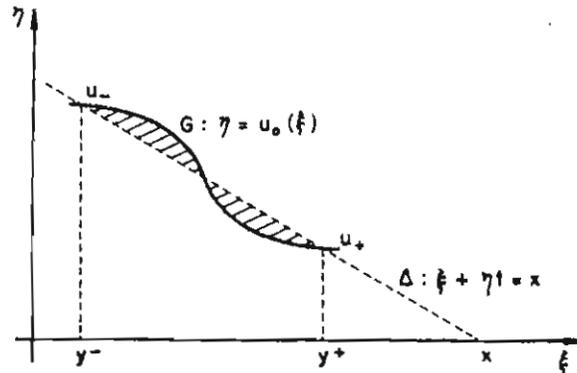


Figure 7

Ce résultat conduit à une construction simple des ondes de chocs. La première onde de choc apparaît à l'instant t_0 déterminé par la tangente d'inflexion Δ_0 ayant la pente négative de plus forte valeur absolue. On fait varier Δ à partir de Δ_0 de manière à découper sur G des aires hachurées

ales et à chaque position de Δ on détermine le point du choc par la règle qui vient d'être explicitée. La construction s'applique si la fonction $u_0(x)$ présente des discontinuités. La figure 8 montre comment retrouver la solution simple donnée figure 6, par application de cette construction.

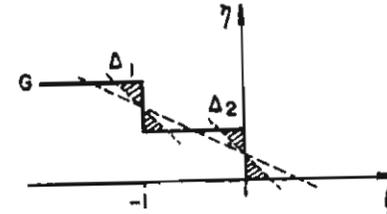


Figure 8 Pour $t < 1$: deux ondes de choc
Pour $t = 1$: rencontre des deux chocs

V.5 Exemple: Ecoulement Supersonique Stationnaire Autour d'un Profil Mince

Nous reprenons le problème envisagé en V. 1. Nous n'étudierons que l'écoulement dans le demi plan supérieur $\bar{y} > 0$. Posant

$$\bar{y} = \frac{M^*(\gamma + 1)}{2\beta^2} y = \frac{M^*(\gamma + 1)}{2\beta^2} \epsilon y = \frac{M^*(\gamma + 1)}{2\beta} \epsilon \bar{y}, \tag{56}$$

l'équation (28) prend la forme de l'équation (2)

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{y}} + a \frac{\partial a}{\partial \sigma} = 0, \tag{57}$$

et cette fonction $a(\sigma, \bar{y})$ prend les valeurs initiales (30)

$$a(\xi, 0) = \frac{\alpha(\xi)}{\beta}, \tag{58}$$

Les caractéristiques ont pour équation

$$\sigma = -\frac{\alpha(\xi)}{\beta} \bar{y} + \xi,$$

soit dans le plan \bar{x}, \bar{y}

$$\bar{x} - \beta \bar{y} = -\epsilon \frac{M^*(\gamma + 1)}{2\beta^2} \alpha(\xi) \bar{y} + \xi. \tag{59}$$

Sur chacune d'elle $a(\sigma, \bar{y})$ garde une valeur constante. Comme on a pour

la vitesse

$$\bar{u} = 1 + \epsilon \varphi_x = 1 + \epsilon \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} = 1 + \epsilon a$$

$$\bar{v} = \epsilon \beta \varphi_y = -\epsilon \beta \frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\epsilon \beta a,$$

on voit que sur chacune de ces caractéristiques la vitesse reste constante à la valeur qu'elle avait sur la caractéristique correspondante en solution linéarisée. Mais (59) montre que les termes non linéaires entraînent une légère variation de pente (proportionnelle à ϵ), sans grande importance des distances finies du profil, mais en fait très sensible aux grandes distances par effet cumulatif.

L'écoulement présentera en général deux ondes de choc, une onde de choc de tête et une de bord de fuite qu'il est facile de déterminer paramétriquement en appliquant la méthode donnée en V.4. Nous nous contenterons de déterminer l'allure asymptotique de l'onde de tête. La droite qui découpe dans le plan (ξ, η) des aires hachurées égales, d'équation $\xi + \beta \eta = \sigma$, lorsque β augmente indéfiniment est telle que $\sigma \sim -(2A\beta)^{1/2}$ (Figure 9), si A est l'aire du triangle mixtiligne OBC . L'onde de tête a donc pour allure asymptotique

$$\bar{x} - \beta \bar{y} \sim - \left(\frac{AM^2(\gamma + 1)}{\beta} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \beta^{1/2}$$

c'est-à-dire l'allure d'une parabole. Un résultat analogue est valable pour l'onde de bord de fuite.

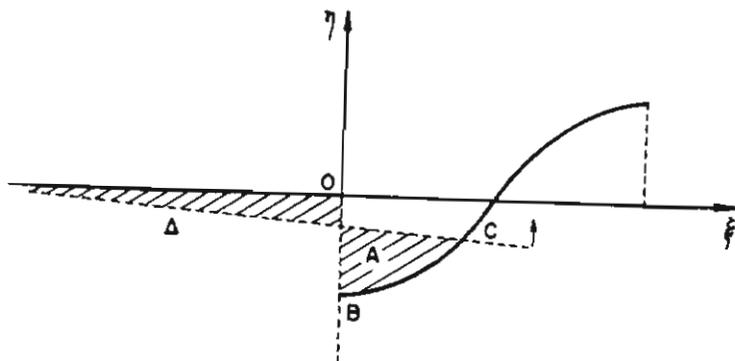


Figure 9 Construction de l'onde de tête

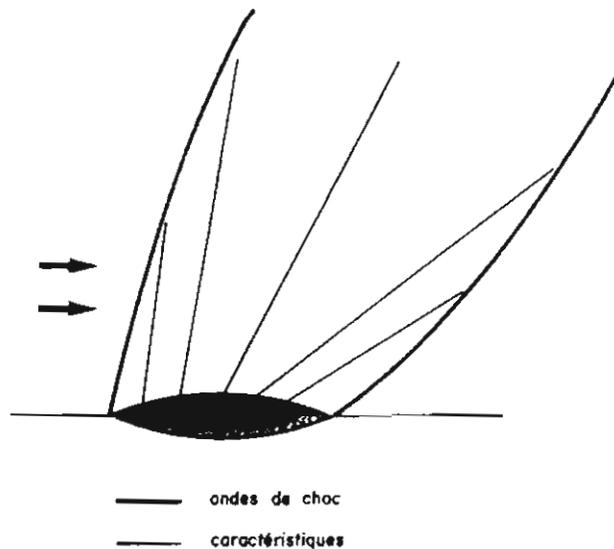


Figure 10 Prise en compte des effets non linéaires de convection

On a tracé sur la figure 10 l'allure générale de l'écoulement qu'il y a lieu de comparer à celui obtenu (Figure 2) en négligeant complètement les termes non linéaires.

