

chapitre 3

Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC.
Introduction à la Stabilité Hydrodynamique.
P.-Y. Lagrée & M. Rossi.

Un exemple de système dynamique: les vortex singuliers ponctuels

Ce chapitre nous montre un exemple d'écoulement hydrodynamique qui donne lieu à un système dynamique. L'étude des assemblées de tourbillons est un problème important en turbulence...

1. rappels d'hydrodynamique

Hydrodynamique à deux dimensions incompressible sans viscosité. Soit le champ de vitesses

$$u(x,y,t) \quad v(x,y,t)$$

On définit la fonction de courant ψ . Puis la vorticité est suivant la normale (perpendiculaire au plan) telle que,

$$\omega = -\nabla^2 \psi.$$

L'équation de la vorticité

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega\right) + \omega \cdot \nabla u = \nu \nabla^2 \omega,$$

Que l'on interprète comme suit:

dérivée totale + étirement = diffusion.

Elle devient en 2D Euler (où il n'y pas de "stretching"):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = 0 \iff d\omega/dt = 0.$$

La vorticité est conservée lorsque l'on suit l'écoulement. On trouve:

$$\psi(x,y,t) = -\frac{1}{2\pi} \int \text{Log}(r) \omega(x',y',t) dx' dy' + \psi^0(x,y,t).$$

$$\text{avec } r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2.$$

[On rappelle que la solution élémentaire de $\nabla^2 \phi = \delta_0$ est, si δ_0 , est la distribution de

Dirac en 0, $\phi = -\frac{1}{2\pi} \text{Log } r$]

Bien entendu $\psi^0(x,y,t)$ définit un écoulement potentiel qui traduit les effets de conditions aux limites (parois ...). Si l'écoulement est dans un domaine infini et au repos à l'infini $\psi^0(x,y,t) = 0$.

On considère une superposition de vortex.

$$\omega(x,y,t) = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \delta(x-x_{\alpha}(t)) \delta(y-y_{\alpha}(t)).$$

Pour un vortex singulier ponctuel le champ des vitesses associé à un vortex

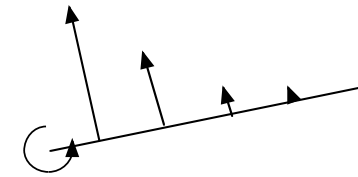
vortex 1

$$\frac{dx_{\alpha}}{dt} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{-\kappa_{\beta}(y_{\alpha}-y_{\beta})}{2\pi r_{\alpha\beta}^2}$$

$$\frac{dy_{\alpha}}{dt} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\kappa_{\beta}(x_{\alpha}-x_{\beta})}{2\pi r_{\alpha\beta}^2}$$

$$r_{\alpha\beta}^2 = (x_{\alpha}-x_{\beta})^2 + (y_{\alpha}-y_{\beta})^2$$

système dynamique à 2N degrés de liberté au plus.



vitesse induite par un VSP: orthoradiale et décroissante avec l'inverse de la distance au centre.

2. exemples

2.1 calculs NS

On montre ici le film (de V. Herbert) représentant la simulation numérique de l'évolution en NS d'une distribution de vortex lissés.



Les vortex s'apparient, et diffusent...

2.2 Manip à la main

On peut se convaincre de l'existence des vortex

-faire des vortex avec des gouttes d'encre très diluée.

si l'encre est trop concentrée le vortex se casse tout de suite en autres vortex...

si la cuve est trop profonde, le vortex s'arrête, en fait il est dissipé dynamiquement, mais la concentration n'a pas diffusé!!

-faire d'autres vortex avec la cuillère, les observer vers le bord ...

-caisse à vortex??

-film sur les vortex (hollande ?)

-les dauphins font des vortex ... www.sciam.com ("Pour La Science" Octobre 96)

vortex 2

3. système dynamique

Le champ des vitesses associé définit un système dynamique:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{-\kappa_\beta (y_\alpha - y_\beta)}{2\pi r_{\alpha\beta}^2}$$

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\kappa_\beta (x_\alpha - x_\beta)}{2\pi r_{\alpha\beta}^2}$$

$$r_{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2$$

On va définir les conservations associées.

