

chapitre 1

Cours de DEA de Mécanique Filière 2, UPMC.
Introduction à la Stabilité Hydrodynamique.
P.-Y. Lagrée & M. Rossi.

INTRODUCTION

1. bibliographie

Ouvrages généraux

- Acheson D.J. (1990), "Elementary Fluid Dynamics", Clarendon Press Oxford
- Feynman R.P. (1964) "Lectures Notes on Physics" Vol 1 Addison--Wesley Massachusetts
- Landau L., Lifchitz E. (1990). "Mécanique des fluides" MIR
- Tritton D.J.(1988), "Physical Fluid Dynamics", second edition Clarendon Press Oxford
- Van Dyke M.(1982), "An Album of Fluid Motion", The Parabolic Press Stanford, California
- E.Guyon J.P.Hulin & L. Petit (1991) "Hydrodynamique physique", interéditions éditions du CNRS.

Ouvrages sur les systèmes dynamiques

- Guckenheimer J. and Holmes P.(1983), "Nonlinear Oscillations, Dynamical System and Bifurcations of Vector Fields", Berlin, Springer Verlag,
- Bergé P., Pomeau Y. and Vidal C.(1984), "L'ordre dans le chaos, vers une approche déterministe de la turbulence", Hermann
- Manneville P.(1990), "Structures dissipatives chaos & turbulence"Aléa Saclay

Ouvrages sur les instabilités hydrodynamiques

- Chandrasekhar S.(1961), "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Clarendon Press Oxford
- Drazin P.G.and Reid W.H.(1981), "Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press

Ouvrage sur des techniques mathématiques

- Bender C.M. and Orszag S.A.(1978), "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers", Mc Graw Hill

2. Quelques exemples expérimentaux:

On présente quelques expériences simples (Couette-Taylor) et quelques visualisations tirées de la cassette de "l'Encyclopaedia Britannica" de E. Mollo-Christensen et du livre "An Album of Fluid Motion" de Van Dyke.

Dans chacun des exemples, on fait varier un paramètre (ou plutôt une "contrainte"). Le système change de structure lorsque cette contrainte dépasse un seuil, une valeur critique. La nouvelle structure a une forme précise caractérisée par une longueur d'onde.

- Couette Taylor : écoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation

Mise en évidence d'un paramètre critique au-delà duquel on obtient un écoulement, différent de l'écoulement de Couette, sous la forme d'une structure torique avec un nombre d'onde critique. La force centrifuge a déstabilisé l'écoulement original de Couette .

- Rayleigh -Taylor: un fluide lourd au-dessus d'un fluide léger.

La gravité déstabilise l'interface initialement plane séparant les deux fluides . Toutefois si on renverse un verre d'eau et si le buvard empêche les perturbations de faibles amplitudes d'apparaître, on peut imposer une interface plate et la solution de repos $u=v=0$! On contrôle les perturbations! Sur cet exemple simple, on a introduit la notion de contrôle, un domaine émergeant de la mécanique des fluides.

-Instabilité d'un jet liquide ou instabilité de Rayleigh:

Formation de gouttes par instabilité interfaciale due à la tension superficielle .

-Instabilité de convection naturelle (Instabilité de Rayleigh- Bénard). Si on chauffe une couche de fluide par le bas (de la margarine dans une poêle!), la convection s'établit dans le fluide à partir d'un certain écart de température. La viscosité et la diffusion thermique sont des facteurs stabilisants.

-Instabilité de cisaillement dans les sillages, les couches de mélange, les Jets.

-Poiseuille: la viscosité déstabilise...

Pour chacun de ces phénomènes, on introduit un nombre sans dimension. Lorsque ce dernier dépasse une valeur critique, la moindre fluctuation, toujours présente dans un système physique, est amplifiée et l'état précédent, même s'il reste solution du problème, n'est plus observé. On dit qu'il est devenu instable.

3. Un premier exemple simple.

3.1. Le pendule simple

On considère un pendule simple:

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

α est un coefficient de frottement.

ω_0 est la fréquence propre de l'oscillateur.

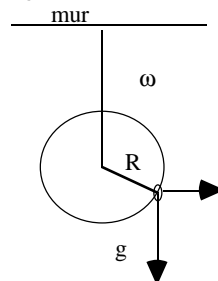
Les positions d'équilibre correspondent aux points tels que $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ i.e. dans le cas du pendule simple $\sin \theta_s = 0$

Classiquement, on sait que 0 est équilibre stable et π équilibre instable.

3.2. Le pendule simple entraîné

Avec trois morceaux de "Meccano", on peut réaliser ce pendule !!!

On fait tourner le pendule sur lui même. Sur cet exemple, la force centrifuge joue le rôle de contrainte. Que se passe-t-il lorsqu'on augmente cette dernière i.e. la vitesse angulaire.