VI Notions sur la Propagation des Ondes Progressives de Faible Amplitude

Introduction

Nous voulons dans cette section donner une nouvelle application de la technique des échelles multiples à un problème de propagation d'ondes. Le phénomène physique que nous voulons étudier se présente comme une généralisation de celui de la propagation d'un train d'ondes sphériques en régime acoustique évoqué sur la figure 1, engendré au centre à l'instant $t = 0$ pendant une durée assez courte. La solution est de la forme

$$u = \frac{1}{r} f(\xi) \quad \text{où} \quad \epsilon \xi = ct - r, \tag{1}$$

où c est la célérité des ondes sphériques supposée constante. Si $f(x)$ est une fonction nulle en dehors de l'intervalle borné $0 \ll x \ll l$, ϵ un paramètre

petit, à tout instant t , le train d'ondes est "trappé" dans la zone de largeur ϵl limitée par deux sphères concentriques de rayon $L = ct$ et $L - \epsilon l$. Dans un tel problème, ϵ apparaît comme le rapport de deux échelles de temps ou de longueur. L'étude des problèmes de cette nature pourra, s'ils sont assez complexes, être facilitée grâce à l'emploi de la méthode des échelles multiples. Dans la formule (1) figurent, en effet, de façon naturelle les deux variables de longueur r, ξ ; on dira que ξ est la *variable phase* du train d'ondes; $f(\xi)$ décrit le profil du train d'ondes. Quand le temps varie, le profil reste identique à lui-même. Mais, en fait, la présence du facteur r^{-1} produit une atténuation de l'amplitude lorsque le temps croît.

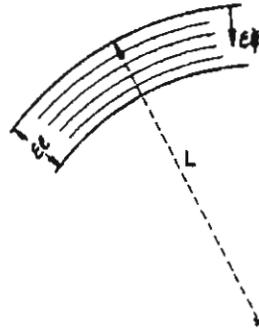


Figure 1. Onde acoustique sphérique

Peut-on généraliser une représentation du type (1) à des cas plus complexes, notamment dans le cas où on souhaite tenir compte d'effets non linéaires de convection et même, s'il y a lieu, d'effets dissipatifs? Telle est la question que nous allons évoquer ici. Il n'est pas besoin de dire que la présente étude ne constitue qu'une brève introduction à un chapitre fort important de la mécanique des fluides et de la physique mathématique; l'une des applications principales est celle du "Bang sonique" produit par les avions évoluant en régime supersonique. Ce sont d'ailleurs les travaux consacrés au "Bang sonique" qui ont été sans aucun doute à la base de la théorie que nous voulons présenter.

VI.1 Description Mathématique du Phénomène

Nous désignerons par x^1, x^2, x^3 ou x^i les coordonnées cartésiennes ortho-normées d'un point de l'espace que nous désignerons aussi par x , t le temps que nous noterons aussi x^0 . Un indice latin prend les valeurs 1, 2, 3; un indice grec les valeurs 0, 1, 2, 3.

Le phénomène étudié est décrit par p variables à valeurs scalaires des x^i , U^0, U^1, U^{p-1} ou par une fonction à valeurs vectorielles $U(t, x)$.

On dira que les $U(t, x)$ décrivent une onde progressive si à chaque instant t il existe une famille de surfaces $\xi = \text{constante}$, appelées "ondelettes",

$$F(t, x) = \xi$$

telles que l'ordre de grandeur des variations de U (et de ses dérivées) lorsque x se déplace sur une ondelette est petit par rapport à l'ordre de grandeur de ses variations lorsque x reste fixe dans l'espace.

On peut donner une forme précise à cet énoncé en introduisant le formalisme des échelles multiples.

$$\text{On pose: } \xi = \epsilon \xi = F(t, x). \quad (2)$$

On cherchera U comme fonction des cinq variables scalaires t, x^i, ξ en posant

$$U(x^i) = \tilde{U}(\xi, x^i). \quad (3)$$

Après que nous aurons trouvé \tilde{U} , on récupérera la valeur cherchée remplaçant dans U par sa valeur en fonction des x^i donnés par (2).

Vérifions que si \tilde{U} et ses dérivées sont bornés et si ϵ est petit, (3) décrit bien une onde progressive. On a

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} F_{,i} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x^i}, \quad (4)$$

on pose

$$F_{,i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (5)$$

Le long de toute trajectoire représentée paramétriquement par $x^i(\tau)$:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} \frac{dF}{d\tau} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Si on se déplace sur une ondelette $F = \text{constante}$, le second membre a une valeur beaucoup plus petite que si on se maintient en un point fixe.

Cette description est adaptée pour l'étude des trains d'ondes de faible largeur, des ondes courtes, ou encore, à la limite, d'ondes de discontinuité. Remarquons enfin que la notion considérée est une généralisation de la notion d'onde simple [cas où $U(x^i) = G(\xi)$]; (3) montre que, en quelque sorte, notre onde progressive est localement une onde simple qui évolue relativement très lentement.

VI.2 Problème Linéaire

Nous commençons par rechercher les ondes progressives pour un phénomène qui peut être décrit par un système d'équations linéaires que nous écrirons

$$\mathcal{L}(U) = \frac{\partial U}{\partial t} + A_0^k \frac{\partial U}{\partial x^k} + B_0 U = A_0^k \frac{\partial U}{\partial x^k} + B_0 U = 0$$

A_0^k, B_0 sont des matrices $p \times p$ fonctions de x et de t , A_0^0 est la matrice unité

VI.2.1 Développement asymptotique formel

Mettant à profit l'existence du petit paramètre ϵ , et cherchant à préparer l'examen du cas non linéaire, nous supposons connue une solution U_0 de (6) et nous chercherons une solution U de la forme

$$U(x^v) = \tilde{U}(\xi, x^v) = U_0(x^v) + \delta \{ \epsilon \tilde{U}_1(\xi, x^v) + \epsilon^2 \tilde{U}_2(\xi, x^v) + \dots \}$$

sans imposer à U de conditions aux frontières ou de conditions initiales. Le facteur δ ne jouera aucun rôle, puisque l'équation est linéaire; il est arbitraire et figure dans (7) uniquement pour rappeler que, dans le cas linéaire, aucune limitation d'amplitude n'est imposée à la solution.

