

chapitre 3

Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC.
Introduction à l'Instabilité Hydrodynamique.
P.-Y. Lagrée & M. Rossi.

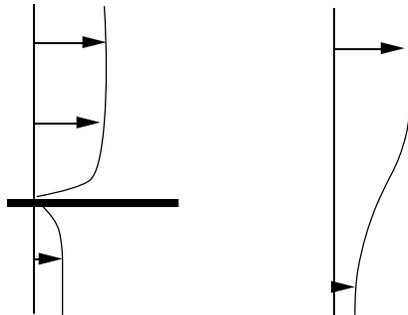
Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec effet de gravité et de tension superficielle.

Le film de Mollo Christensen tiré de l'"Encyclopedia Britannica" illustre la génération des vagues par le vent. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz que nous analysons plus bas ne répond qu'en partie à ce problème très complexe et toujours pas compris!

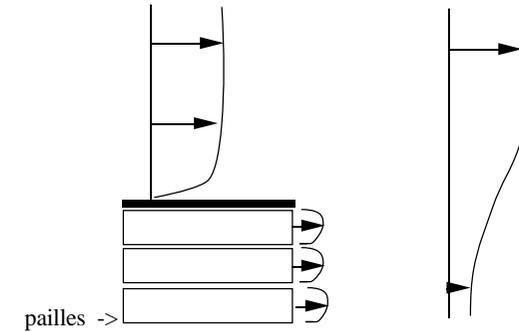
On considère dans ce chapitre les mécanismes d'instabilité principalement liés à un cisaillement. Ce type d'écoulement est observé dans le sillage d'un objet, une couche de mélange, un jet.

Quelques exemples expérimentaux :

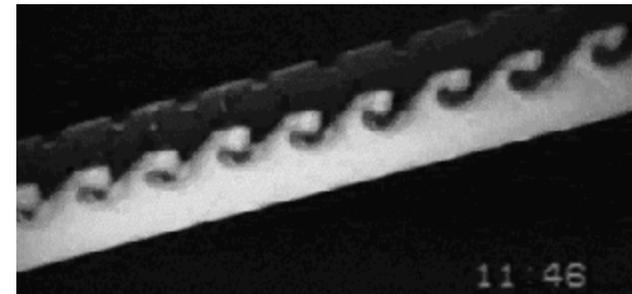
-écoulement en aval d'une plaque plane et formation d'une couche de mélange



-séparation d'un flux en deux parties et freinage du flux inférieur par des pailles (l'utilisation des pailles pour produire une couche de mélange est une idée originale et amusante réalisée à l'ESPCI par E. Weisfreid).



- deux densités différentes: expérience de Thorpe (Exp. O. Pouliquen, Polytechnique)



Les profils de base $U_0(y)$ que nous considérons ci-dessous sont des champs de vitesses avec une seule composante (celle le long de x) mais cette dernière varie uniquement suivant une direction orthogonale y . Il s'agit de l'approximation quasi-statique: en effet si on se donne un tel profil à l'instant initial, il va diffuser:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ et } u(y, t=0) = U_0(y).$$

On se place donc dans le cadre des écoulements de fluide parfait ou encore on suppose que les temps caractéristiques issus des phénomènes d'instabilité sont plus petits que l'échelle de temps associée à la diffusion visqueuse. A nos échelles, la couche ne diffuse pas (cf expérience de Thorpe).

Pour un écoulement en aval d'une plaque plane, la diffusion visqueuse impose de manière analogue que les profils se développent en x . L'approximation quasi-parallèle consiste à négliger cette variation. On se place donc dans le cadre des écoulements de fluide parfait

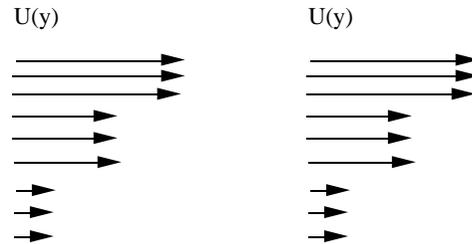
ou encore on suppose que les longueurs d'onde issues des phénomènes d'instabilité sont plus petites que l'échelle de variation longitudinale due à la diffusion.

N.B. Les solutions de la forme $\underline{u} = U(y) \underline{e}_x$ forment une famille continue de solutions des équations d'Euler! Pour un fluide parfait, les lames de fluide glissent les unes sur les autres. On ne trouve que très peu d'écoulements strictement parallèles vérifiant les équations de Navier-Stokes (Poiseuille ou Couette). En fluide visqueux, ceci explique la nécessité de recourir à des approximations de type quasi-parallèle ou quasi-statique.

Exemples d'écoulements $U(y)$ de fluide parfait

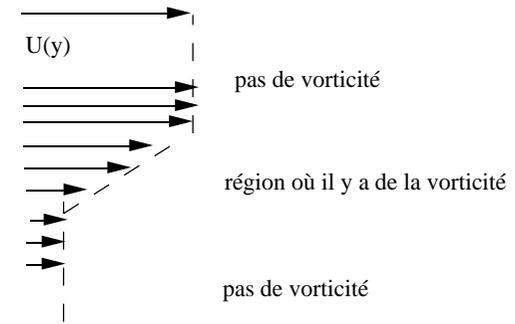
Nappes de vorticité :

La vitesse est constante sauf en des positions y_n où elle change brusquement. En y_n , la vorticité est infinie ailleurs elle est nulle. On parle d'une nappe de vorticité

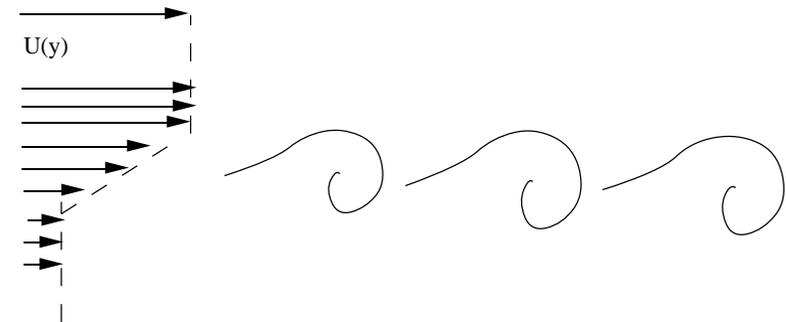


Saut de vorticité:

Le profil de vitesse est continu mais pas sa dérivée. Par exemple, il est linéaire par morceaux: la vorticité est bornée mais constante par morceaux dans ce cas.



Pourquoi la vorticité se réorganise-t-elle en une allée de vortex? Tel est l'objet de ce chapitre.



1. Mise en équations

1.1. hypothèses

Soient deux fluides incompressibles de densité différente, soumis à un champ de pesanteur. Ces deux fluides sont immiscibles: ils ne se mélangent donc pas mais sont séparés par une interface possédant une tension de surface caractérisant leur interaction moléculaire. La tension de surface est constante et notée σ .

