EPU – Génie Mécanique (GM3) 18 février 2010
Université Pierre et Marie Curie

# Examen de thermique

*Les documents et les calculettes sont autorisés.*
Durée : 2 heures
Les questions I, II et III sont indépendantes.

Un cylindre métallique de hauteur $H$ et de diamètre $D$, de conductivité thermique notée $\lambda$ (ou $k$, selon les cours), de chaleur spécifique massique $c$ et de masse volumique $\rho$, est porté dans un four à la température $T_0$, puis plongé dans un bain d'huile, initialement à la température ambiante $T_a$. Le coefficient d'échange entre le liquide et le cylindre est noté $h$.

**I-** Les valeurs numériques des paramètres donnés ci-dessus sont les suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda$=50 W.m$^{-1}$.K$^{-1}$ | $c$=500 J.kg$^{-1}$.K$^{-1}$ | $\rho$=8000 kg.m$^{-3}$ |
| $H$=100 mm , $D$=1 mm | $T_0$=1000°C, $T_a$=25°C | $h$=100 W.m$^{-2}$.K$^{-1}$ |

I-1) Définir le nombre de Biot de façon appropriée. Montrer que la température peut être supposée uniforme dans tout le cylindre (autrement dit, que sa température $T$ ne dépend que du temps).

I-2) Le bain d'huile est supposé de très grande taille, et parfaitement brassé, de sorte que sa température reste égale à la température $T_a$ tout au long de l'opération.

- a) Donner l'expression de l'équation différentielle vérifiée par la température du cylindre, en la justifiant.
- b) Calculer la masse et la surface d'échange du cylindre.
- c) Donner l'expression et la valeur numérique de la constante de temps du cylindre.
- d) Résoudre l'équation différentielle mentionnée ci-dessus, pour trouver l'expression de la température en fonction du temps.
- e) Au bout de combien de temps la température du cylindre passe-t-elle en dessous de 100°C ?
- f) Quelle est l'énergie cédée par le cylindre au bain, entre son immersion et le moment où l'équilibre thermique est atteint (c'est à dire lorsque la température du cylindre est égale à celle de l'huile) ?

**II-** On travaille à présent avec un cylindre de plus grand diamètre, sur lequel on effectue une trempe à l'eau. Du fait de l'ébullition, le coefficient d'échange est à présent beaucoup plus élevé.

$H$=300 mm , $D$=30 mm $\quad$ $T_0$=1000°C, $T_a$=25°C $\quad$ $h$=50 000 W.m$^{-2}$.K$^{-1}$

Les caractéristiques physiques du métal sont par contre inchangées (cf. question I).

II-1) Montrer que le champ de température dans le cylindre ne peut plus être supposé uniforme. Montrer que l'on peut assimiler sa température de surface à celle de l'eau.

II-2) On s'intéresse au champ de température dans le cylindre durant les premiers instants après l'immersion. Compte-tenu du résultat de la question précédente, on propose le modèle suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

x=0 : $T(0,t)=T_a$ $\quad$ et $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} T(x,t)=T_0$

t=0 : $T(x,0)=T_0$

a) Donner le nom et la définition du paramètre $\alpha$. Dans quelle unité s'exprime-t-il ? Que représente l'abscisse $x$ dans le modèle ci-dessus ?

b) Donner sans démonstration l'expression du champ de température, en fonction de l'abscisse $x$ et du temps $t$.

c) Le gradient de température généré par la trempe est à l'origine de contraintes thermomécaniques dans le cylindre. Donner l'expression du gradient de température en fonction de $x$ et de $t$. En quel point le gradient est-il maximum ?

d) Jusqu'à quel instant le modèle ci-dessus est-il valable ?

III- Le four de la question I est un cube en acier de dimension $L$ posé sur une table parfaitement isolante. A l'intérieur règne la température $T_i$=1000°C. Le four est constitué de parois en acier entourées d'un isolant et d'une autre paroi en acier. Les parois métalliques font 5 mm d'épaisseur, l'isolant fait 1,5 cm. On donne la conductivité de l'acier $\lambda_a$=50 W.m$^{-1}$.K$^{-1}$, celle de l'isolant $\lambda_i$=0,05 W.m$^{-1}$.K$^{-1}$, et la taille du four $L$=1 m. Le coefficient d'échange thermique sur la paroi intérieure du four vaut $h_i$=10 W.m$^{-2}$.K$^{-1}$.

Par ailleurs, le four est situé dans une pièce parfaitement ventilée, dont la température est $T_a$=25°C. Le coefficient d'échange sur la paroi extérieure vaut $h_e$=20 W.m$^{-2}$.K$^{-1}$.

III-1) Identifier les parois au travers desquelles il y a déperdition de chaleur.