3.3. Mise en équation et positions d'équilibre.

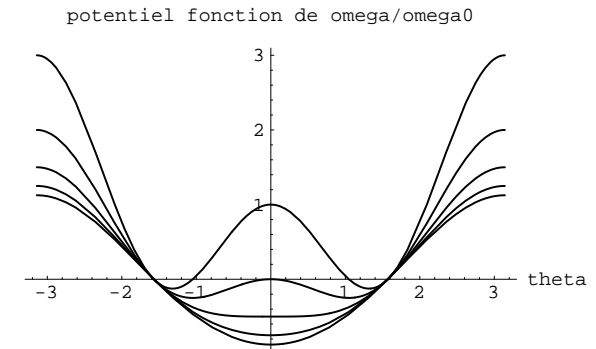
L'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$\omega_0^2 = g/R$ est la fréquence propre de l'oscillateur et ω la vitesse angulaire d'entraînement.

Le terme $-(\omega_0^2 \sin \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta)$ dérive manifestement d'un potentiel que l'on trace ci-dessous pour $\omega/\omega_0 = .25, .5, 1, 2, 4$.

```
V[w_]=Integrate[Sin[t](1-w Cos[t]),t];
Plot[{V[.25],V[.5],V[1],V[2],V[4]},{t,-Pi,Pi},
  AxesLabel->{"theta","potentiel fonction de omega/omega0"}]
```



A partir de cette figure on visualise simplement les états d'équilibre pour lesquels le potentiel atteint un extremum. Analytiquement ceux-ci sont données par:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 \cos \theta) \sin \theta = 0.$$

Comme précédemment, on a

$$\theta_s = 0 \text{ ou } \pi$$

Toutefois si $\omega/\omega_0 > 1$ une nouvelle solution apparaît

$$\theta_s = \pm \arccos((\omega/\omega_0)^{-2})$$

N.B. Dans le langage des systèmes dynamiques, on dit que $\theta_s = 0$ et π et $\pm \arccos((\omega/\omega_0)^{-2})$ sont des points fixes.

3.4. Stabilité

Que se passe-t-il si on perturbe légèrement chacune des positions précédentes?

Pour trouver l'évolution des fluctuations près de l'équilibre, on applique la technique standard de linéarisation autour de cette position. On pose:

$$\theta = \theta_s + \epsilon \Theta(t).$$

où ϵ est un petit paramètre quantifiant l'amplitude des perturbations. Après substitution de cette expression dans l'équation du mouvement, on néglige les termes au moins quadratique en ϵ . On obtient ainsi une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (une ODE Ordinary Differential Equation ou EDO en français).

***) position $\theta_s = 0$

$$\ddot{\Theta} + \alpha \dot{\Theta} + (\omega_0^2 - \omega^2)\Theta = 0,$$

La solution du problème est combinaison linéaire de deux solutions indépendantes. Les coefficients de cette équation ne dépendant pas du temps, on cherche ces deux solutions de la forme:

$$\Theta(t) = e^{\sigma t}.$$

Après substitution on trouve:

$$\sigma^2 + \alpha \sigma + \omega_0^2 - \omega^2 = 0$$

- si $\omega/\omega_0 < 1$, les deux valeurs propres réelles sont négatives si $\Delta = \alpha^2 - 4(\omega_0^2 - \omega^2) > 0$, ou imaginaires de partie réelle négative si $\Delta < 0$. La position d'équilibre est STABLE: si on la perturbe, le pendule revient en $\theta_s = 0$.

- si $\omega/\omega_0 > 1$

Il y a deux valeurs réelles de signe opposé ($\Delta > 0$ et leur produit est négatif).

En conséquence, une perturbation générique initiale croît: le pendule quitte sa position d'équilibre et n'y revient pas. La position d'équilibre est INSTABLE.

***) position $\theta_s = \arccos((\omega_0/\omega)^2)$ avec $\omega/\omega_0 > 1$

Développons le terme de "force" au voisinage de cette position d'équilibre:

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2 \cos\theta) \sin\theta = \\ & = (\omega_0^2 - \omega^2 \cos(\theta_s + \Theta \varepsilon)) \sin(\theta_s + \Theta \varepsilon) \\ & = (\omega_0^2 - \omega^2 ((\omega_0/\omega)^2 - \sin^2 \theta_s \Theta \varepsilon)) (\sin \theta_s + \Theta \varepsilon) + \dots \\ & = (\omega^2 \sin^2 \theta_s \Theta \varepsilon) + \dots \\ & = \omega^2 (1 - \cos^2 \theta_s) \Theta \varepsilon + \dots \\ & = (\omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\omega^2}) \Theta \varepsilon + \dots \end{aligned}$$

L' équation aux valeurs propres est donc:

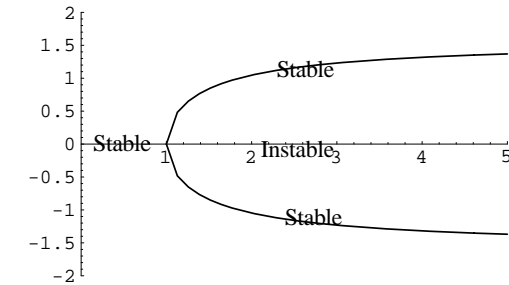
$$\sigma^2 + \alpha \sigma + (\omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\omega^2}) = 0$$

Les deux valeurs propres réelles sont négatives si $\Delta = \alpha^2 - 4(\omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\omega^2}) > 0$, ou imaginaires de partie réelle négative si $\Delta < 0$: cette position d'équilibre, qui n'existe que si $\omega/\omega_0 > 1$, est STABLE.

On trace le diagramme d'équilibre en fonction de ω/ω_0 le nombre sans dimension caractéristique du système.

```
Plot[{ArcCos[1/x],
      -ArcCos[1/x]}, {x, 1, 100}, PlotRange -> {{0, 5}, {-2, 2}},
      AxesLabel -> {" ", "positions d'equilibre"}]
```

positions d'équilibre



Positions d'équilibre en fonction du paramètre de contrôle (on n'oublie pas +/- π instable).

Lorsque la valeur du paramètre de contrôle change, la nature de la solution change de même

- si $\omega/\omega_0 < 1$ caractère univoque état/ contrainte

- si $\omega/\omega_0 > 1$ perte d'unicité et de symétrie (dans les équations la symétrie $\theta \rightarrow -\theta$)

N.B.

- au vu de la courbe d'énergie ci-dessus on aurait pu anticiper ces résultats: la cuvette en $\theta=0$ se transforme petit à petit en bosse lorsque ω/ω_0 augmente, la position $\theta=0$ devient alors instable.

- la solution $\theta=0$ existe toujours! (cf la citation de Landau, l'état est toujours solution des équations, mais il est inobservable...)

Lorsque le paramètre ω/ω_0 traverse la valeur unité le système bifurque.

Le concept de stabilité est plus général. Soit un état donné (équilibre, périodique, non régulier) On le perturbe, que se passe-t-il et pour quel type de perturbation?

4. Calculs numériques:

On résout par une méthode de Runge Kutta à l'ordre 4, une technique classique et facile à mettre en oeuvre - ce qui explique son succès pour les équations différentielles ordinaires avec conditions initiales-. On pose $\theta(t)=u(t)$ et $u'(t)=up(t)$, et on réécrit le système

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta - \omega^2 \sin\theta \cos\theta = 0,$$

sous la forme d'un système du premier ordre en temps:

$$u' = up$$

$$up' = -\alpha up - \omega_0^2 \sin u - \omega^2 (\sin u) (\cos u).$$

ou
 $u' = FF1(u, up, t)$
 $up' = FF2(u, up, t)$.

Le coeur du programme est donc une boucle:

```
for(itt=1;itt<ittmax;itt++)
{
/* Runge Kutta 4 */
du1 =dt*FF1(u      ,up      ,t);
dup1=dt*FF2(u      ,up      ,t);
du2 =dt*FF1(u+du1/2,up+dup1/2,t+dt/2);
dup2=dt*FF2(u+du1/2,up+dup1/2,t+dt/2);
du3 =dt*FF1(u+du2/2,up+dup2/2,t+dt/2);
dup3=dt*FF2(u+du2/2,up+dup2/2,t+dt/2);
du4 =dt*FF1(u+du3  ,up+dup3  ,t+dt  );
dup4=dt*FF2(u+du3  ,up+dup3  ,t+dt  );
u =u +(du1 /6 +du2 /3 +du4 /6);
up=up+(dup1/6 +dup2/3 +dup4/6);
t=t+dt;
}
```

Exemple de RUN:

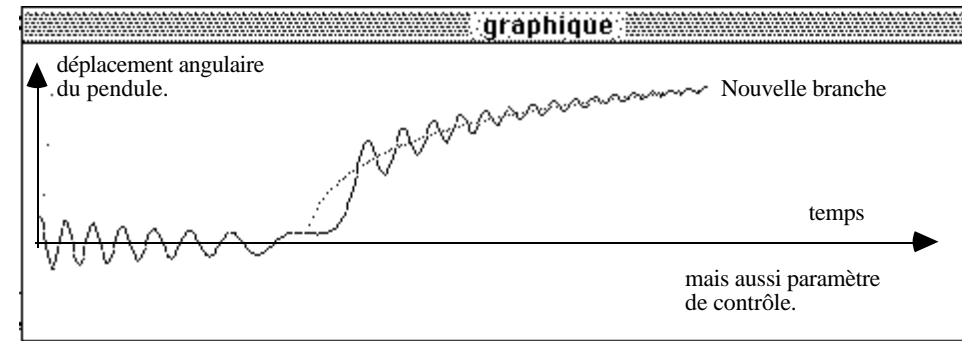
```
printf(" Resolution du pendule force          \n");
printf(" 2                                     \n");
printf(" d u      du                               \n");
printf(" --- + lbd -- + k sin(u) - omega sin(u) cos(u) \n");
printf(" 2      dt                                     \n");
printf(" dt                                           \n");
printf("                                           \n");
avec
lbd=.30;
k=(2*Pi)*(2*Pi);
```