Le couplage entre les champs de vitesse/ pression et la forme de l'interface rend ce problème particulièrement complexe.

En plus du cisaillement, plusieurs mécanismes interviennent: la gravité, la tension superficielle, la viscosité.

Dans le cadre linéaire, on peut supposer qu'il n'y a pas de déferlement de l'interface: il est toujours possible de définir l'interface comme une fonction $y=\eta(x,t)$. Au-delà d'une certaine amplitude, cette hypothèse est prise en défaut.

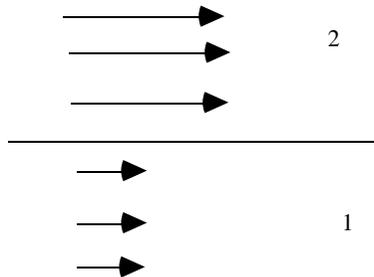
Hypothèses

- On se place en 2D (pas nécessaire mais simplifie les calculs sans occulter le phénomène prépondérant qui est 2D).

- On néglige la viscosité.

1.2. l'état de base de la nappe de vorticité

Considérons l'état de base suivant une interface plate et deux champs de vitesses uniformes de part et d'autre.



Ceci est un cas limite pour lequel tout le cisaillement est situé l'interface où se produit le saut de vitesse:

$$u_B = U_1 \text{ en } y < 0, \quad u_B = U_2 \text{ en } y > 0$$

La vorticité de cet écoulement de base est située sur l'interface où elle est singulière.

La pression est constante s'il n'y a pas de gravité. Sinon, on aura simplement un effet hydrostatique pur:

$$p = p_0 - \rho_1 g y \quad y < 0 \text{ et } p = p_0 - \rho_2 g y \quad y > 0.$$

L'interface étant plate dans l'état de base, la tension superficielle n'intervient pas explicitement puisqu'elle est associée à une courbure de l'interface.

1.3. Les équations du mouvements.

Les équations à résoudre sont les équations d'Euler avec les conditions aux limites $u \rightarrow U_1$ en $y \rightarrow -\infty$ et $u \rightarrow U_2$ en $y \rightarrow +\infty$, et la condition d'incompressibilité. La gravité est prise en compte dans l'équation suivant y .

Il faut imposer des conditions sur une interface dont la dynamique n'est pas connue à l'avance: c'est la grande difficulté de ce problème.

condition dynamique:

Le saut de pression est tel que:

$$p_1(x, \eta(x, t), t) - p_2(x, \eta(x, t), t) = \sigma \nabla \cdot \underline{n}_{12}$$

la normale à la surface est:

$$\underline{n}_{12} = (-\partial \eta / \partial x, 1) / (1 + (\partial \eta / \partial x)^2)^{1/2}$$

condition cinématique:

Les fluides ne "décollent" pas de la surface et ne s'interpénètrent pas: intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface:

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{n}_{12} = \underline{u}_2 \cdot \underline{n}_{12} \text{ en } y - \eta(x, t) = 0.$$

On retrouve cette même relation à partir de $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ intégrée sur une petite épaisseur (cf  lectromagn tisme! Voir la condition sur la composante normale du champ magnétique B à une interface!)

Si

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0$$

est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant mati rielle, F est transport  le long des lignes de courant:

$$\frac{d}{dt} F = 0 \text{ (dérivée totale)}$$

Par définition de la dérivée lagrangienne

$$dy/dt = v(x, \eta, t) \text{ et } d\eta/dt = \partial \eta / \partial t + u \partial \eta / \partial x,$$

$\frac{d}{dt} F = 0$ s'écrit (en utilisant les vitesses dans le milieu 1 ou 2):

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + u_i(x, \eta(x, t), t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = v_i(x, \eta(x, t), t) \text{ pour } i=1, 2$$

qu'on peut récrire en faisant apparaître les vitesses normales

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{12} (1 + (\partial \eta / \partial x)^2)^{1/2}$$

En faisant la différence entre ces deux expressions on retrouve la continuité des vitesses normales. On a en plus une relation nouvelle reliant le déplacement de l'interface et le champ des vitesses.

N.B. Il y a des termes non linéaires dans les équations d'Euler mais aussi et surtout dans les équations à l'interface!

2. Stabilité

2.1. Linéarisation

On introduit la fonction de courant telle que $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

En 2D, c'est un moyen de vérifier la condition d'incompressibilité automatiquement. En prenant le rotationnel des équations d'Euler 2D, on obtient l'équation de transport du tourbillon (cf loi de conservation de Helmholtz) $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\nabla^2 \psi$.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

On obtient une équation pour la pression avec la composante suivant x des équations d'Euler 2D

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\rho_i^{-1} \frac{\partial p}{\partial x},$$

Et si on linéarise

i) On écrit

$$\begin{aligned} \underline{u} &= U_0 \underline{e}_x + \tilde{\underline{u}} \\ \psi &= U_i y + \tilde{\psi}, \quad p = p_i + \tilde{p}, \quad \Omega = 0 - \nabla^2 \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

ii) On substitue dans les équations du transport de la vorticité

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

et on ne conserve que les termes d'ordre 1 dans l'amplitude des perturbations et on oublie les tildes. Il vient:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi = 0.$$

La perturbation de vorticité est donc advectée avec la vitesse de l'écoulement de base.

L'équation linéarisée pour la pression s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = -\rho_i^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial x},$$

iii) Si on remplace dans les équations écrites sur l'interface, le développement de la vitesse longitudinale

$$U_i + u_i(x, \eta, t) = U_i + u_i(x, 0, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} u_i(x, 0, t) + \dots$$

et celui de la vitesse transverse

$$0 + v_i(x, \eta, t) = 0 + v_i(x, 0, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} v_i(x, 0, t) + \dots$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + (U_i + u_i(x, 0, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} u_i(x, 0, t) + \dots) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = \\ 0 + v_i(x, 0, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} v_i(x, 0, t) + \dots \end{aligned}$$

Au premier ordre, on obtient une condition cinématique sur la perturbation d'interface, écrite sur l'interface non perturbée (au repos $y=0$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = v_i(x, 0, t) \quad \text{pour } i=1,2$$

De même pour le saut de pression à l'interface, la pression évaluée sur l'interface perturbée (il ne faut pas oublier l'effet de gravité) s'écrit :

$$p_0 - \rho_1 g \eta + p_1(x, \eta(x, t), t)$$

son développement est donc

$$p_0 - \rho_1 g \eta + p_1(x, 0, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} p_1(x, 0, t) + \dots$$

idem pour 2.