3.1 Conservations associées, invariants du mouvement

*) Ce système est Hamiltonien

La manière de le voir est de faire apparaître la somme des fonctions de courant:

$$\kappa_\gamma x_\gamma = \partial H / \partial y_\gamma \quad \kappa_\gamma y_\gamma = -\partial H / \partial x_\gamma$$

H est lié à la somme des fonctions de courant:

$$H = \frac{-1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta \text{Log}(r_{\alpha\beta})$$

Attention au facteur 1/4. En effet dans la somme des termes sont comptés deux fois. Dans le cas de 3 vortex, la somme est bien:

$$H = \frac{-1}{2\pi} (\kappa_1 \kappa_2 \text{Log}(r_{12}) + \kappa_2 \kappa_3 \text{Log}(r_{23}) + \kappa_3 \kappa_1 \text{Log}(r_{31}))$$

H est une constante du mouvement (c'est un Hamiltonien en fait les x et les y sont alors les variables conjuguées), en effet

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \kappa_i^{-1} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \kappa_i^{-1} = \frac{\partial H}{\partial t} + 0 = 0.$$

*) définition de l'impulsion hydrodynamique et du moment

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} \underline{\omega} \, dv, \quad \underline{M} = \frac{1}{3} \rho \int_{\Gamma} \underline{r} \times \underline{\omega} \, dv$$

En inviscide c'est évident (c'est plus général cf Saffman avec la viscosité)

$$\frac{d}{dt} \underline{P} = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma} \underline{\omega} \, d\omega/dt \, dv = 0. \quad \text{idem} \quad \frac{d}{dt} \underline{M} = 0.$$

donc

$$\underline{P} = 1/2 \left(\int \sum_{\alpha} \kappa_\alpha \delta(x-x_\alpha) \delta(y-y_\alpha) y \, dx dy - \int \sum_{\alpha} \kappa_\alpha \delta(x-x_\alpha) \delta(y-y_\alpha) x \, dx dy \right) =$$

$$\underline{P} = 1/2 \left(\sum_{\alpha} \kappa_\alpha y_\alpha, -\sum_{\alpha} \kappa_\alpha x_\alpha, 0 \right) = \text{const}$$

et de même

$$\underline{M} = 1/3 \rho (0, 0, -\sum_{\alpha} \kappa_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)) = \text{const.}$$

vortex 3

*) si $\sum_{\alpha} \kappa_\alpha$ n'est pas nul on peut définir un centre de vorticité (ou centro ide)

$$x_c = \frac{\sum_{\alpha} \kappa_\alpha x_\alpha}{\sum_{\alpha} \kappa_\alpha} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\sum_{\alpha} \kappa_\alpha y_\alpha}{\sum_{\alpha} \kappa_\alpha}.$$

En combinant ces deux derniers (P et M) on voit que la dispersion est constante:

$$D = \sum_{\alpha} \kappa_\alpha ((x_\alpha - x_c)^2 + (y_\alpha - y_c)^2) = \text{constante}$$

La vitesse induite au centre quelconque.

*) Une autre manière d'introduire les invariants nous est fournie par Lamb.

généralisons à n vortex, les positions sont prises par rapport au centre:

$$\kappa_\gamma x_\gamma = \partial H / \partial y_\gamma \quad \kappa_\gamma y_\gamma = -\partial H / \partial x_\gamma$$

En oubliant les indices γ on a:

$$\sum \kappa (x \dot{x} + y \dot{y}) = \sum (x \partial H / \partial y - y \partial H / \partial x)$$

si on passe en polaires cela donne (  r fixé, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} = x/r \frac{\partial}{\partial x} + y/r \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\sum \kappa (\dot{r}) = \sum (\partial H / \partial \theta)$$

Comme H ne dépend pas de θ , on retrouve l'intégrale du moment M:

$$\sum \kappa (r^2) = \text{cst}$$

de même on calcule

$$\sum \kappa (x \dot{y} - y \dot{x}) = \sum (x \partial H / \partial x + y \partial H / \partial y) =$$

$$(r^2 \cos^2 \theta \, d\theta/dt + r \cos \theta \sin \theta \, dr/dt) - (r^2 \sin^2 \theta \, d\theta/dt + r \cos \theta \sin \theta \, dr/dt) =$$

$$\sum \kappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = -\sum r \frac{\partial H}{\partial r}$$