Quelques exemples

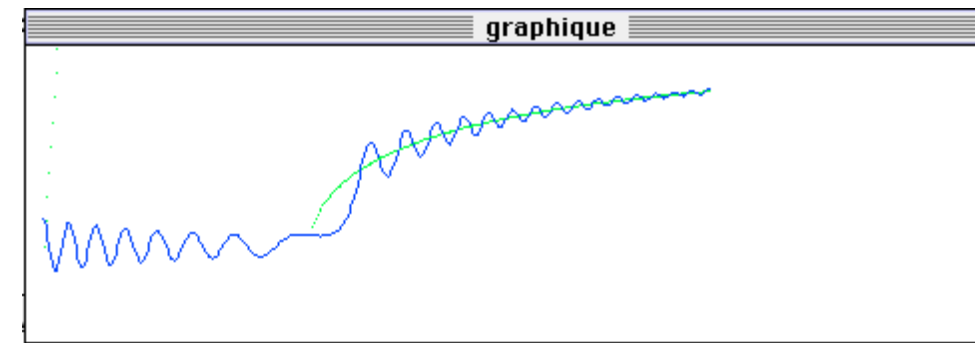
On impose au temps $t=0$ un déplacement sans vitesse

```
u=.2;
up=.0;
```

Dans la simulation, le paramètre de contrôle ω/ω_0 varie lentement et linéairement en fonction du temps de telle manière que l'évolution de l'oscillateur peut être comprise en partie par une analyse quasi statique.



On observe l'évolution de la position en fonction du temps: l'oscillation de retour à l'équilibre (pour les 7 premières oscillations) et ...

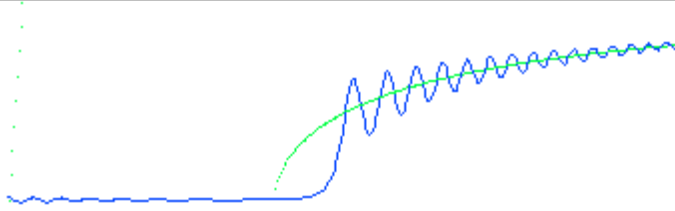


le saut sur la nouvelle branche lorsque la vitesse angulaire a passé le seuil (noter toutefois un retard). On observe ensuite des oscillations autour de cette branche.

- Simulation avec une amplitude de départ très petite.

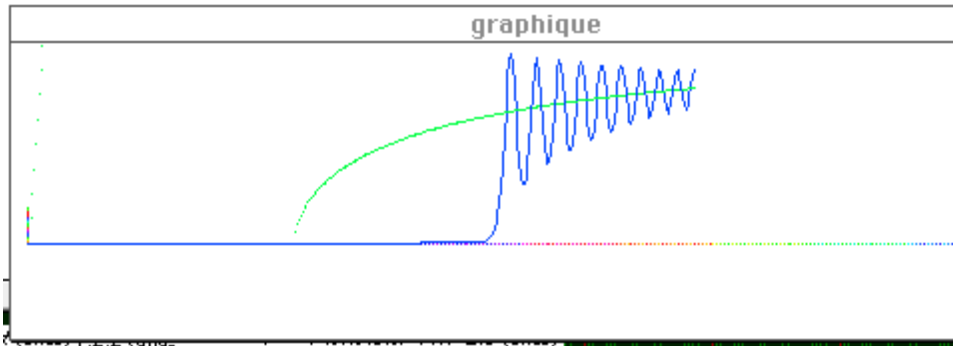
Le pendule retourne à l'équilibre $\theta=0$ avant que la vitesse angulaire ne dépasse la fréquence propre, puis s'éloigne exponentiellement de la branche $\theta=0$ et oscille autour de la nouvelle branche.

graphique



Un autre avec $u(0)=.000000000001$ très petit, $u_p(0)=0$, le pendule reste longtemps en zéro avant de sauter sur la deuxième branche.

graphique



Cet exemple très simple est riche en enseignements: il contient tous les ingrédients du cours... à méditer donc.

v1 Octobre 95
v3 Sept 97