Enfin, la divergence de la normale se réduit à $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta + \dots$

La condition finale pour le saut de pression:

$$p_0 - \rho_1 g \eta + p_1(x, 0, t) - (p_0 - \rho_2 g \eta + p_2(x, 0, t)) = -\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

ou encore

$$p_2(x, 0, t) - p_1(x, 0, t) = (\rho_2 - \rho_1) g \eta + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta$$

2.2. Les Modes Normaux

2.2.1. Equations pour les modes normaux

Les coefficients des équations ci-dessus ne dépendent ni du temps (stationnaire) ni de la variable longitudinale (invariance par translation), la direction de l'axe des y est non homogène à cause des conditions aux limites.

On décompose donc en modes normaux

$$(u_i(x,y,t), v_i(x,y,t), p_i(x,y,t), \psi_i(x,y,t), \eta(x,t)) = (u_i(y), v_i(y), p_i(y), \psi_i(y), \eta) e^{-i\omega t + ikx}$$

Les champs $(u_i(y), v_i(y), p_i(y), \psi_i(y), \eta)$ sont intimement liés. En particulier on n'aurait pas pu choisir des nombres d'ondes différents pour chacun des ces champs.

N.B. Par abus de notation, on a confondu $u_i(x,y,t)$ et $u_i(y)$, $\eta(x,t)$ et η .

Posons $e^{-i\omega t + ikx}$ ou $e^{i(kx-ct)}$ avec la vitesse de phase $c = \omega/k$

- si c est réel, c'est une onde qui se déplace à la vitesse c .

- si ω est complexe: $k(x-ct) = k(x - c_r t) + kc_i t$, donc $e^{i(kx-ct)} = e^{kc_i t} e^{i(kx - c_r t)}$

Ce sont des champs périodiques en x , l'interface ne varie pas de forme mais l'amplitude varie : elle peut être amplifiée. Lorsque les amplitudes deviennent trop grandes, on sort du cadre linéaire et on a un raidissement de l'interface.

Pour les modes normaux, il suffit de remplacer les dérivations par rapport à x et t par un simple facteur. On a l'équivalence:

$$ik \leftrightarrow \partial/\partial x \text{ et } -ikc \leftrightarrow \partial/\partial t$$

Si on pose $D = d/dy$, on a

$$\begin{aligned} (U_i - c)(D^2 - k^2) \psi_i &= 0. \\ p_i &= -\rho_i (U_i - c) \partial \psi / \partial y. \\ ik(U_i - c) \eta &= v_i(x, 0, t) \\ p_2(0, t) - p_1(0, t) &= (\rho_2 - \rho_1) g \eta - \sigma k^2 \eta \end{aligned}$$

2.2.2. Résolution

La première équation impose que si les perturbations sont rotationnelles, la vorticité est simplement advectée à la vitesse $c = U_i$. Ceci n'est pas à l'origine d'une instabilité. Dans un souci de simplification, on suppose donc que l'écoulement perturbé est potentiel: comme dans l'état de base (dans ce cas $\Omega = -U_0'$ est nulle sauf en $y=0$) la vorticité est concentrée sur l'interface. On étudie donc une nappe de vorticité perturbée.

Les perturbations potentielles vérifient:

$$(D^2 - k^2) \psi_i = 0$$

La solution fait apparaître des exponentielles de kx et $-kx$, les conditions aux limites en $\pm\infty$ (la vitesse tend vers 0 en $\pm\infty$) imposent donc :

$$\psi_1 = A_1 \exp(|k|x) \text{ et } \psi_2 = A_2 \exp(-|k|x)$$

On en déduit la pression:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\rho_1 (U_1 - c) |k| A_1 \exp(|k|x) \\ p_2 &= -\rho_2 (U_2 - c) |k| A_2 \exp(-|k|x) \end{aligned}$$

Tous les champs dépendent à ce stade de 3 constantes: A_1, A_2, η . On a 3 équations $ik(U_i - c) \eta = v_i(x, 0, t)$ devient

$$(-ikc + ikU_1) \eta = (-ikA_1) \text{ et } (-ikc + ikU_2) \eta = (-ikA_2)$$

ou encore

$$(U_1 - c) \eta = (-A_1) \text{ et } (U_2 - c) \eta = (-A_2).$$

La pression en $y=0$ s'écrit :

$$p_1 = \rho_1 (U_1 - c)^2 |k| \eta$$

$$p_2 = -\rho_2 (U_2 - c)^2 |k| \eta$$

La condition pour le saut de pression impose donc la relation de dispersion finale:

$$(\rho_1 (U_1 - c)^2 + \rho_2 (U_2 - c)^2) |k| = (\rho_1 - \rho_2) g + \sigma k^2.$$

Supprimons le mouvement d'ensemble en posant

$$v = \omega - k U_s$$

$$U_s = (\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) / (\rho_1 + \rho_2)$$

D'où

$$v^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g |k| + \sigma k^2 |k|}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_2 - U_1)^2 k^2 = \Delta(k)$$

si $\Delta(k) > 0$ $v = \pm \sqrt{\Delta(k)}$ l'onde de nombre d'onde k est neutre

si $\Delta(k) < 0$ $v = \pm i \sqrt{-\Delta(k)}$ le nombre d'onde k est associée à une onde atténuée et une onde amplifiée.

2.2.3. Cas Particuliers

*) Kelvin-helmholtz classique: simple nappe de vorticité ($\sigma=0, g=0, \rho_1=\rho_2$) toujours instable

onde progressive nondispersive de vitesse $(U_1+U_2)/2$ et dont le taux d'amplification est proportionnel au cisaillement

$$\omega = k(U_1+U_2)/2 \pm i k(U_1-U_2)/2$$

L'état de base, la nappe plane, est toujours instable

*) Kelvin-Helmholtz avec tension de surface ($g=0$) toujours instable

$$\frac{\sigma k^2 |k|}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_2 - U_1)^2 k^2 = \Delta(k)$$

On a un k_c de coupure $k_c = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2) \sigma} (U_2 - U_1)^2$

Si $k > k_c$: la tension de surface stabilise les petites longueurs d'ondes

si $k < k_c$: le cisaillement déstabilise l'écoulement (si $k > 0$ on retrouve KH pur)

*) Kelvin-Helmholtz avec gravité ($\rho_1 > \rho_2$, $\sigma=0$) toujours instable

Le fluide du bas est plus lourd que le fluide du dessus. On a instabilité si

$$(\rho_1 - \rho_2) g < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} (U_2 - U_1)^2 |k|$$

Les grandes longueurs d'ondes (k faible) sont stabilisées par la gravité

Le cisaillement déstabilise les petites longueurs d'ondes (k grand).

