

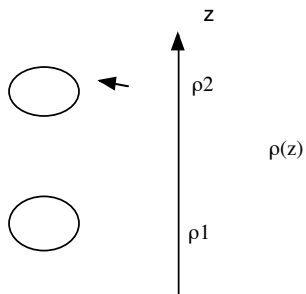
## Instabilité de Rayleigh Bénard

Le plan que nous adoptons sera général. On commence par l'observation de l'instabilité. Puis la recherche d'un mécanisme physique hypersimplifié pour dégager les premiers paramètres de contrôle. Ensuite, écriture des équations, et recherche de la solution de base, puis linéarisation. Décomposition en modes propres, courbe de stabilité marginale en fonction des paramètres de contrôle.

### 1. visualisations:

- On prend une poêle et de la margarine
- simulation avec FLUENT.
- effet Marangoni toujours présent (influence de la tension superficielle).

### 2. explication sommaire de l'instabilité.



L'explication avec les mains se fait comme suit:

On se donne un élément de volume en z que l'on déplace en dz.

son accélération est alors la somme de la force d'Archimède et d'une force de traînée visqueuse (force de Stokes écrite en ordre de grandeur):

$$\rho_1 \delta v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \sim (\rho_1 - \rho_2) g \delta v - \mu (\delta v)^{1/3} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

or la variation de densité est *grosso modo* proportionnelle à la variation de température:

$$(\rho_1 - \rho_2) \sim \rho_1 dT/dz \zeta$$

comme  $dT/dz = -\Delta T/d < 0$

où  $\Delta T = T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}}$ .

Si il n'y avait que la force de traînée:

$$\mu (\delta v)^{1/3} \sim \rho_1 \delta v \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

d'où l'apparition d'un temps caractéristique  $\tau \sim \rho_1 (\delta v)^{2/3} / \mu$  avec

lequel on rend le  $\frac{\partial}{\partial t}$  de  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  sans dimension

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \sim \Delta T/d g \zeta - v^2 (\delta v)^{1/3-1} / (\rho_1 (\delta v)^{2/3} / \mu) \partial \zeta / \partial t$$

la force d'Archimède déstabilise l'élément de fluide et l'envoie plus loin, c'est la viscosité qui calme le jeu. Le rapport de ces deux contribution est:

$$\frac{g \Delta T (\delta v)^{4/3}}{d v^2}$$

Plus l'élément de fluide est grand plus ce nombre est grand; il est borné par  $(\delta v)^{1/3} = d$  donc le nombre sans dimension suivant contrôle vraisemblablement l'instabilité:

$$\frac{g \Delta T d^3}{v^2}$$

Si ce nombre est faible (ou négatif) il n'y a pas d'instabilité. Si il est grand la force déstabilisatrice d'Archimède l'emporte. Notre raisonnement pour l'établissement de cette relation est un peu tiré par les cheveux, entre autre parce que l'on mélange une force liée à la position et une autre liée à la vitesse.

C'est presque le nombre de Rayleigh (C'est en fait le nombre de Grashof).

On consultera Guyon & all chapitre 10.

### 3. l'approximation de Boussinesq, validité.

Pour la suite nous allons avoir besoin d'une approximation utile.

Dans notre problème il y a des effets thermiques, et la densité varie. Cela nous obligerait à utiliser les équations complètes de Navier Stokes compressibles. On peut en fait introduire une simplification dans l'expression de la loi liant les quantités thermodynamique p, ρ et T.

On écrira simplement:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0))$$

et on négligera les variations de densité sauf dans le terme de poids. Conditions de validité...

On admet de plus que les coefficients ν et κ c<sub>p</sub> ne dépendent pas de la température...

$\alpha \Delta T \ll 1$

### 4. mise en équations

#### 4.1 équations générales

Pour un fluide newtonien compressible avec l'approximation de Boussinesq et en supposant un fluide caloriquement parfait. On néglige la dissipation visqueuse. En supposant de plus que les coefficients ne varient pas avec la température.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p / \rho_0 + (1 - \alpha(T - T_0))g\mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T$$

#### 4.2 état de base

L'état de base est celui de conduction pure. Il ne reste que l'équation de la chaleur.

$$u=v=w=0, T = T_0 - \Delta T z/d$$

La pression:

$$p = p_0 - \rho_0 g(z + 1/2 \alpha \Delta T z^2/d).$$

#### 4.3 adimensionnement des équations.

par l'analyse phénoménologique adimensionnons les équations. Nous travaillons maintenant sur les écarts à la solution de base définie plus haut.