Substituant (7) dans (6), égalant à zéro les puissances successives de ϵ et introduisant la matrice C_0 définie par

$$C_0 = A_0^k F_{,k}$$

il vient

$$C_0 \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$C_0 \frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial \xi} + \mathcal{L}(\tilde{U}_{n-1}) = 0.$$

Nous ne pourrions avoir une solution (7) non banale que si

$$\det(C_0) = 0,$$

équation qui exprime ici que $F(x^v)$ est une surface caractéristique. Supposons qu'il en soit ainsi et admettons également que C_0 n'admette alors qu'une seule direction propre à droite et à gauche. Nous désignerons par R et L deux tels vecteurs, assujettis à une normalisation partielle comme indiqué ci-dessous:

$$C_0 R = L C_0 = 0, \quad L R = 1.$$

Bien noter que R et L ne sont fonctions que des x^v (et non de ξ). Donc d'après (9) $\partial \tilde{U} / \partial \xi$ est colinéaire à R . Par intégration, en prenant nulle la

constante d'intégration, on obtient ainsi:

$$\tilde{U}_1 = \alpha(\xi, x^v) R(x^v). \tag{13}$$

Comme toujours dans l'application de la méthode des échelles multiples α est déterminé à ce stade de l'étude, et l'information nécessaire sur $\alpha(\xi, x^v)$ proviendra de l'examen de l'équation (10) pour $n = 2$. En effet, d'après (11), on ne pourra calculer $\partial \tilde{U}_2 / \partial \xi$ que si

$$L \cdot \mathcal{L}(\tilde{U}_1) = 0. \tag{14}$$

Or

$$L \cdot \mathcal{L}(\alpha R) = L A_0^k R \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} + \alpha L \cdot \mathcal{L}(R).$$

Posons

$$L A_0^k R = V_0^k, \quad K = L \cdot \mathcal{L}(R). \tag{15}$$

La condition (14) s'écrit

$$T(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_0^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} + K \alpha = 0. \tag{16}$$

C'est une équation linéaire à laquelle doit satisfaire la fonction α . On dit que $T(\alpha) = 0$ est l'équation de transport. Manifestement, V_0^k est une vitesse: c'est la vitesse de rayon. On appelle "rayons" les intégrales du système (si F est supposé connu)

$$\frac{dx^k}{dt} = V_0^k \tag{17}$$

et dérivée le long d'un rayon, l'opérateur

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + V_0^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{18}$$

Ainsi le long d'un rayon, (16) est une équation différentielle ordinaire dont l'intégrale générale s'écrit

$$\alpha = f(\xi) a(x^v),$$

si $a(x^v)$ est une solution particulière de (16)— $T(a) = 0$. La variable ξ n'intervient en effet que dans la constante d'intégration. En règle générale f dépend aussi du rayon; mais nous ne considérerons ici que le cas où f est une fonction de la variable ξ seule.

Ainsi nous avons mis en évidence une solution pour laquelle la terme dominant figurant dans le développement entre parenthèses dans (7) est de la

forme

$$\tilde{U}_1 = f(\xi)a(x^\nu)\mathbf{R}(x^\nu) = f(\xi)\mathbf{W}(x^\nu)$$

$f(\xi)$ est la *fonction phase*: elle décrit le profil de l'onde, $\mathbf{R}(x^\nu)$ est le *facteur de structure*, $a(x^\nu)$ un *facteur de modulation* (lentement variable).

On peut calculer \tilde{U}_2, \tilde{U}_3 sans difficulté. On trouve que, de façon générale, \tilde{U}_m est de la forme

$$\tilde{U}_m = f_m(\xi)\mathbf{W}_m(x^\nu),$$

où f_m est telle que

$$\frac{df_m}{d\xi} = f_{m-1}, \quad f_1 = f.$$

On peut même montrer que le développement est convergent. On a donc bien ainsi construit une onde progressive. On remarquera que l'on retrouve ainsi la théorie des ondes courtes. Dans ce cas $f = e^{-i\xi}$, et f_m est encore proportionnel à $e^{-i\xi}$; la vitesse de rayon s'identifie à la vitesse de groupe.

VI.2.2 Propriétés des rayons

Il est clair que la détermination des rayons constitue une étape capitale de la construction précédente.

L'équation (11) est une équation aux dérivées partielles pour la fonction F , homogène et de degré p par rapport aux F_ν . Comme C_0 n'admet qu'une seule direction propre (à droite ou à gauche), on peut résoudre en F_0 et l'écrire

$$F_0 + \Omega(F_k, x^k, t) = 0,$$

Ω étant une fonction homogène d'ordre 1 des F_k . On peut d'ailleurs normaliser F_ν en posant

$$F_0 = -\lambda w_0, \quad F_i = \lambda n_i, \quad \lambda = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{1/2} \quad (23)$$

$$w_0 = \Omega(n_k, x^k, t) \quad (24)$$

\mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'onde; w_0 la vitesse de phase. On peut alors facilement démontrer les propriétés suivantes:

1) La vitesse de rayon est donnée par

$$V_0^k = \partial_{F_k} \Omega(F_k, x^k, t) \quad (25)$$

où ∂_{F_k} est la dérivée partielle de Ω par rapport à F_k lorsque F_k, x^k, t sont considérés comme des variables indépendantes.

$$2) w_0 = V_0^k n_k \quad (26)$$

(19) la vitesse de phase est la composante normale de la vitesse de rayon.

3) F est constant sur un rayon.

4) La formule (25) montre que les V_0^k dans (17) dépendent des F_R . Par suite (17) n'est pas suffisant pour déterminer les rayons. Par contre, on a

$$(20) \quad \frac{\delta x^k}{\delta t} = \partial_{F_k} \Omega, \quad \frac{\delta F_k}{\delta t} = -\partial_{x^k} \Omega. \quad (27)$$

Ce système—canonique—permet de déterminer les rayons, connaissant naturellement des conditions initiales convenables.

5) On a:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta t} = \partial_t \Omega. \quad (28)$$

Les rayons d'après (27) sont les caractéristiques de l'équation (22) et les bicaractéristiques du système initial (6). Si Ω ne dépend pas de t , les rayons forment une famille de courbes déterminées une fois pour toutes (comme les trajectoires s'identifient aux lignes de courant dans un écoulement stationnaire). Si Ω est indépendant de x^ν , les rayons sont rectilignes.