Astuce, si chaque r est augmenté de $r(1+\epsilon)$ avec ϵ petit:

$$H(r+\epsilon r) = H(r) + \sum \epsilon r \frac{\partial H}{\partial r},$$

l'incrément de H est $\sum \epsilon r \frac{\partial H}{\partial r}$. Mais comme la configuration est géométriquement toujours la

même les distances mutuelles sont changées de $1+\epsilon$, or H est:

$$H = \frac{-1}{2\pi} \sum \sum \kappa_\alpha \kappa_\beta \text{Log}(r)$$

Convention de sommation: il n'y a pas de doublons. Son accroissement

$$H(r(1+\epsilon)) = H(r) + \frac{-1}{2\pi} \sum \sum \kappa_\alpha \kappa_\beta \text{Log}(1+\epsilon), \quad \text{et} \quad \text{Log}(1+\epsilon) = \epsilon + \dots$$

L'incrément de H est donc $\epsilon/2\pi \sum \sum \kappa_\alpha \kappa_\beta$. Il reste donc

$$\sum \kappa r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum \sum \kappa_\alpha \kappa_\beta$$

expression qui nous sera utile par la suite.

vortex 4

3.2 Exemple: Un vortex

Quand on a qu'un vortex, si on le déplace il reste à sa nouvelle position. Configuration Stable (neutre).

3.2 Exemple: Deux vortex

L'expression de la vitesse:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-\kappa_2(y_1-y_2)}{2\pi r^2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\kappa_2(x_1-x_2)}{2\pi r^2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-\kappa_1(y_2-y_1)}{2\pi r^2}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\kappa_1(x_2-x_1)}{2\pi r^2}$$

devient:

$$\frac{d(x_2-x_1)}{dt} = \frac{-(\kappa_1+\kappa_2)(y_2-y_1)}{2\pi r^2}$$

$$\frac{d(y_2-y_1)}{dt} = \frac{(\kappa_1+\kappa_2)(x_2-x_1)}{2\pi r^2}$$

ou sous forme vectorielle:

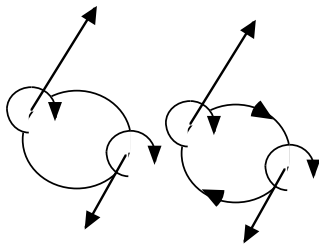
$$d(\underline{r}_2-\underline{r}_1)/dt = \underline{\Omega} \times (\underline{r}_2-\underline{r}_1)$$

il n'y a qu'une seule variable. On voit que

$$(x_2-x_1) \frac{d(x_2-x_1)}{dt} + (y_2-y_1) \frac{d(y_2-y_1)}{dt} = 0$$

La distance entre les deux vortex reste constante. Chaque vortex tourne autour du centroïde à la vitesse angulaire constante :

$$\Omega = \frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{2\pi r^2}$$



vortex 5

stabilité

Seule la distance relative intervient:

$$d(\underline{r}_{21})/dt = \underline{\Omega} \times (\underline{r}_{21})$$

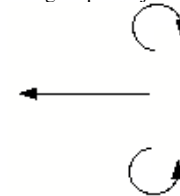
si on perturbe $\underline{r}_{21} = \underline{r}_{210} + \underline{\epsilon}$

La perturbation $d(\underline{\epsilon})/dt = \underline{\Omega} \times (\underline{\epsilon}) - 2 \underline{\Omega} \underline{\epsilon} \times (\underline{r}_{210})$

La configuration reste la même mais la vitesse de rotation a changé.

Si $\kappa_1+\kappa_2=0$ les deux vortex se déplacent à vitesse constante $U = \kappa_1 / 2\pi r$.

dans une direction perpendiculaire à la ligne qui les joint.



Si on perturbe on change la distance entre les deux vortex ce qui change c'est Ω où U . La configuration reste toujours la même. En revanche les trajectoires se séparent linéairement en temps (ça n'est pas exponentiel). La trajectoire reste périodique.