*) Kelvin-Helmholtz quelconque ($\rho_1 > \rho_2$)

on a instabilité si un nombre d'onde k vérifie :

$$(\rho_1 - \rho_2) g / |k| + \sigma |k| < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} (U_2 - U_1)^2$$

Le membre de gauche (LHS) est une fonction de k . Calculons le minimum de cette fonction

$$d(\text{LHS}(k)/dk = 0 \text{ pour } k=k_c = \sqrt{((\rho_1 - \rho_2) g / \sigma)}$$

Si ce minimum $\text{LHS}(k_c)$ est plus grand que le membre de droite, il y aura instabilité *i.e.*

si

$$\text{LHS}(k_c) < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} (U_2 - U_1)^2$$

d'où une condition sur le cisaillement $U_2 - U_1$:

$$|U_2 - U_1| > ((\rho_1 - \rho_2) g / \sigma)^{1/4} \sqrt{(2(\rho_1 + \rho_2) / (\rho_1 \rho_2))} = U_c.$$

- si $|U_2 - U_1| < U_c$ le cisaillement n'est pas assez important, toutes les longueurs d'ondes sont neutres car la gravité et la tension de surface jouent dans le bon sens.

- si $|U_2 - U_1| = U_c$ déstabilisation pour $k_m = \sqrt{((\rho_1 - \rho_2) g / \sigma)}$

- si on dépasse ce seuil $|U_2 - U_1| > U_c$ on observe une instabilité: un intervalle de nombres d'ondes instables proches de k_m .

Action du vent sur les vagues: ($\rho_1=1020\text{kg/m}^3$, $\rho_2=125\text{kg/m}^3$, $\sigma=0.074$)

On obtient une vitesse critique $U_c=6,6$ m/s et $\lambda_c=2\pi/k_c=0.017$ m soit une petite longueur d'onde.

Cette approche a été introduite par Kelvin pour la production des vagues par le vent. C'est un mécanisme possible, mais il y en existe d'autres faisant intervenir la viscosité.

*) L'instabilité de Rayleigh-Taylor classique : $\rho_1 < \rho_2$, $U_1=U_2$

un fluide lourd sur un fluide léger.

Toutes les grandes longueurs d'ondes sont instables.

si $\sigma \neq 0$ les k grands sont neutres, les k petits sont amplifiés.

Dans l'expérience de la pipette proposée dans le film de Mollo Christensen, l'interface est quand même stabilisée. Pourquoi? Dans la pipette, il y a des parois, donc les longueurs d'ondes sont limitées par la largeur L de la pipette (stabilisation par confinement).

*) Cas des vagues $U_1=U_2$ et $\rho_1 \gg \rho_2$

ondes neutres se propageant à la vitesse de phase

$$\omega = \sqrt{gk}$$

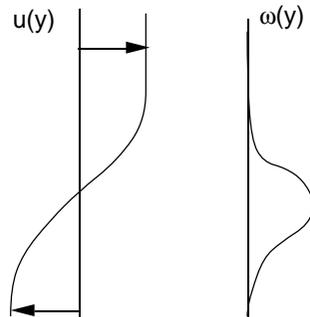
3. Stabilité d'une couche de mélange à profil de vitesse continue sans gravité.

3.1. Profil de base

Soit un profil continu $U_0(y)$ stationnaire, tendant vers deux valeurs finies $U(\infty)$ et $U(-\infty)$ en ∞ et $-\infty$ respectivement. Par un changement de repère $-(U(\infty)+U(-\infty))/2$, on obtient

une vitesse décroissant d'une valeur $u_0 = (U(\infty) - U(-\infty)) / 2$ jusqu'à la valeur opposée $(-U(\infty) + U(-\infty)) / 2$

Cet écoulement est caractérisé par une vorticité $\omega(y) = -dU_0(y)/dy$.



3.2. Perturbation du profil de base

Perturbons linéairement ce profil U_0 .

On écrit donc $\underline{u} = U_0 \underline{e}_x + \tilde{\underline{u}}$; $p = P_0 + \tilde{p}$ et on linéarise autour de l'état de base. (On oublie les tildes ...), les équations d'Euler deviennent:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + U_0(y) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{dU_0}{dy} v \underline{e}_x = -\nabla p \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

Si on projette sur les axes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U_0(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dU_0}{dy} v &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U_0(y) \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

L'incompressibilité nous suggère d'introduire une fonction de courant $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

L'élimination de la pression conduit à:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad \text{en } +\infty \quad \text{et en } -\infty. \end{aligned}$$

3.3. L'équation de Rayleigh

Les coefficients de cette EDP sont invariants en temps et en x. Nous cherchons donc des modes sous la forme de modes normaux

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{-i\omega t + ikx}$$

On en déduit une équation pour $\phi(y)$. C'est l'équation de Rayleigh ($c = \omega/k$)

$$\begin{aligned} (U_0(y) - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - k^2 \phi \right) - \frac{d^2 U_0(y)}{dy^2} \phi &= 0 \\ \phi &= 0 \quad \text{en } \pm \infty. \end{aligned}$$

Cette équation est valable pour des fluides parfaits en écoulement parallèle.

La vitesse est obtenue par (on note par des primes la dérivation en y) :

$$(u, v) = (\phi', -ik \phi) e^{-i\omega t + ikx}$$

La pression vérifie:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dU_0}{dy} v = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En utilisant l'expression des modes normaux et en confondant par abus de notations, p et $p e^{-i\omega t + ikx}$, il vient

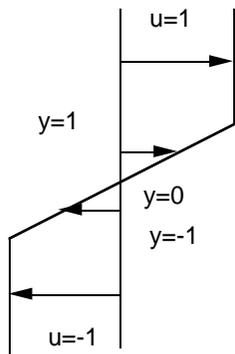
$$p = (c - U_0) \phi' + U_0' \phi.$$

3.4. Résolution dans le cas de profils particuliers.

3.4.1. Cas du profil linéaire par morceaux

Considérons un profil linéaire par morceaux (l'approximation utilisée par Rayleigh lui-même en 1880).

On adimensionne la vitesse avec $U(\infty)$ et on fait varier la vitesse linéairement sur une distance $2d$. Le profil étudié a donc la forme suivante:



L'équation de Rayleigh se simplifie dans chaque secteur puisque $U_0''=0$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) = 0,$$

Elle se résout dans chaque région comme une somme d'exponentielles:

*) $y > 1$: $\phi = B_+ e^{-ky}$

*) $1 > y > -1$: $\phi = A e^{ky} + B e^{-ky}$

*) $-1 > y$: $\phi = A_- e^{ky}$

Les exponentielles croissant en $\pm\infty$ ont été omises: le comportement des perturbations devant décroître à l'infini.