6) Très fréquemment, on peut écrire l'équation de transport sous la forme

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathcal{U} V_0^k) = 0 \quad (29)$$

C'est, en particulier, ce qui a lieu si le phénomène peut se décrire par une formulation variationnelle. \mathcal{U} est l'action (de l'onde). L'intégrale de \mathcal{U} dans un volume qui se déplace avec la vitesse de rayon reste constante. On peut alors trouver une intégrale particulière de l'équation de transport.

VL3 Application à la Dynamique des Gaz

Un écoulement de fluide parfait compressible est décrit par cinq fonctions à valeurs scalaires, masse volumique ρ , vitesse u^i , entropie spécifique s . La pression et la célérité du son sont données par la thermodynamique

$$p = p(\rho, s), \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (30)$$

Ainsi on a

$$\mathbf{U} = \{\rho, u^1, u^2, u^3, s\}.$$

Le système (6) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i) = 0,$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u^i \frac{\partial s}{\partial x^i} = 0.$$

Si on connaît une solution $\rho_0(\mathbf{x}, t)$, $u_0^i(\mathbf{x}, t)$, $s_0(\mathbf{x}, t)$, on peut se proposer de chercher une solution voisine (η petit)

$$U(\mathbf{x}, t) = U_0(\mathbf{x}, t) + \eta U_1(\mathbf{x}, t),$$

en prenant pour U_1 une solution du système (31) après linéarisation. Le système linéaire associé à (31) s'écrit:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_0^i \frac{\partial \rho_1}{\partial x^i} + \rho_0 \frac{\partial u_1^i}{\partial x^i} + \rho_1 \frac{\partial u_0^i}{\partial x^i} + u_1^i \frac{\partial \rho_0}{\partial x^i} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1^i}{\partial t} + u_0^j \frac{\partial u_1^i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 \frac{\partial s_1}{\partial x^i} + u_1^j \frac{\partial u_0^i}{\partial x^j}$$

$$+ \rho_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \right)_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right) \right)_0 \frac{\partial s_0}{\partial x^i} \right]$$

$$+ s_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \right)_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right) \right)_0 \frac{\partial s_0}{\partial x^i} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + u_0^i \frac{\partial s_1}{\partial x^i} + u_1^i \frac{\partial s_0}{\partial x^i} = 0.$$

Ce système est bien de la forme (6), la fonction inconnue étant ici U_1 au lieu de U .

Ecrivons l'équation (9)—compte tenu de (8)—en posant

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \mu, \quad \mu \{ \mu_0, \mu_1, \mu_4 \},$$

il vient, avec les notations (23), pour (32)₄

$$\mu_4(u_0^i n_i - w_0) = 0.$$

Eliminant le cas où $u_0^i n_i - w_0 = 0$, cas où les ondelettes seraient des surfaces fluides, on aura donc nécessairement $\mu_4 = 0$. Compte tenu de ce résultat (9)

écrit

$$\mu_0(u_0^i n_i - w_0) + \rho_0 \mu_1 n_i = 0,$$

(33)

$$\mu_0 n_i + \mu_1(u_0^i n_i - w_0) = 0.$$

(31) suite, on ne peut calculer les μ_v que si

$$(u_0^i n_i - w_0)^2 - c_0^2 = 0;$$

autrement dit, la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la surface d'onde est égale à la célérité du son; (24) s'écrit ici

$$w_0 = u_0^i n_i \pm c_0. \tag{34}$$

On en déduit que (22) prend la forme

$$F_0 + F_1 u_0^i \pm c_0 (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{1/2} = 0, \tag{35}$$

que, d'après (25), la vitesse de rayon est

$$(32) \quad V_0^i = u_0^i \pm c_0 n^i. \tag{36}$$

Cette formule généralise un résultat bien connu en acoustique. Compte tenu de (34), on peut déterminer les μ_v en résolvant (33):

$$\mu_i = \pm \frac{c_0}{\rho_0} \mu_0 n_i$$

Or, \mathbf{R} est colinéaire à μ . Nous prendrons

$$\mathbf{R} : \left\{ \pm \frac{\rho_0}{c_0}, n_1, n_2, n_3, 0 \right\}. \tag{37}$$

la matrice C_0 , en tenant compte de (34), s'écrit

$\mp c_0$	$\rho_0 n_1$	$\rho_0 n_2$	$\rho_0 n_3$	0
$\frac{c_0^2}{\rho_0} n_1$	$\mp c_0$	0	0	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 n_1$
$\frac{c_0^2}{\rho_0} n_2$	0	$\mp c_0$	0	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 n_2$
$\frac{c_0^2}{\rho_0} n_3$	0	0	$\mp c_0$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 n_3$
0	0	0	0	$\mp c_0$

(38)

Elle présente certaines propriétés de symétrie et connaissant le vecteur propre à droite, il est facile de déterminer le vecteur propre à gauche

vérifiant la relation (2)

$$L : \frac{1}{2} \left\{ \pm \frac{c_0}{\rho_0}, n_1, n_2, n_3, \pm \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 \right\}.$$

Enfin, l'équation de transport, après quelques calculs s'écrit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (u'_0 \pm c_0 n'_i) \frac{\partial \alpha}{\partial x'_i} + \frac{\alpha}{2} \left\{ n_i \frac{\partial u'_0}{\partial x'_i} n_j - \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial c_0}{\partial t} + u'_0 \frac{\partial c_0}{\partial x'_i} \right) \pm \frac{n_i}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x'_i} (\rho c)_0 \pm c_0 \frac{\partial n_i}{\partial x'_i} \right\} = 0.$$

On remarquera que, vu le choix fait pour R, la perturbation de vitesse $\epsilon u'$ est normale à la surface d'onde et qu'elle a pour mesure α sur le vecteur normal à cette surface.

VI.4 Effets Non Linéaires de Convection

Le système (31) montre qu'en général le système à étudier sera non linéaire. Nous l'écrivons:

$$\mathcal{H}(U) = A^\nu(x^\nu, U) \frac{\partial U}{\partial x^\nu} + C(x^\nu, U) = 0$$

où A^0 est la matrice unité.