3.3 Exemple: Trois vortex

expression de la vitesse

On ajoute un nouveau vortex.

$$d(\underline{r}_2-\underline{r}_1)/dt = \underline{\Omega} \times (\underline{r}_2-\underline{r}_1)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-\kappa_2(y_1-y_2)}{2\pi r_{12}^2} + \frac{-\kappa_3(y_1-y_3)}{2\pi r_{13}^2}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\kappa_2(x_1-x_2)}{2\pi r_{12}^2} + \frac{\kappa_3(x_1-x_3)}{2\pi r_{13}^2}, \text{ etc}$$

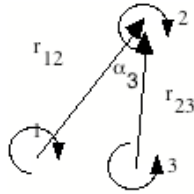
On peut l'écrire sous forme vectorielle:

$$\frac{d\underline{r}_1}{dt} = \frac{\kappa_2 \underline{k} \times (\underline{r}_1-\underline{r}_2)}{2\pi r_{12}^2} + \frac{-\kappa_3 \underline{k} \times (\underline{r}_1-\underline{r}_3)}{2\pi r_{13}^2}, \text{ etc}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$(\underline{r}_2-\underline{r}_1) \cdot \frac{d}{dt} (\underline{r}_2-\underline{r}_1) = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2\pi} \underline{k} \times (\underline{r}_2-\underline{r}_1) \cdot (\underline{r}_2-\underline{r}_1) + \frac{\kappa_3}{2\pi} \underline{k} \times \left(\frac{(\underline{r}_2-\underline{r}_3)}{r_{23}^2} - \frac{(\underline{r}_3-\underline{r}_1)}{r_{13}^2} \right) \cdot (\underline{r}_2-\underline{r}_1)$$

vortex 6



Le premier terme du RHS est nul (vecteurs perpendiculaires), le second est un produit mixte, on permute et on calcule par exemple

$$\mathbf{k} \cdot ((\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = -k \sin(\alpha_2) r_{23} r_{21} / r_{23}^2.$$

$$\frac{d}{dt} r_{12}^2 = \frac{\kappa_3}{2\pi} \left(\frac{\sin(\alpha_1)}{r_{13}^2} - \frac{\sin(\alpha_2)}{r_{32}^2} \right)$$

Or l'aire du triangle est:

$$A = 1/2 r_{12} r_{13} \sin(\alpha_1) = 1/2 r_{12} r_{23} \sin(\alpha_2)$$

système transformé

d'où le système suivant:

$$\frac{d}{dt} r_{23}^2 = \frac{2\kappa_1}{\pi} A \left(\frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{r_{31}^2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} r_{31}^2 = \frac{2\kappa_2}{\pi} A \left(\frac{1}{r_{23}^2} - \frac{1}{r_{12}^2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} r_{12}^2 = \frac{2\kappa_3}{\pi} A \left(\frac{1}{r_{31}^2} - \frac{1}{r_{23}^2} \right)$$

Ce système admet des constantes du mouvement:

$$J = 1/2 (\kappa_2 \kappa_3 r_{23}^2 + \kappa_1 \kappa_3 r_{13}^2 + \kappa_2 \kappa_1 r_{12}^2).$$

$$H = \frac{-1}{2\pi} (\kappa_1 \kappa_2 \text{Log}(r_{12}) + \kappa_2 \kappa_3 \text{Log}(r_{23}) + \kappa_3 \kappa_1 \text{Log}(r_{31}))$$

J est obtenue en combinant les 3 équations de manière évidente. On remarque de plus que c'est une combinaison de P et M. L'évolution du système se fait donc sur l'intersection des surfaces H et J constantes. C'est une courbe... Tous les points de H et J ne sont pas accessibles (conditions sur le triangle).