On a d l'écartement des plaque comme quantité évidente d'adimensionnement (du moins pour un premier essai), u et v sont mesurés avec un  $U_0$  inconnu pour l'instant. La perturbation de température est mesurée par  $\Delta T$ . Si on chauffe en bas, l'ordre de grandeur du temps de réponse de la température est:

$$\tau = \rho_0 c_p d^2 / k.$$

C'est aussi  $d^2 P_r / \nu$  (Nombre de Prandtl  $Pr = \nu / (k / \rho_0 c_p)$ ). Mais attention, il y a aussi le terme  $w \partial T / \partial z$  qui va jouer, il serait donc bon qu'il soit du même ordre de grandeur que  $\partial T / \partial t$ . Ce qui nous donne  $U_0 = d / \tau$ .

Le terme moteur qui fait changer la vitesse est  $-\alpha \Delta T g$  le frein est  $\nu d^{-2} u$ .

Si on prend  $U_0 = d / \tau$ , il apparaît donc le nombre sans dimension suivant en facteur du terme moteur:

$$\alpha \Delta T g / (U_0 / \tau) = \frac{\alpha \Delta T g Pr d^3}{\nu^2} Pr = Ra Pr \text{ avec } Ra = \frac{\alpha \Delta T g Pr d^3}{\nu^2}$$

les équations deviennent pour les écarts pour les écarts à la solution de base

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p - Pr \frac{\alpha \Delta T Pr d^3}{\nu^2} \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta - w = \nabla^2 \Theta$$

Note on peut choisir un autre adim pour la température et la pression (cf. Manneville)

#### 4.4 conditions aux limites

Nous nous restreignons au cas où on met des parois rigides.

$$u=v=w=0 \text{ sur } z=0 \text{ et } 1$$

On remarque que cela donne (à cause de l'invariance par translation sur les parois):

$$\partial w / \partial z = 0 \text{ sur } z=0 \text{ et } 1$$

Pour la température, elle est imposée:

$$\Theta = 0 \text{ sur } z=0 \text{ et } \Theta = 0 \text{ en } z=1$$

En pratique ça n'est pas si simple d'imposer une température!

note

Le cas Bénard Marangoni c'est la condition aux limite qui change: on a une surface libre avec la tension superficielle qui varie avec T.

#### 4.5 Linéarisation

On linéarise les équations autour de l'état de base.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - Pr \frac{\alpha \Delta T Pr d^3}{\nu^2} \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \Theta$$

Par manipulations on peut éliminer u et v et ne garder que w (cf. Drazin p 39)

On trouve:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = Ra Pr (\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Theta + Pr \nabla^2 \nabla^2 w$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \Theta$$

qui peut se réduire à

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2) (Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2) \nabla^2 w = Ra (\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) w$$

#### 4.6 système final

Il faut donc résoudre:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = Ra Pr (\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Theta + Pr \nabla^2 \nabla^2 w$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \Theta$$

$$w=0, \partial w / \partial z = 0, \Theta = 0 \text{ sur } z=0 \text{ et } z=1$$

### 5. Résolutions simplifiées

#### 5.1 modèle simplifié de Manneville

On consultera le chapitre 3 dans le quel il néglige dans un premier temps les dérivées en x et y et ne garde que  $\partial^2 z$ . Il ne garde aussi que la vitesse w. Il en déduit par

décomposition en modes de Fourier l'équation de dispersion valable dans le cadre de ses simplifications (à savoir cellules de grande taille).

$$\frac{\partial}{\partial t} w = Ra Pr \Theta + Pr \frac{\partial^2}{\partial z^2} w$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - w = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta$$

### 5.2 passage à Lorentz.

Le passage au modèle de Lorentz est présenté dans la nouvelle édition du Tritton (Chap 24 et 17) en utilisant une approximation 1D de la convection dans un anneau.  
cf. l'annexe D de Bergé & all.

### 5.3 équation de H. S.

L'équation que nous avons introduite dans un cours précédent sert de modèle (sorti du chapeau) de R.B. En effet il existe un mode k marginalement stable (à  $\sigma=0$ ) comme dans R.B.