Il est vraisemblable, comme le montre l'exemple étudié à la fin de la section V, que même si l'amplitude de la perturbation reste faible, les effets non linéaires, si l'onde se propage suivant des distances assez grandes, auront un effet cumulatif. Nous supposons encore que $U_0(x^\nu)$ est une solution connue du système (4) et nous cherchons une solution de la forme (7)

$$U(x^\nu) = U_0(x^\nu) + \delta \hat{U}(x^\nu)$$

$$\hat{U}(x^\nu) = \epsilon \hat{U}_1(\xi, x^\nu) + \epsilon^2 \hat{U}_2(\xi, x^\nu) + \dots$$

Par hypothèse $\delta \epsilon$ doit être petit pour que la solution cherchée soit effectivement une perturbation de la solution donnée $U_0(x^\nu)$. Pour pouvoir effectuer la substitution de (42) dans (41) il nous faut introduire le développement de Taylor de la matrice A^ν et du vecteur C au voisinage de U_0 . Nous écrivons:

$$A^k = A_0^k + \delta A_{0,1}^k(\hat{U}) + \dots$$

$$C = C_0 + \delta C_{0,1}(\hat{U}) + \dots$$

Par exemple $A_{0,1}^k(\hat{U})$ est une matrice $p \times p$ dans laquelle chaque élément est un polynôme homogène de degré 1 par rapport aux composantes du vecteur \hat{U} , les coefficients de ce polynôme étant fonctions de x^ν . Nous

écrivons

$$\mathcal{L}(\hat{U}) = A_0^\nu \frac{\partial \hat{U}}{\partial x^\nu} + A_{0,1}^k(\hat{U}) \frac{\partial U_0}{\partial x^k} + C_{0,1}(\hat{U}) = A_0^\nu \frac{\partial \hat{U}}{\partial x^\nu} + B_0 \hat{U},$$

l'opérateur \mathcal{L} pouvant alors s'identifier à celui écrit en (6). Substituant (42) dans (41) et tenant compte de la formule fondamentale (4) pour le calcul des dérivées il vient en utilisant la définition (8)

$$\delta C_0 \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \xi} + \delta \epsilon \left\{ C_0 \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial \xi} + \mathcal{L}(\hat{U}_1) + \delta A_{0,1}^k(\hat{U}_1) F_k \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial \xi} \right\} + \dots = 0. \quad (44)$$

Le terme dominant est le premier écrit. Par suite on peut encore écrire (9), intégrer et trouver \hat{U}_1 comme en (13). Si maintenant on considère le terme dominant restant, on voit en regardant les termes entre parenthèses que pour avoir une équation non banale où les effets non linéaires ont effectivement un effet cumulatif, il faut prendre $\delta = O(1)$. Dans la suite nous poserons simplement $\delta = 1$. Ceci dit, pour pouvoir calculer $\partial \hat{U}_2 / \partial \xi$, puisque la matrice $A_{0,1}^k$ est singulière, il faut que $\hat{U}_1 = \alpha R$ vérifie la condition de compatibilité

$$L \cdot \mathcal{L}(\alpha R) + L \cdot A_{0,1}^k(\alpha R) F_k R \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 0, \quad (45)$$

ou plus explicitement avec les notations introduites en (6)

$$T(\alpha) + \Gamma \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_0^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} + K \alpha + \Gamma \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 0,$$

on pose

$$\Gamma = L A_{0,1}^k(R) F_k R.$$

La seule différence avec le cas linéaire—mais elle est fondamentale—est l'apparition d'un nouveau terme dans l'équation de transport. Pour construire une solution, on doit encore déterminer la vitesse de rayon (24) et les rayons (27) selon le modèle linéaire. Mais l'amplitude de l'onde n'est plus obtenue par résolution d'une équation différentielle le long du rayon mais par une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} + K \alpha + \Gamma \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 0. \quad (45)$$

(43) Si on connaît une solution $c(t)$ de l'équation de transport du cas linéarisé, on pourra réduire l'équation (45) à une équation de Burgers sans dissipation. Posant, en effet,

$$\alpha = c(t)\beta, \quad \frac{d\sigma}{dt} = c(t)\Gamma(t), \quad (46)$$

il vient

$$\frac{\delta\beta}{\delta\sigma} + \beta \frac{\partial\beta}{\partial\xi} = 0.$$

Si on connaît les conditions initiales donnant la valeur de β en un point ξ (en lequel on peut poser $\sigma = 0$) on pourra appliquer les résultats donnés au chapitre précédent pour résoudre l'équation de Burgers et éventuellement déterminer les ondes de choc.

Notre dernière remarque portera sur la signification de Γ . On remarque que $A_{0,1}^k(\bar{U}_1)$ est le terme dominant de la différence $A^k(\bar{U}) - A_0^k$, si bien que

$$L \cdot A_{0,1}^k(\bar{U}_1) \cdot R \cong L(A^k(\bar{U}) - A_0^k)R = V^k - V_0^k,$$

si V^k est la vitesse de rayon exacte. Par suite

$$\epsilon \Gamma \alpha = F_k(V^k - V_0^k) = \lambda n_k(V^k - V_0^k) = \lambda(w - w_0),$$

si w est la vitesse de phase exacte. Si on prend $\lambda = 1$, auquel cas $\epsilon\xi$ est une abscisse à l'intérieur du train d'onde, on voit que $\epsilon \Gamma \alpha$ est le terme dominant de la variation de vitesse de phase lorsqu'on passe d'une perturbation d'amplitude nulle à la perturbation d'amplitude $\epsilon \alpha$.

VI.5 Effets Dissipatifs

Si le milieu est faiblement dissipatif, peut-on encore parler en un certain sens d'onde progressive? Peut-on prolonger la présente analyse? Dans quelles conditions les effets non linéaires de convection et les effets dissipatifs sont-ils de même ordre? Telles sont les questions auxquelles nous allons apporter un commencement de réponse.

Supposons donc que U vérifie l'équation

$$\mathcal{M}(U) - \bar{\nu}M(x^\alpha, U) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ D^{\lambda\nu}(x^\alpha, U) \frac{\partial U}{\partial x^\nu} \right\} = 0,$$

où M et les $D^{\lambda\nu}$ sont des matrices, $\bar{\nu}$ est un coefficient petit donnant l'ordre des coefficients de dissipation. Si on fait dans les termes de dissipation, substitution de (42), en tenant compte toujours de la formule fondamentale (4), on voit que le terme dominant s'écrit, dès que l'on suppose $\epsilon = o(\bar{\nu})$

$$\delta\epsilon \left\{ \bar{\nu} \epsilon^{-2} M_0 F_\lambda D^{\lambda\alpha} F_\nu \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \xi^2} \right\}$$

et c'est ce terme qu'il faut retrancher au premier membre de (44). La première équation à écrire sera encore (9) si $\bar{\nu} = o(\epsilon)$. C'est la condition nécessaire pour qu'on puisse parler d'onde progressive et étendre l'analyse qui précède. Dans la deuxième équation nous aurons à comparer 1, δ , $\bar{\nu} \epsilon^{-2}$. Si