vortex 7

un exemple de résolution

configuration:

dt=.01

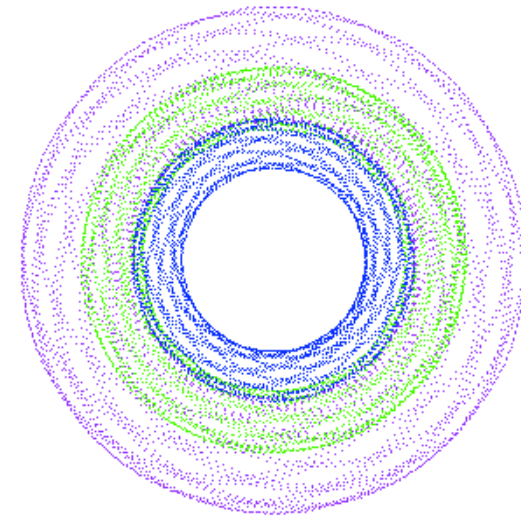
5000x10 itérations

3 vortex

-1 0 1

0 1 2

1 0 3



Le système est dit "quasi périodique", on peut mettre la solution sous forme périodique pour chaque argument. Il y a deux périodes (comme nous allons le voir en fait plus loin), la première est la fluctuation de la forme du triangle, la seconde est la rotation du triangle. Si le rapport des deux périodes n'est pas un rationnel, le triangle ne reviendra pas à sa position de départ. Les vortex ne décriront pas une trajectoire fermée.

analyse linéaire de la stabilité de la configuration des 3 vortex

Ce système admet un point fixe, le triangle équilatéral: $r_{12}=r_{23}=r_{31}=R$. La vitesse angulaire est donc la même pour les trois points:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{(\kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_1)}{(\kappa_1 r_{1c}^2 + \kappa_2 r_{2c}^2 + \kappa_3 r_{3c}^2)}$$

vortex 8

On va perturber et étudier sa stabilité.

$$\begin{aligned} r_{23} &= R + a \\ r_{31} &= R + b \\ r_{12} &= R + c \end{aligned}$$

a, b, c petites perturbations, la première équation donne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_{23}^2 &= \frac{2 \kappa_1}{\pi} A \left(\frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{r_{31}^2} \right) \\ r_{23}^2 &\sim R^2 + 2 R a \\ \left(\frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{r_{31}^2} \right) &\sim -2(c-b)/R^3 \end{aligned}$$

après la linéarisation (l'aire fournit $A_0 + \dots$) on obtient le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= K_1 (b - c) \\ \dot{b} &= K_2 (c - a) \\ \dot{c} &= K_3 (a - b) \end{aligned}$$

avec $K_i = 2 A_0 \kappa_i / \pi R^4$.

Le critère de stabilité va s'obtenir en posant:

$$(a, b, c) = (a_0, b_0, c_0) e^{\sigma t}$$

On en déduit le déterminant dont on cherche les valeurs propres

$$\begin{vmatrix} \sigma & -K_1 & K_1 \\ K_2 & \sigma & -K_2 \\ -K_3 & K_3 & \sigma \end{vmatrix}$$

Une solution triviale $\sigma=0 \Rightarrow$ son vecteur propre associé est 1,1,1 (une simple augmentation de la taille). Il s'agit donc d'une perturbation constante qui change simplement la taille du triangle mais le laisse équilatéral. Les autres racines sont plus pertinentes:

$$\sigma = \pm i (K_2 K_3 + K_1 K_3 + K_2 K_1)^{1/2} = \pm i 2\sqrt{2} A_0 J_0^{1/2} / \pi R^5$$

La configuration est stable si $J_0 > 0$. la fréquence d'oscillation est $2\sqrt{2} A_0 J_0^{1/2} / \pi R^5$.

Sinon, le système est instable et le triangle explose en exponentielle croissante. bien entendu le déplacement ne sont pas exponentiels par la suite.

3.4 4 vortex

suivant la symétrie initiale le comportement sera très différent.

Si on les dispose en carré, leur trajectoire reste sur un même cercle (semble stable, on pourrait montrer que c'est stable)

Si on les dispose en rectangle, le résultat est quasi périodique

Si on les dispose en désordre, le résultat chaotique!!

vortex 9

Mettre le résultat ici.

3.5 Plusieurs vortex

si les 3 κ sont égaux on a vu que la configuration est stable. Soient N vortex placés sur un polygone régulier si il y en a moins que 6: stable, plus de 8 instable. Le cas N=6 est linéairement stable mais non linéairement instable!!!