La distribution des vitesses de base n'étant pas dérivable en $y=1$ et $y=-1$, il est nécessaire d'imposer des relations supplémentaires sur ces interfaces où l'on ne peut utiliser l'équation de Rayleigh. Ces interfaces perturbées seront notées:

$$y=1+\eta_+ \quad \text{et} \quad y=-1+\eta_-$$

avec

$$\eta_+ = h_+ e^{-i\omega t + ikx} \quad \text{et} \quad \eta_- = h_- e^{-i\omega t + ikx}$$

Il reste donc 6 constantes à déterminer.

3.4.1.1. Relations de saut pour la vitesse:

La surface $(F(x,y,t)=y-\eta(x,t)=0)$ est matérielle. Les points de cette surface sont entraînés à la vitesse du fluide. De manière identique au calcul pour la nappe de vorticité, on a en $y=1+\eta_+$ les relations

$$\partial\eta_+ / \partial t + u_1 \partial\eta_+ / \partial x = v_1$$

$$\partial\eta_+ / \partial t + u_2 \partial\eta_+ / \partial x = v_2$$

et en $y=-1+\eta_-$ les relations

$$\partial\eta_- / \partial t + u_1 \partial\eta_- / \partial x = v_1$$

$$\partial\eta_- / \partial t + u_2 \partial\eta_- / \partial x = v_2$$

Ce couplage interface-champs de vitesse sur l'interface produit des termes non linéaires. On doit linéariser ces relations puisque l'on a déjà linéarisé l'équation de quantité de mouvement. En utilisant l'expression des modes normaux on a les relations

$$(U_0(1^+)-c)(ik h_+) = -ik \phi(1^+) \quad \text{en} \quad y=1^+ \quad \text{et}$$

$$(U_0(1^-)-c)(ik h_-) = -ik \phi(1^-) \quad \text{en} \quad y=1^-$$

Ceci nous donne une relation entre h_+ et ϕ et une relation de saut sur ϕ qui s'écrit (la notation $[f]$ désigne $[f]=f(1^+)-f(1^-)$) :

$$\left[\frac{\phi}{(U_0-c)}\right] = 0$$

On a une relation identique en $y=1^+$ et $y=1^-$

N.B.

On retrouve cette condition en supposant que le profil linéaire par morceaux est la limite d'un profil dérivable (on arrondit les angles!). La pression vérifiée dans la région située entre $1-\epsilon$ à $1+\epsilon$

$$p/(c-U_0)^2 = \phi/(c-U_0) + U_0' \phi / (c-U_0)^2 = d(\phi / (c-U_0)) / dy.$$

Si on intègre localement de $1-\epsilon$ à $1+\epsilon$, il vient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} p / (c-U_0)^2 dy = [\phi / (c-U_0)]$$

or puisque $p/(c-U_0)$ est régulier, la contribution de l'intégrale est très petite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} p / (c-U_0)^2 dy = 0.$$

Ceci conduit à la discontinuité déjà introduite:

$$\left[\frac{\phi}{(U_0-c)}\right] = 0$$

3.4.1.2. Relations de saut pour la pression

La pression est continue pas de tension superficielle, on est toujours dans le même fluide!). Par conséquent on a en $y=1$ et en $y=-1$

$$[(U_0-c)\phi' - U_0' \phi] = 0.$$

3.4.1.3. équation de dispersion

Les 4 inconnues A , A , B et B . vérifient 4 équations (2 en $y=1$ et 2 en $y=-1$). La continuité de U_0 conduit à la continuité de ϕ (noter que ce n'était pas le cas pour la nappe de vorticité) en $y = 1$ et $y = -1$:

*) $y > 1$:

$$\phi = (A e^k + B e^{-k}) e^k e^{-ky}$$

*) $1 > y > -1$:

$$\phi = A e^{ky} + B e^{-ky}$$

*) $-1 > y$

$$\phi = (A e^{-k} + B e^k) e^k e^{ky}$$

Ecrivons $[(U_0 - c)\phi' - U_0' \phi] = 0$.

En $y=1$, la discontinuité de ϕ' , liée à la discontinuité de U_0' :

$$(1-c)(-k)(A e^k + B e^{-k}) - 0 = (1-c)(k)(A e^k - B e^{-k}) - (A e^k + B e^{-k})$$

en $y=-1$, la discontinuité de ϕ' , liée à la discontinuité de U_0' :

$$(-1-c)(k)(A e^{-k} + B e^k) - 0 = (-1-c)(k)(A e^{-k} - B e^k) - (A e^{-k} + B e^k)$$

A et B vérifient le système:

$$(2k(1-c)-1)e^k A - B e^{-k} = 0$$

$$A e^{-k} + (-2k(1+c)+1)e^k B = 0$$

Il sont nuls sauf si le déterminant s'annule. On obtient ainsi la relation de dispersion:

$$4\omega^2 - ((2k-1)^2 - e^{-4k}) = 0$$

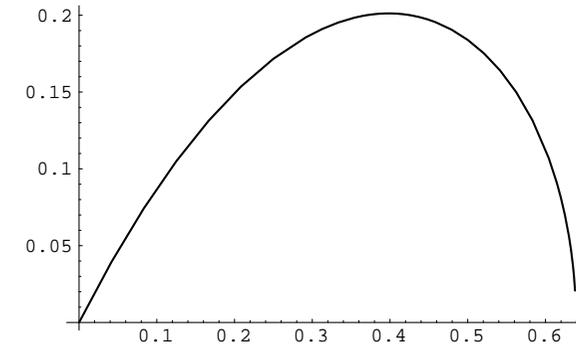
3.4.1.4. résolution finale

L'écoulement est toujours instable.

En effet posons $k_c \sim 0.6397$ qui vérifie $(2k-1)^2 = e^{-4k}$.

Pour $k < k_c$ on a $((2k-1)^2 - e^{-4k}) < 0$ ω est imaginaire pur et les nombres d'onde sont amplifiés avec un taux de croissance $\omega_i = (1/2) \sqrt{-(2k-1)^2 + e^{-4k}}$

Plot[1/2 Sqrt[(-(2 k - 1)^2 + E^(-4 k))], {k, 0, 1}]



tracé de σ pour $k < k_c$

Pour $k > 0$, le développement de ω_i donne:

$$\omega_i = (1/2) \sqrt{-1 + 4k - 4k^2 + 1 - 4k + 16k^2/2}^{1/2} + \dots = k$$

On retrouve le résultat de la nappe de vorticité puisque la relation de dispersion

$$(-1-c)^2 + (1+c)^2 = 0$$

conduit à $c = \pm i$ ou encore $\omega_i = \pm k$.

Pour une longueur d'onde grande, la couche est en effet infiniment mince à cette échelle et on retrouve un saut de vitesse.

La présence d'une région de transition introduit une échelle de longueur. Dans ce cas, on met en évidence une fréquence de coupure, au-delà de laquelle les longueurs d'onde sont stables.

Le maximum d'amplification se situe en $k=0.398$ et vaut 0.201. Cette longueur d'onde sera la plus dangereuse car la plus amplifiée.