$\bar{\nu} \epsilon^{-2}$ sont tous les deux $o(\epsilon)$, la phénomène en première approximation linéaire. Si $\delta = O(1)$, $\bar{\nu} \epsilon^{-2} = o(\epsilon)$, les effets dissipatifs sont négligeables (4) l'analyse faite en VI.4 reste en première approximation valable. Si $\delta = O(1)$ et $\bar{\nu} \epsilon^{-2} = O(1)$, les effets dissipatifs sont à prendre en compte et dominent les effets non linéaires de convection. Le cas le plus riche où les deux effets rentrent en ligne de compte est celui où δ et $\bar{\nu} \epsilon^{-2}$ sont $O(1)$. Nous aurons

$$\delta = 1, \bar{\nu}(x^\alpha) = \epsilon^{-2} \bar{\nu} L M_0 F_\lambda D^{\lambda\nu} F_\nu R,$$

et que l'équation de transport (45) s'écrit alors

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + V_0^k \frac{\partial\alpha}{\partial x^k} + K\alpha + \Gamma\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = \bar{\nu} \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}. \tag{50}$$

Il s'agit en fait une équation aux dérivées partielles à deux variables (ξ est un paramètre le long d'un rayon). Si, comme en VI.4, on suppose connue une fonction $c(t)$ de l'équation de transport du système linéaire et si on introduit les notations (46) et que l'on pose

$$\bar{\nu} = c \Gamma \eta,$$

on peut écrire l'équation de transport sous la forme canonique:

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} + \beta \frac{\partial\beta}{\partial\xi} = \eta(\sigma) \frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2}. \tag{51}$$

On obtient une équation généralisant légèrement l'équation de Burgers (carce que η peut dépendre de σ), résultat qui souligne bien tout l'intérêt de l'on peut porter à l'équation de Burgers.

Dans le cas où les effets de viscosité dominent les effets non linéaires de convection, l'équation de transport si on peut la mettre sous une forme canonique analogue à (51) est une équation linéaire généralisant légèrement celle de la chaleur.

VI.6 Application à la Dynamique des Gaz

Nous pouvons, à titre d'exemple, compléter l'application commencée en VI.3. Compte tenu du résultat (40), il suffit de calculer les coefficients Γ et $\bar{\nu}$. Nous supposons $\lambda = 1$, autrement dit que $\epsilon\xi$ est une abscisse à l'intérieur du train d'onde.

Il est aisé de déterminer Γ à l'aide de la formule (48) selon laquelle

$$\Gamma\alpha = w_1, \text{ si } w = w_0 + \epsilon w_1 + \dots \tag{52}$$

l'on a, d'après le calcul fait en VI.3, appliqué au système exact (31):

$$w_1 = u^k n_k \pm c_1.$$

Mais on a, par ailleurs, en tenant compte de (37),

$$c_1 = \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1 = \pm \left(\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_0 \alpha,$$

et par suite

$$w_1 = \Gamma \alpha = \left\{ 1 + \left(\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_0 \right\} \alpha = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial \rho} \right)_0 \alpha.$$

On a donc en définitive:

$$\Gamma = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} (c\rho) \right)_0. \tag{5}$$

Si le fluide est un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, d'indice adiabatique γ , on a

$$\Gamma = \frac{\gamma + 1}{2}. \tag{6}$$

Le calcul de \bar{v} n'est pas difficile; il faut toutefois écrire les termes donnant les effets de dissipation dans le système qui va remplacer (31), ce qui est un peu long. Nous nous contenterons donc de donner le résultat (dans le cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes):

$$\bar{v} = \left(\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} + \frac{K}{\rho} + \frac{k(\gamma - 1)}{\rho c_p} \right)_0;$$

μ est le coefficient de viscosité. $3K = 3\lambda + 2\mu$ le coefficient de viscosité volumique (λ, μ les coefficients de Lamé), k le coefficient de conductibilité thermique apparaissant dans la loi de Fourier, c_p la chaleur spécifique à pression constante. L'équation (50) montre que \bar{v} est le coefficient classique d'amortissement des ondes acoustiques de faible amplitude.

Les résultats donnés ci-dessus trouvent une application fort importante dans l'étude du "Bang sonique". La figure 2 illustre schématiquement le phénomène. A représente l'avion à l'instant t . On a tracé le train d'ondes à cet instant. B désigne la position de l'avion à l'instant antérieur τ . On a figuré les rayons le long desquels voyagent les perturbations entre les instants τ et t . On a figuré le long de MN l'allure du profil des pressions. MQ représente la portion du sol à l'instant t qui est affectée par le "Bang sonique".

Conclusion

Nous arrêtons là cette introduction à la théorie générale des ondes progressives qui illustre bien, nous semble-t-il, l'intérêt de la méthode des échelles multiples pour l'étude de phénomènes de type cumulatif. Il s'agit d'une

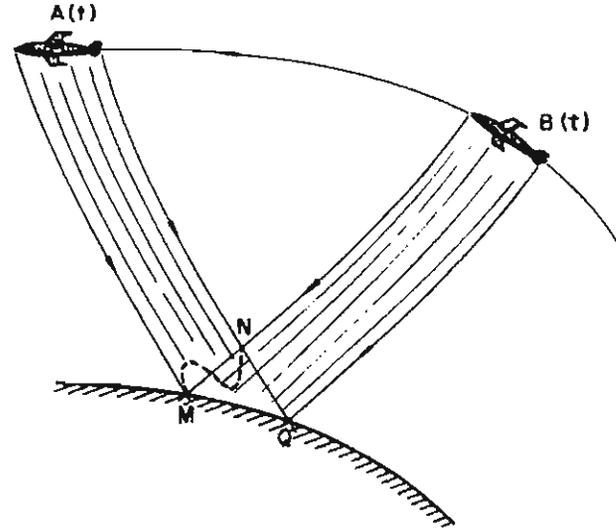


Figure 2 Schématisation du train d'ondes à l'instant t (AMQ) et du faisceau des rayons entre les instants τ et t

théorie très riche, s'appliquant à des problèmes de physique mathématique très variés. Nous ne pouvons ici que renvoyer le lecteur désireux d'approfondir ces questions à l'abondante littérature développant les parties de la théorie que nous n'avons pas abordées (détermination des conditions aux limites, comportement au voisinage d'une caustique...) et les problèmes spécifiques que l'on rencontre dans chaque discipline.