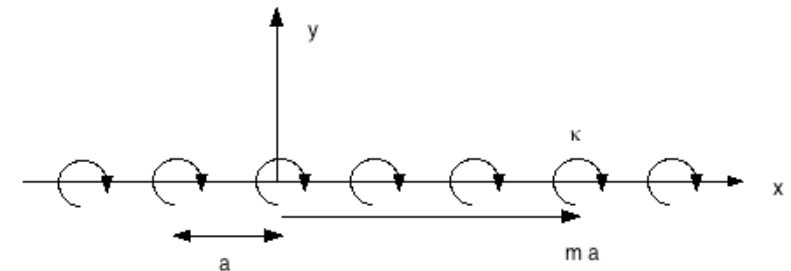
3.6 Allée de vortex

Safman p 131

Lamb

Safman p 142: KH avec des vortex

On considère une distribution de vortex infinie. Chaque vortex est séparé de son voisin de la distance a. Toutes les circulations sont les mêmes.



Prenons le vortex n° m. si on le déplace de x_m et y_m par rapport à sa position ma et 0, la vitesse induite par tous ces tourbillons qui ont bougé est en j:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum \frac{-\kappa(y_j - y_m)}{2 \pi r_{jm}^2}$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum \frac{\kappa(x_j - x_m)}{2 \pi r_{jm}^2}$$

$$r_{jm}^2 = (x_j - x_m + (m-j)a)^2 + (y_j - y_m)^2$$

Les sommes Σ portent sur l'indice m, et sont de $-\infty$ à $+\infty$ avec m différent de j.

Si tous les déplacements sont nuls:

la vitesse induite en j est bien nulle car

$$\sum \frac{-\kappa(y_j - y_m)}{2 \pi r_{jm}^2} = 0$$

$$\sum \frac{\kappa(x_j - x_m)}{2 \pi r_{jm}^2} = \sum \frac{\kappa(m-j)}{2 \pi a (m-j)^2} = \frac{\kappa}{2 \pi a} \sum (m-j)^{-1} = 0.$$

vortex 10

La nappe est fixe lorsqu'elle n'est pas perturbée, les vortex se compensent 2 à 2.

stabilité

On change d'indice on se place en $j=0$. C'est légitime puisque les quantités ne dépendent que des écarts de position.

Si on linéarise:

$$r_m^2 = (ma)^2 (1 - (2/ma)(x_0 - x_m) + \dots)$$

La vitesse devient:

$$\frac{dx_0}{dt} = \sum \frac{-\kappa(y_0 - y_m)}{2\pi a^2 m^2}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = \sum \frac{-\kappa(x_0 - x_m)}{2\pi a^2 m^2}$$

La somme porte de $-\infty$ à $+\infty$ avec m différent de 0 (attention au signe moins).

On peut décomposer ce système en modes propres. Il est en fait invariant par translation de multiple de a (l'équivalent continu serait invariant par toute translation), car seul la position relative intervient. C'est donc ma qui joue le rôle de la position x .

On décompose donc en somme d'exponentielle $e^{im\phi}$, avec ϕ compris entre 0 et 2π . Cela définit un nombre d'onde $k = \phi/a$: $e^{im\phi} = e^{i(\phi/a)ma} = e^{ikx}$.

$$x_m = \alpha(t) e^{im\phi}, y_m = \beta(t) e^{im\phi}$$

On substitue et on trouve:

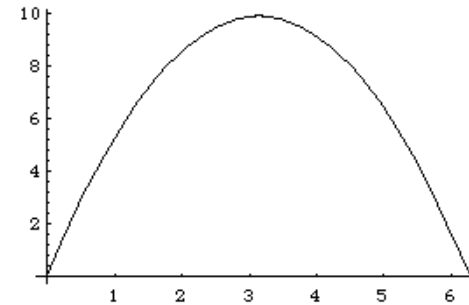
$$d\alpha/dt = -\sigma\beta, d\beta/dt = -\sigma\alpha, \quad \sigma = \sum \frac{\kappa(1 - e^{im\phi})}{2\pi a^2 m^2}, \quad \sigma \text{ ne dépend pas de } m, \text{ mais il dépend du nombre d'onde } \phi. \text{ Les modes sont tous découplés.}$$

L'astuce, sachant (bien connu)

$$\sum_{+\infty}^{\infty} \frac{e^{im\phi}}{m^2} = \frac{\pi^3}{3} - \frac{1}{2} \phi (2\pi - \phi)$$

on trouve $\sigma = \frac{\kappa}{4\pi a^2} \phi (2\pi - \phi)$

σ varie de 0 à 0 pour ϕ variant de 0 à 2π en passant le maximum $\kappa\pi/4a^2$ pour $\phi = \pi$.