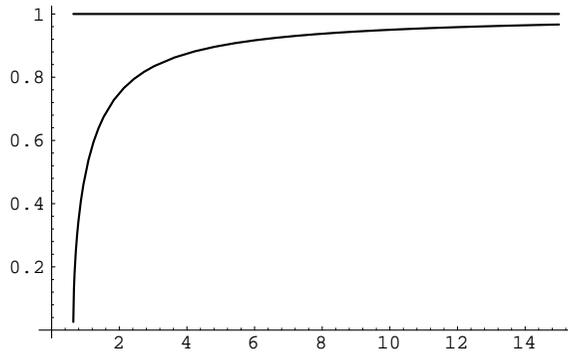
-- Pour $k > k_c$ on a $((2k-1)^2 - e^{-4k}) > 0$, donc ω est réel:

$$c_r = (1/(2k)) \sqrt{(2k-1)^2 - e^{-4k}}$$

$$c_i = 0$$

Il n'y a plus d'amplification, les petites longueurs d'onde sont stables.

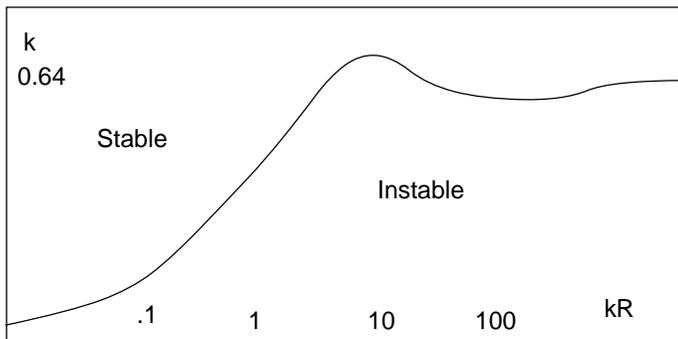
c_r tend vers 1 lorsque $k \rightarrow \infty$



tracé de c pour k>kc

3.4.1.5. Remarque

Si on introduit la viscosité, la résolution est plus complexe... Le résultat est sur la figure ci-dessous où k est tracé en fonction de kR.



La courbe neutre a l'allure précédente, on retrouve pour $kR \gg 1$ la valeur 0.64.

3.4.2. Cas du profil en tangente hyperbolique

3.4.2.1. La méthode de tir: idée générale

En général, on ne sait pas résoudre à la main un profil quelconque. On résout alors l'équation de Rayleigh numériquement pour un profil donné U_0 . Plusieurs méthodes sont possibles, la plus simple est la méthode de tir. Nous allons la mettre en œuvre pour $U = \text{th}(y)$.

Dans la méthode de tir présentée ci-dessous, on fixe k et on cherche c.

La première difficulté provient du fait que les conditions aux limites sont exprimées aux bornes ($\pm\infty$). Nous réduisons le domaine entre Y_{\min} négatif et Y_{\max} positif grands en valeur absolue mais finis. Si on examine le comportement de l'équation de Rayleigh, pour $y \rightarrow \pm\infty$, elle devient:

$$\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) = 0,$$

donc si $y \rightarrow -\infty$, ϕ se comporte comme e^{ky} et ϕ'/ϕ se comporte comme k. En revanche, si $y \rightarrow \infty$, ϕ'/ϕ se comporte comme -k. Ce sont les conditions à imposer en Y_{\min} et Y_{\max} .

Ensuite on réécrit l'équation

$$(U_0(y)-c) \left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) - \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} \phi = 0$$

sous forme d'un système

$$\begin{aligned} \phi' &= \psi \\ \psi' &= \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} \phi / (U_0(y)-c) + k^2\phi. \end{aligned}$$

de manière à le résoudre numériquement par la méthode de Runge Kutta 4. Mais cette méthode ne permet de résoudre que des problèmes aux valeurs initiales. Deux conditions aux limites doivent être données en $y=Y_{\min}$. On se donne donc $\phi(Y_{\min})$ et $\phi'(Y_{\min})$: par exemple $\phi(Y_{\min})=1$ et $\phi'(Y_{\min})=k$ (on est dans la région en exponentielle croissante).

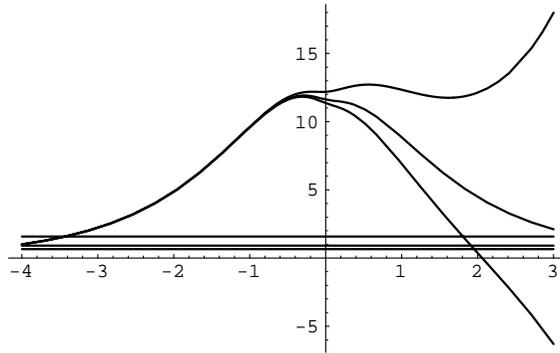
Ensuite, à k et c donnés, on intègre pour y croissant jusqu'à Y_{\max} . La bonne solution devrait être telle que $-\phi'(Y_{\max})/(k\phi(Y_{\max}))$ soit égale à 1 (on est dans la région de l'exponentielle décroissante).

En général, si on a mal choisi le paramètre c, $\phi(Y_{\max})$ est non nul! On change donc la valeur de c: La cible à atteindre sera la valeur $-\phi'(Y_{\max})/(k\phi(Y_{\max})) = 1$. A chaque tir, on réajuste donc la valeur de c de manière à approcher le plus possible $-\phi'(Y_{\max})/(k\phi(Y_{\max}))$ de 1. Il s'agit donc d'un processus itératif.

Mathematica permet de simplifier la résolution: il se charge de RK4 par `NDSolve[]`.

```
U0= Tanh[y];
UII0=D[U0,y,y];
ff[k_,c_]:=Block[{rai,ymx},
ymx=3;
rai=(U0-c) (f'[y] - k^2 f[y]) - UII0 f[y];
solF=NDSolve[{ rai==0, f[-5]==1, f'[-5]==k}, f, {y, -5, ymx}][[1]];
Return[ -Evaluate[f'[ymx]/.solF]/(Evaluate[f[ymx]/.solF] k)
];
]
```

On trace la solution (partie réelle et imaginaire) à $k=8$ fixé, pour différentes valeurs de c: $c=0+.1i$ puis $0+.135i$ puis $0+.2i$.



trois tirs: évolution de $\text{Re}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ pour $c=0+.1i / 0+.135i / 0+.2i$.