Remarques Complémentaires pour la Troisième Partie

Il ne peut être question ici d'évoquer l'abondante littérature consacrée à la propagation des ondes. Les commentaires qui suivent sont limités strictement aux questions évoquées dans ces deux derniers chapitres. Il faut aussi souligner que la plupart des résultats dont il est fait mention sur les effets de non linéarité ou de dissipation sur la propagation des ondes ont été obtenus au moins partiellement sans faire appel à la technique des échelles multiples. Nous pensons toutefois que la méthode d'exposition que nous avons retenue est intéressante car elle présente un caractère systématique. Le fait de tenir compte constamment dans les formules à écrire des diverses échelles présentes dans le problème facilite très sensiblement le développement de l'étude et évite le risque d'oublier à un moment ou à un autre l'effet d'une ou l'autre échelle.

L'exposé présenté en V.1 résume les idées principales d'un mémoire de Chikwendu et de Kevorkian (1972) où le lecteur trouvera plusieurs exemples intéressants et diverses modalités d'application, notamment au cas de résolution d'un problème de Cauchy, cas qui dépasse celui d'une onde progressive pure puisque les deux familles de caractéristiques sont à considérer. Deux notes récentes de P. A. Bois (1972, 1973) permettent de pousser plus loin le développement en surmontant certaines difficultés restant dans l'application de la technique proposée.

L'équation qui fait l'objet des sections V.2 à V.4, a été introduite initialement par Burgers (1948) comme modèle permettant une étude de la turbulence. L'étude mathématique conduisant à la résolution donnée en (V.2) et à l'analyse de la structure des solutions avec chocs a été donnée pour la première fois dans le magistral mémoire de Hopf (1950). La formule (V.3) fut aussi trouvée indépendamment par Cole (1951). Le rôle joué par l'équation de Burgers dans l'étude des écoulements plans a été simultanément mis en évidence par Hayes (résultats communiqués au Congrès de Bruxelles en 1956 et publiés en 1958) et par Lighthill (1956) dans un important mémoire où se trouvent abordés de façon pénétrante les questions qui font l'objet de cette troisième partie. On trouvera également un exposé introductif sur l'équation de Burgers dans un article de l'auteur (1960) et, dans le premier chapitre d'un exposé sur la théorie locale des ondes de choc (1972) des indications, notamment bibliographiques, sur les problèmes posés par la nature des solutions avec chocs et leur généralisation à d'autres équations aux dérivées partielles. Signalons aussi sur ce sujet le travail de Blackstock (1970) très utile pour ceux qui ont à utiliser l'équation de Burgers dans des problèmes concrets.

Les résultats très simples donnés en V.5 ont été obtenus pour la première fois par Whitham, en mettant en oeuvre la méthode de distorsion des courbes données. Ils ont été généralisés par cet auteur dans plusieurs articles, notamment celui de 1952, qui constitue la première contribution importante à l'étude du "Bang sonique". Les effets d'ordre supérieur ont été étudiés par exemple Lighthill (1954), la question est reprise très complètement et avec beaucoup de clarté dans un récent mémoire de Crocco (1972).

L'exposé, un peu systématique, de la section VI s'appuie sur une étude synthétique de l'auteur (1971) à laquelle le lecteur pourra se reporter pour de plus amples développements complémentaires et des indications bibliographiques supplémentaires. Les idées essentielles ont été élaborées lors des nombreuses études consacrées au "Bang sonique", qu'il est impossible de citer ici, mais qui ont été évoquées dans les applications à la dynamique des gaz. On trouvera un excellent exposé très complet, incluant les programmes de calcul dans la monographie de Hayes, Haefeli et Kulsrud (1969), qui contient également de précieuses indications historiques.

La remarque selon laquelle les méthodes mises en oeuvre avaient un

caractère générale semble due à Guiraud (1969). L'utilisation des échelles multiples qui est présentée ici, a également été employée par Luke (1966) dans l'étude des ondes périodiques non harmoniques de grande amplitude produite par Whitham; elle a été reprise dans son mémoire de 1970. Signalons encore l'article de synthèse de Lick (1970) et surtout les travaux de l'école japonaise autour de Taniuti, Jeffrey, Kakutani, qui, dans de nombreux mémoires, ont étudié par des méthodes voisines, de nombreux problèmes de propagation d'ondes faiblement non linéaires—le cas souvent dans le cas unidimensionnel—et qui ont eu le mérite de mettre en évidence différents types d'équations de transport que l'on peut rencontrer. A cet égard, les applications qu'ils ont faites en théorie des plasmas sont fort intéressantes. On trouvera les principales références à ces travaux, dans un récent mémoire de Jeffrey et Kakutani (1972), soit dans l'étude synthétique déjà citée Germain (1971). C'est également à cette étude que nous renverrons le lecteur désireux d'obtenir des informations sur des problèmes de même nature en élasticité et en viscoélasticité.

Références

Pour la Première Partie

- Benblatt, G. I. (1954) "On limiting self-similar motions in the theory of unsteady filtration of a gas in a porous medium and the theory of the boundary layer" (en russe), *Prikl. Mat. Mekh.* 18, 409-414.
- Benblatt, G. I. et Zel'dovich, Ya. B. (1972) "Self similar solutions as intermediate asymptotics", *Ann. Review of Fluid Mechanics*, 4, 285-312.
- Blackstock, G. (1970) *Hydrodynamics. A study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press.
- Bridgman, P. W. (1931) *Dimensional Analysis*, Yale University Press.
- Chamberbatch, E. et Varley, E. (1966) "Generalized self-similar flows", *J. Inst. Maths. Appl.* 2, 1-11.
- Crocco, D. et Tournemine, G. "Méthode directe de calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil donné. Cas d'un écoulement symétrique", *J. de Mécanique*, 12, 419-461.
- Germain, P. (1964) "Écoulements transsoniques homogènes", *Progress in Aeronautical Sciences*, 3, 143-273.
- Germain, P. (1971) *Théorie Schallnaher Strömungen*, Springer, Göttingen.
- Landau, L. et Lifschitz, E. (1971) *Mécanique des Fluides*, Editions MIR, URSS.
- Lichtenberg, A. K., Kuhl, A. L. et Kamel, M. M. (1972) "On self-similar blast waves headed by the Chapman-Jouguet Detonation", *J. Fluid Mech.* 55, 257-270.
- Lichtenberg, A. K., Kuhl, A. L., Lundstrom, E. A. et Kamel, M. M. (1972) "A parametric study of self-similar blast waves", *J. Fluid Mech.*, 52, 657-682.
- Ovsyannikov, L. V. (1962) *Group Properties of Differential Equations* (en russe), Division Sibérienne de l'Acad. des Sciences d'URSS, Novosibirsk.
- Palacios, J. (1964) *Dimensional Analysis*, McMillan, London.