III-2) Calculer la résistance thermique totale du four (on négligera les effets bidimensionnels dans les coins).

III-3) Déterminer le flux total en Watt.

III-4) Déterminer la température à l'interface intérieure acier/isolant.

EPU GMB – Examen 18 février 2010



I-1) $D \ll H \Rightarrow$ transfert de chaleur 1D selon le rayon.

$$B_i = \frac{hL}{\lambda}$$

Pour $L$, on peut prendre au choix : $L \equiv D$

$$L \equiv D/2$$

$$L \equiv \frac{\pi D^2/4 \cdot H}{\pi D H} = \frac{D}{4}$$

Seul compte l'ordre de grandeur :

$$L \sim 10^{-3}\ m$$

$$\Rightarrow B_i \sim \frac{100 \cdot 10^{-3}}{50} = 2.10^{-3} \ll 1$$

La résistance thermique conductive est donc négligeable devant la résistance thermique convective $\Rightarrow$ la température est uniforme dans le cylindre.

I-2) a) 1er principe appliqué au cylindre :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \cancel{\dot{W}}$$

$$\begin{cases} Mc\,\dfrac{dT}{dt} = hS\left(T_a - T(t)\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

b) $M = \rho V = \rho \frac{\pi D^2}{4} H = 8000 . \frac{\pi}{4} . 10^{-6} . 0,1$

$$\boxed{M = 0,628 \ g}$$

$S = \pi D H = \pi . 10^{-3} . 0,1 = \boxed{3,14 . 10^{-4} \ m^2}$

c) $\tau = \frac{Mc}{hS} = \frac{6,28.10^{-4} . 500}{10 . 3,14.10^{-4}} = \boxed{10 \ s}$

d) $\tau \frac{dT}{dt} = T_a - T$

$$\boxed{T_{(t)} = \left(T_0 - T_a\right) e^{-t/\tau} + T_a}$$

e) $t = - \tau \ln \left( \frac{T - T_a}{T_0 - T_a} \right)$

$t = - 10 \ln \left( \frac{100 - 25}{1000 - 25} \right)$

$$\boxed{t = 25,6 \ s}$$

f) $1^{er}$ principe : $\Delta U_{cyl} = Q = - \Delta U_{bain}$

$\Delta U = M . c \left( T_a - T_0 \right) = - 306 \ J.$

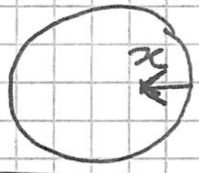
II 1) $B_i = \frac{h\,D}{\lambda} = \frac{5.10^{4} . 30.10^{-3}}{50} = 30$

$B_i \gg 1$. On peut supposer que le fluide impose sa température à la paroi (Résistance convective négligeable devant la résistance conductive).

II 2) a) $\alpha$ est la diffusivité thermique ($m^2/s$)

L'abscisse $x$ est la distance à la surface du cylindre.

$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} = 1,25\,10^{-5}\ m^2/s}$$




b) $$\boxed{T(x,t) = (T_0 - T_a)\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + T_a}$$

c) $$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \frac{(T_0 - T_a)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right)$$

$|q(x,t)|$ fonction décroissante de $x$.

$\Longrightarrow |q(x,t)|$ est maximum en $x = 0$

d) Il faut vérifier : $(\delta \sim \sqrt{\alpha t}) \ll \frac{D}{2}$

$$t \ll \frac{(15\ 10^{-3})^2}{1,25.10^{-5}} = 18\ s$$

III - 1) Le fond est adiabatique ⟹ les pertes se font au travers de 5 faces du cube. (4)

2) Pour une paroi :

$$R_{th} = \left(\frac{1}{h_i} + \frac{2e_a}{\lambda_a} + \frac{e_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_e}\right)\frac{1}{S}$$

$$R_{th} = \left(\frac{1}{20} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{50} + \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}05} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{1}$$

$$R_{th} = 0{,}45 \ K/W$$

Pour l'ensemble du four : $R_{th\,TOT} = \frac{R_{th}}{5}$

$$R_{th\,TOT} = 9 \cdot 10^{-2} \ K/W$$

3) $$\dot{Q} = \frac{T_i - T_a}{R_{th\,TOT}} = 10{,}8 \ kW$$

4) $$T_i - T_{p_i} = \left(\frac{1}{h_i} + \frac{e_a}{\lambda_a}\right)\frac{1}{S_{tot}}\dot{Q}$$

$$T_{p_i} = 1000 - \left(\frac{1}{10} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50}\right) \cdot \frac{10{,}8 \cdot 10^{3}}{5}$$

$$T_{p_i} = 784 \ °C$$

Prévoir un isolant réfractaire (fibres de silice + alumine, pour exemple).