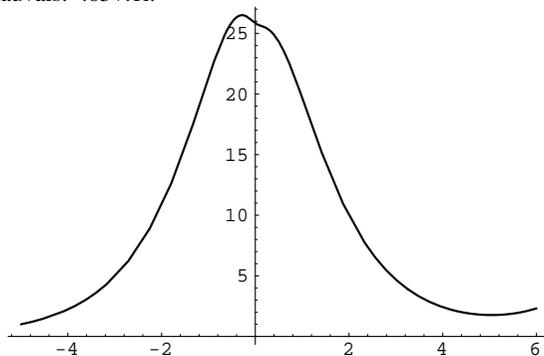
Par essai erreur, on voit que $c=0+.135i$ est un bon tir...

Pour systématiser, on met en œuvre une méthode de Newton pour construire une suite de "c", à k fixé, telle que l'on se rapproche de la cible...

Pour $k=0.8$, *Mathematica*, par l'instruction `FindRoot[]`, résout numériquement le problème:

```
ap8=FindRoot[ff[.8,x ]==1,{x,.12 I ,.14 I}]
{x -> 0.000016592820008423 + 0.1346411970199418*I}
```

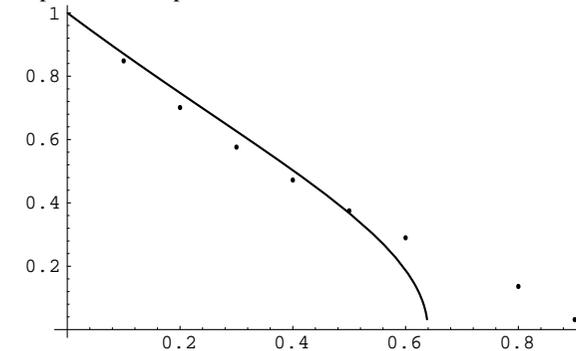
On fait ensuite varier k, et on trouve les c *ad hoc*. Cette méthode est assez efficace, mais il y a des problèmes liés par exemple à la taille du domaine. Par exemple le calcul suivant est effectué pour $k=0.8$ partant de $Y_{\min}=-5$ et s'arrête en $Y_{\max}=6$. Si on avait arrêté le calcul en $Y_{\max}=3$, on aurait $-\varphi'/(k\varphi)=.93+0.07i$, donc pas mal; mais si on arrête en $Y_{\max}=4$, alors $\varphi'/(k\varphi)=.08+0.21i$, ce qui est un moins bon tir; en $Y_{\max}=6$ c'est franchement mauvais: $-.63+.1i$.



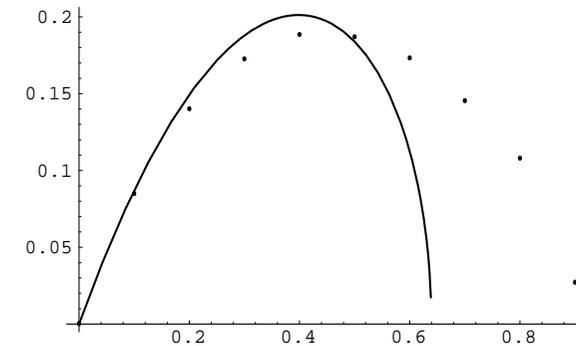
Les méthodes de tir sont donc séduisantes, mais délicates...

3.4.2.3. résultats

On porte sur les graphiques suivants σ en fonction de k et c_i en fonction de k pour le profil $\text{th}(y)$ et le profil continu par morceaux.



c_i en fonction de k, trait: profil linéaire, points: $\text{th}(y)$.

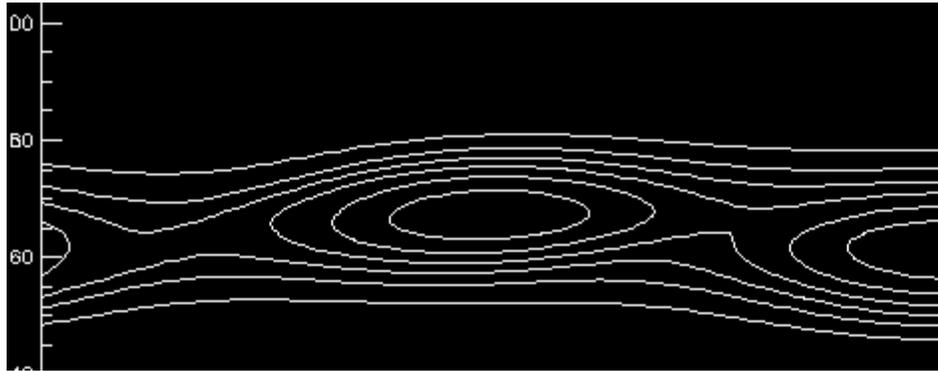


tracé de σ pour $k < k_c$, trait: profil linéaire, points: $\text{th}(y)$.

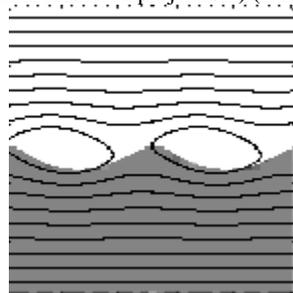
L'allure générale est la même, le comportement est linéaire en 0, et le confinement introduit une fréquence de coupure.

4. 5.Exemples de simulations numériques:

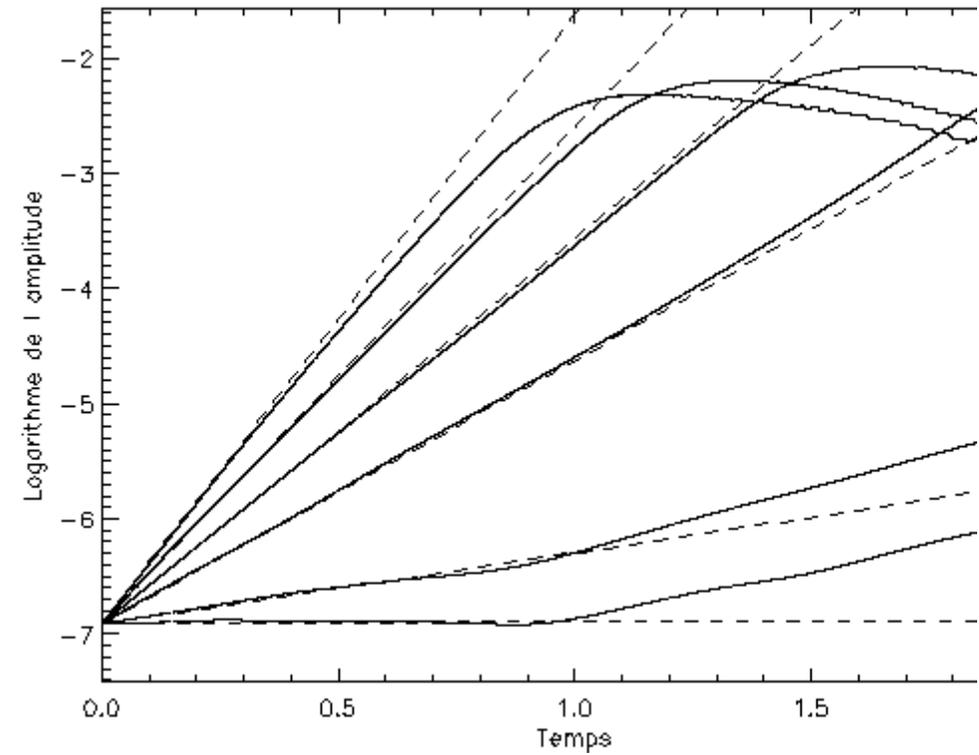
- Il s'agit d'une couche de cisaillement en tangente hyperbolique résolue par un calcul Navier Stokes pseudo Spectral (V. Herbert), Le mode le plus instable est injecté, et on observe par la suite l'appariement des tourbillons.