- Pankhurst, R. C. (1964) *Dimensional Analysis and Scale Factors*, Reinhold, New York.
- Rosenhead, L. (1963) *Laminar Boundary Layer*, Oxford University Press.
- Saint-Guilhem (1962) *Les Principes de l'Analyse Dimensionnelle*, Gauthiers-Villars, Paris.
- Sedov, L. I. (1959) *Similarity and Dimensional Analysis in Mechanics*, Academic Press, New York.
- Traugott, S. L. (1970) "Non diffusive effects in the radiative propagation of a thermal pulse", *Phys. Fluids*, **13**, 2242-2252.
- Zel'Dovich, Ya. B. et Raizer (1965) *Physics of Shock Waves and High-Temperature Phenomena*, Academic Press, New York.

Pour la Deuxième Partie

- Bogoliubov, N. N. et Mitropolsky, Y. A. 1961, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Hindustan Publ. Co.
- Cole, J. D. (1968) *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass.
- Eckhaus, W. (1973) *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North Holland, Amsterdam, London; American Elsevier, New York.
- Eckhaus, W. (1972) "Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems", *S.I.A.M. Review*, **14**, 225-270.
- Eckhaus, W. (1969) "On the foundations of the method of matched asymptotic approximations", *J. de Mécanique*, **8**, 265-300.
- Fraenkel, L. E. (1969) "On the method of matched asymptotic expansions", *Proc. Camb. Phil. Soc., Part I-II-III*, **65**, 209-283.
- Friedrichs, K. O. (1953) *Special Topic in Fluid Dynamics*, New York Univ. Press, New York.
- Germain, P. et Guiraud, J.-P. (1966) "Conditions de choc et structure des ondes de choc dans un écoulement non stationnaire de fluide dissipatif", *J. Math. Pure Appl.*, **45**, 311-358.
- Kaplun, S. (1954) "The role of coordinate systems in boundary layer theory", *Z.A.M.P.*, **2**, 111-135.
- Kaplun, S. (1967) *Fluid Mechanics and Singular Perturbations*, édité par Lagerstrom, P. A., Howard, L. N. and Liu, C. S., Academic Press, New York.
- Kevorkian, J. (1966) "Space Mathematics, Part III," *Lectures in Applied Math.*, Vol. 7, Am. Math. Soc.
- Lagerstrom, P. A. (1964) "Laminar flow theory" in *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. 4, pp. 20-282, Princeton Univ. Press.
- Lagerstrom, P. A. et Casten, R. G. (1972) "Basic concepts underlying singular perturbation techniques", *S.I.A.M. Review*, **14**, 69-120.
- Latta, G. E. (1951) "Singular perturbation problems", Ph. D. Thesis, Cal. Inst. Tech. Pasadena.
- Lighthill, M. J. (1949) "A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid", *Phil. Mag.*, **40**, 1179-1201.
- Lighthill, M. J. (1961) "A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid", *Z. Flugwiss.*, **9**, 267-275.
- Morrison, J. A. (1966) "Comparison of the Modified Method of Averaging and the Two Variable Expansion Procedure", *S.I.A.M. Review*, **8**, 66-85.
- Rosenhead, L. (1963) *Laminar Boundary Layer*, Oxford University Press.
- Tsien, H. S. (1956) "The Poincaré-Lighthill-Kuo method", *Adv. Appl. Mech.*, **4**, 281-349.
- Van Dyke, M. D. (1964) *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, New York.

Pour la Troisième Partie

- Blackstock, D. T. (1970) "A comparison between weak-shock theory and Burgers equation in nonlinear acoustics", Aerodynamics Noise Symposium, Loughborough Univ. of Techn.
- Bois, P. A. (1972, 1973) "Une méthode de perturbation pour l'obtention de solutions approchées d'une équation à deux petits paramètres", *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **275**, 1095-1098, t. **276**, 1357-1360.
- Burgers, J. M. (1948) "A mathematical model illustrating the theory of turbulence", *Adv. Appl. Mech.*, **1**, 171-179.
- Chikwendu, S. C. et Kevorkian, J. (1972) "A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities", *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, **22**, 235-258.
- Cole, J. D. (1951) "On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics", *Quart. Appl. Math.*, **9**, 226-236.
- Crocco, L. (1972) Coordinate perturbation and multiple scale in gas dynamics, *Phil. Trans. Roy. Soc., Lond.* **272**, 275-301.
- Germain, P. (1960) "L'équation de Burgers et ses applications à la théorie des ondes de choc", *Cah. Phys.*, **119**, 285-299.
- Germain, P. (1971) "Progressive Waves", L. Prandtl Memorial Lecture in Jahrbuch 1971 der D.G.L.R., pp. 11-30.
- Germain, P. (1972) "Shock waves, jump relations and structure", *Adv. Appl. Mech.*, **12**, 131-194.
- Guiraud, J. P. (1969) "Focalisation dans les Ondes Courtes non linéaires", O.N.E.R.A., T. P. 686.
- Hayes, W. D. (1958) "The basic theory of gas-dynamics discontinuities" in *Fundamental of Gas Dynamics*, 416-481, Princeton University Press.
- Hayes, W. D. Haefeli, R. C. et Kulsrud, H. E. (1969) "Sonic Boom in a Stratified Atmosphere with Computer Program", N.A.S.A. C.R.—1299.
- Hopf, E. (1950) "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ", *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**, 201-230.
- Jeffrey, A., et Kakutani, T. (1972) "Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered on the Korteweg-de Vries equation", *S.I.A.M. Review*, **14**, 582-643.
- Lick, W. (1970) "Nonlinear Wave Propagation in Fluids", *Ann. Rev. of Fluid Mechanics*, Ann. Rev. Inc., Palo Alto, California, **2**, 113-136.
- Lighthill, M. J. (1954) "Higher Approximations" in *General Theory of High Speed Aerodynamics*, W. Sears, editor, Princeton Univ. Press, pp. 345-349.
- Lighthill, M. J. (1956) "Viscosity effects in sound waves of finite amplitude", in *Surveys in Mechanics*, pp. 250-351, G. I. Taylor Ann. Volume, Cambridge University Press.
- Luke, J. C. (1966) "A perturbation method for non linear dispersive wave problems", *Proc. Roy. Soc., Lond. A*, **292**, 403-412.
- Whitam, G. B. (1952) "The flow pattern of a supersonic projectile", *Comm. Pure Appl. Math.*, **5**, 301-348.
- Whitam, G. B. (1970) "Two timing variational principles and waves", *J. Fluid Mech.*, **44**, 373-395.