Il n'y a pas de μ critique, c'est toujours instable. Il y a un taux d'amplification le plus important. C'est très important car si on met un bruit qui compte *a priori* toutes les longueurs d'ondes, ce sera le plus amplifié, donc le plus visible.

La longueur d'onde est $2a$, c'est ce qu'on appelle l'appariement sub harmonique.

appariement

Si on se place à cette valeur, c'est le taux maximal d'amplification, c'est donc le plus dangereux. La longueur d'onde correspondante a toutes les chances d'être sélectionnée.

$$x_m = \alpha(t) (-1)^m, y_m = \beta(t) (-1)^m$$

On prend $\alpha(0)=0, \beta(0)=\beta_0$.

On trouve que les trajectoires sont des hyperboles:

$$y_m^2 - x_m^2 = \beta_0^2, \quad x_m = (-1)^m \beta_0 \text{sh}(\sigma t) \text{ et } y_m = (-1)^m \beta_0 \text{ch}(\sigma t)$$

Sur le dessin suivant issu du calcul pour les conditions aux limites suivantes

```
n=40;
for (i=1; i<=n; i++)
{
  X[i]=-8+16*i*1./n;
  Y[i]=.0+.01 *pow(-1, i) ;
  G[i]=1./n;
}
```

et $dt = 0.01$ et 500 itérations, on observe l'appariement des tourbillons. Ils tournent autour d'eux même, le premier tour se fait en $t=15$ le 2ème ~ 30 puis vers $t=35$ deux paires commencent à tourner l'une autour de l'autre. Les flèches sont les trajectoires dans le cas linéarisé:



Les tourbillons se rapprochent l'un de l'autre et tournent sur eux même. Au temps $t \sim 40$ on peut observer le double appariement (4 vortex!)

Kelvin Helmholtz

L'instabilité de Kelvin Helmholtz correspond à une vraie nappe de tourbillons: $\kappa/(2a)=U$. On peut faire le calcul direct d'une nappe continue déstabilisée, ou plus tard directement à partir des équations d'Euler, mais dans notre approche, cela veut dire que l'écartement est très petit, longueur d'onde très grande par rapport à a .

$$\sigma = \frac{\kappa}{4\pi a^2} \phi (2\pi - \phi) \sim \frac{\kappa}{2a} (\phi/a) = U k \quad k \text{ nombre d'onde.}$$

Dans le cas de KH:

$$(-U-c)^2 + (U+c)^2 = 0.$$

donc $c = \pm iU$, donc $\omega = \pm kUi$, l'écoulement est toujours instable.

```
n=100;
for (i=1; i<=n; i++)
{
  X[i]=-4+8*i*1./n;
  Y[i]=.05*sin(2*pi*X[i]);
  G[i]=-1./n/(2*pi);
}
```

dt=0.01 tmax=4



devient par raidissement et enroulement:



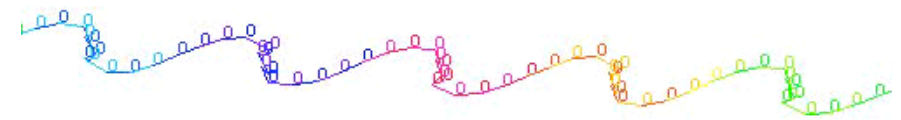
On peut montrer le film de l'appariement des vortex d'une couche de mélange

vortex 13

Points vortex

On trouve dans ce cas que le taux d'amplification est:

$$\sigma = \frac{\kappa}{4\pi a^2} \phi (2\pi - \phi)$$

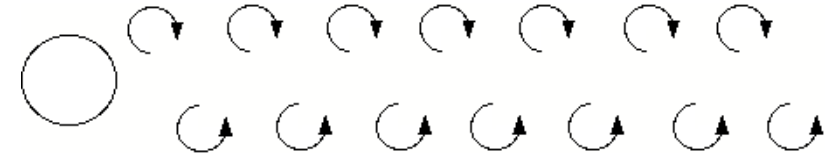


Or $(2\kappa/a)$ est le saut de vitesse, et pour les petits ϕ : on identifie ϕ à ka , et il reste:

$$\sigma = \frac{\kappa}{4\pi a^2} \phi (2\pi - \phi) \sim \frac{\kappa}{2a} (\phi/a) = U k$$

3.7 double rangée de Vortex

c'est l'allée de Von Kármán



L'allée se déplace sous l'effet de l'écoulement incident imposé et de la vitesse induite par les tourbillons de l'autre rangée. La déstabilisation mène à deux modes propres, l'un correspondant à déstabilisation symétrique, l'autre antisymétrique. On montre que pour un rapport de l'écartement entre les deux allées et entre chaque vortex égal à ~ 0.28 l'allée est stable pour les perturbations infinitésimales.



La fréquence caractéristique, la vitesse induite par l'allée sur elle-même étant W , l'écoulement incident étant U , le diamètre du cylindre est D :

$$f = (U + W)/D \sim 2U/D \text{ et ce pour tout Reynolds compris entre 40 et 300.}$$

-> vibrations induites sur l'obstacle: pont de Tacoma/ fil chantant du téléphone.

vortex 14

Manip numérique:

Le système est résolu par une méthode runge kutta à l'ordre 2. le fichier entrée est de la forme:
dt
Niter
nombre de vortex
leur position et circulation

2 vortex

On fait partir deux vortex
.01
100
2
-0 1 +2
-0 0 -2

On fait varier la circulation du deuxième de -2
à -1 0 1 et enfin 2. On observe leur départ
puis ils tournent

3 vortex

3 sur un triangle isocèle, la configuration est
stable. (perturbée par le bruit numérique)

.025
100
3
-0.5 0.866025403784439 5 /* moffatt p 136 */
-0.5 -0.866025403784439 5 .001
1. 0 5 500
3
On peut perturber une des positions. Par
exemple, le premier devient: 0. 0 1
1 0 .5
-0.1 0.866025403784439 5 1 .5 -.3333333333333333
On voit bien l'oscillation du rayon. devraient s'effondrer mais ne marche pas...
quand ils sont trop proche ils sont rééjectés.

/* 3 vortex 1 2 3 Moffatt p 132*/

.05
800

/* trois vortex instables */
.01

vortex 15

100
3
0 0 10
1 0 20
0.5 0.866025403785 -10

/* 3 vortex stables*/

.05
300
3
0 0 8
1 0 10
0.5 0.866025403785 10

/* 3 tournent oscillent */

.005
200
3
0 0 2
1 0 2
0.5 0.5 2

/* 3 vortex stable*/

.05
300
3
0 0 10
1 0 10
0.5 0.866025403785 10

4 vortex

On en met quatre
.05
400
4
1 1 10
1 -1 10

-1 1 10
-1 -1 10

on change par exemple le premier:
1 1.1 10

8 vortex

/* 8 vortex presque exactement*/

.05
400
8
0.707107 0.707107 1
0 1. 1
-0.707107 0.707107 1
-1. 0 1
-0.707107 -0.707107 1
0 -1. 1
0.707107 -0.707107 1
1. 0 1

ça commence bien, puis ça se mélange...

/* 8 vortex bruités */

.05
400
8
0.70 0.7 1
0 1. 1
-0.807107 0.707107 1
-1. 0 1
-0.707107 -0.707107 1
0 -1. 1

vortex 16

0.707107 -0.707107 1
1. 0 1

plus sévère

biblio

Lamb H. 1963 Hydrodynamics Cambridge (p 225 ...)

Guyon E. Hulin J.P Petit L. Hydrodynamique physique Intereditions 91 (p 315 ...)

Betchov R. Criminale W. 1967 Stability of parallel flows A.P p 149 p 160

Moffatt Cours X

Safman 19XX vortex dynamics