- Kelvin-Helmholtz à l'interface de deux fluides de densités différentes (un code Navier-Stokes en différences finies et méthode de projection) (J. Li).

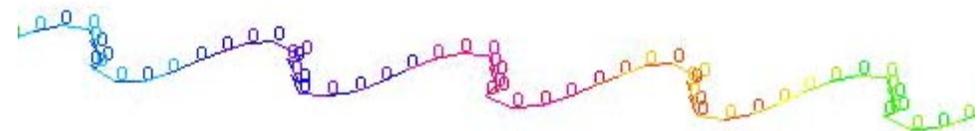


Si on trace le log de l'amplitude d'une perturbation sinusoidale au temps $t=0$

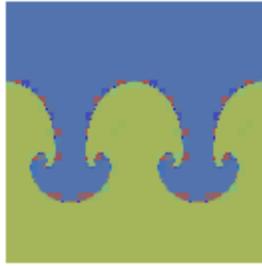


On observe l'accroissement exponentiel puis la saturation non linéaire...

Assemblée de Vortex ponctuels: on considère une nappe de vorticité comme un ensemble de vortex ponctuels.



- Rayleigh Taylor avec un code NS différences finies et méthode de projection (J. Li).



5. Critère de Rayleigh

énoncé

Une condition nécessaire à l'apparition de perturbations infinitésimales amplifiées est que le profil des vitesses de base U_0 possède un point d'inflexion, ou de manière équivalente la vorticité présente un extrémum.

démonstration

Soit v un mode normal de la vitesse verticale il vérifie l'équation de Rayleigh:

$$(U_0(y)-c) \left(\frac{d^2v}{dy^2} - k^2v \right) - \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} v = 0,$$

avec des conditions de vitesse normale nulle à l'infini

A k fixé, il existe des solutions de cette équation uniquement pour certaines valeurs ω . En résolvant ce problème aux valeurs propres, on définit implicitement la relation de dispersion $\omega(k)$.

Soit v un mode instable associé à une valeur propre c de partie imaginaire positive

On multiplie par v^* son complexe conjugué on divise par $(U_0(y)-c)$ l'équation de Rayleigh puis on intègre sur le domaine transverse de $+\infty$ à $-\infty$.

$$\int \left(\frac{d^2v}{dy^2} - k^2v \right) v^* dy = \int \frac{1}{(U_0(y)-c)} \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} v v^* dy$$

Ensuite on intègre par parties:

$$-\int (|dv/dy|^2 + k^2|v|^2) dy = \int \frac{1}{(U_0(y)-c)} \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} |v|^2 dy$$

on prend la partie imaginaire de cette équation (on multiplie par $(U_0(y)-c)^*$):

$$0 = c_i \int \frac{1}{|U_0(y)-c|} \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} |v|^2 dy$$

Comme c_i est non nul par hypothèse, le terme $\frac{1}{|U_0(y)-c|} \frac{d^2U_0(y)}{dy^2} |v|^2$ doit changer de signe ce qui impose que l'écoulement cisailé possède un point tel que $U_0''=0$.

CQFD

FJØRTOFF (condition supplémentaire)

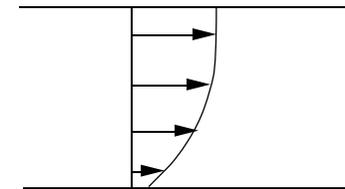
Une condition nécessaire d'instabilité est qu'il existe un point y_s qui vérifie le critère de Rayleigh dans l'intervalle d'étude et tel que:

$$U_0''(y) (U(y)-U(y_s)) < 0 \quad \text{où} \quad U_0''(y_s)=0.$$

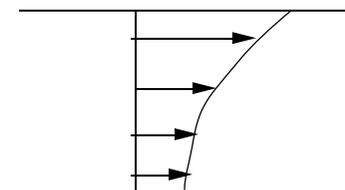
Pour les profils monotones, ce critère est équivalent à supposer que la valeur absolue de la vorticité de base atteint un maximum.

Exemples de profils $U(y)$

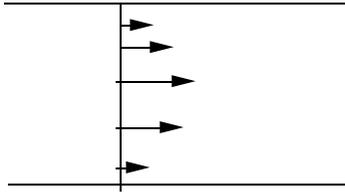
Discutons quelques profils.



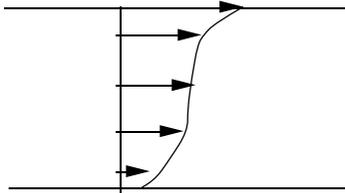
pas de $U''=0$ pas de point d'inflexion: Stable



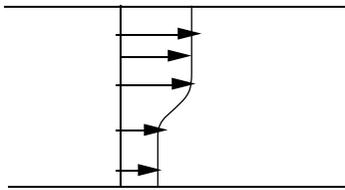
pas de $U''=0$ pas de point d'inflexion: Stable



Poiseuille: l'écoulement est stable d'après le point de vue de Rayleigh. Paradoxalement c'est la viscosité le déstabilise !



La vorticité possède un minimum: stable



Écoulement peut être instable.

Théorème de Squire

On a considéré dans ce cours uniquement des perturbations bidimensionnelles. Si on cherche des perturbations 3D, les modes normaux seront de la forme:

$$e^{i\beta z + ikx} F(y).$$

Un théorème dit de Squire démontre que si une perturbation 3D instable, de nombre d'onde k, β et un taux d'amplification ω_i , alors il existe une perturbation 2D de nombre d'onde $K = (k^2 + \beta^2)^{1/2}$ et de taux d'amplification:

$$\omega_i(K, 0) = \omega_i(k, \beta) K/k > \omega_i(k, \beta).$$

Le mode le plus instable sera donc un mode 2D.

6. Bibliographie

R. BETCHOV W. O. CRIMINALE Jr "Stability of Parallel Flows" App Math & Mech. AP 1967

DRAZIN & REID

R. E. Esch 1957 Stability of a shear layer between two parallel stream JFM pp 289-303