## 6. Résolutions complètes

### 6.1 décomposition en modes normaux

La couche de fluide est supposée latéralement illimitée (invariances par translations en x et y). On va poser:

$$(w, \Theta) = (W(z), T(z)) e^{imx + ily} e^{\sigma t}$$

on prend k le module du vecteur d'onde.  $D=d/dz$

$$(D^2 - k^2) \sigma W = Pr ((D^2 - k^2)^2 W - k^2 Ra T); \sigma T = (D^2 - k^2) T + W;$$

Par élimination on trouve l'équation de dispersion.

### 6.2 principe d'échange de Stabilité

cf. Landau p 317.. Drazin Chandra..

Il y a un résultat important dans ce problème qui dit les modes marginalement stables ( $\sigma_r=0$ ) sont aussi à  $\sigma_i=0$ . Ce qui veut dire que l'on passe d'un écoulement stationnaire à un autre. Ce résultat est démontré dans Chandrasekhar et directement reproduit dans Drazin p45 voir aussi Landau §57 p314.

L'idée est de prendre les équations et de multiplier par la quantité conjuguée  $T^*$  ou  $W^*$  et d'intégrer sur le volume (c'est un produit scalaire que l'on effectue). Puis on intègre par parties de manière à faire sortir des intégrales en  $\int T T^* dz$  qui sont des normes et

donc sont positives.

On décompose en une partie réelle et une partie imaginaire l'expression finale et on constate alors que  $\sigma_i=0$  si  $Ra>0$ .

### 6.3 relation de dispersion résolution dans le cas rigide rigide

On garde ce résultat  $\sigma=0$ . L'équation de dispersion est alors de la forme:

$$(D^2 - k^2)^2 W = k^2 Ra T; (D^2 - k^2) T = -W;$$

$$\text{soit } (D^2 - k^2)^3 T = -k^2 Ra T;$$

Cette équation différentielle est particulièrement simple et a des solutions en  $e^{iqz}$ .

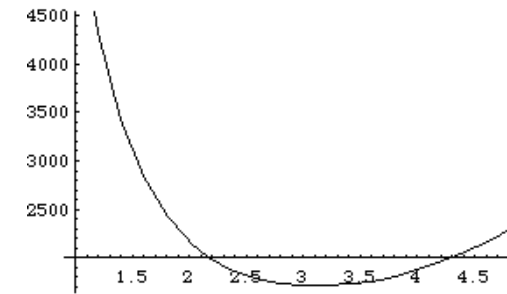
La solution est la somme des 6 exponentielles complexes.

$$(q_m^2 + k^2)^3 - k^2 Ra = 0.$$

$$+/- q_m \text{ avec: } q_m^2 = -k^2 + j^m (Ra k^2)^{1/3}, \text{ et } m=0,1,2 \text{ et } j=-1/2 + i |3/2.$$

On a 6 constantes 3 conditions en  $z=0$  et 3 en  $z=1$ . OK!

Le déterminant est nul, d'où la courbe de stabilité marginale.



$$Ra_c \sim 1707,76 \quad k_c \sim 3,11632$$

### 6.4 résolution dans le cas libre libre

les CL changent la solution est facile ...

### 6.5 structures observées.

On a posé:

$$(w, \Theta) = (W(z), T(z)) e^{imx + ily} e^{\sigma t}$$

On aurait pu écrire

$$(w, \Theta) = (W(z), T(z)) f(x, y) e^{\sigma t}$$

\*) rouleaux

$$f(x, y) = \cos(k_c x)$$

$$w = W_0 \sin(\pi z) \cos(k_c x)$$

$$\theta = W_0 (\pi^2 + k_c^2)^2 / k_c^2 \sin(\pi z) \cos(k_c x)$$

\*\*) carrés

$$f(x,y) = \cos(k_c/2 x)\sin(k_c/2 x)$$

\*\*\*) hexagones

$$f(x,y) = \cos(1/2(k_c(|3 x-y|)) + \cos(1/2(k_c(|3 x+y|)) + \cos(k_c x)$$

...

## 7. biblio

Landau

Drazin

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic Stability Dover 61

Manneville

Bergé Pommeau Vidal

Guyon Hulin Petit

Tritton

Trefil

Glansdorf & Prigogine

v1- 21 Novembre 1996