

## 1 An example from Fluid Mechanics

### 1.1 Problem

Nous nous proposons d'étudier un écoulement de fluide visqueux incompressible qui constitue une solution exacte des équations de Navier- Stokes (see Paterson [16] and Kundu as well [13]). L'écoulement proposé est assez peu réaliste physiquement mais permet une résolution mathématique complète et instructive. Il s'agit d'étudier un écoulement plan (bidimensionnel, on suppose qu'il

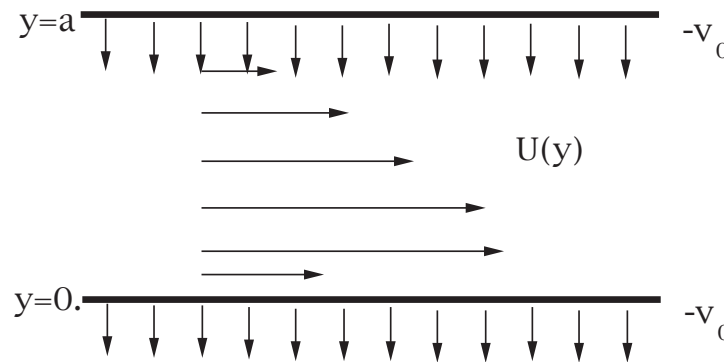


Figure 1: A 2D channel flow with suction at the lower wall and blowing at the upper.

n'y a pas de vitesse suivant  $z$ ) stationnaire et incompressible d'un fluide homogène de densité volumique  $\rho$  constante et de viscosité dynamique  $\nu$ . L'écoulement s'effectue entre les parois d'un canal constitué de deux plaques planes séparées d'une épaisseur  $a$ . Ces deux parois sont "poreuses", et celle du dessus (en  $y = a$ ) émet de manière uniforme et stationnaire le même fluide que celui qui circule, et ce en tout point de la paroi; cette émission de fluide se traduit par le fait que la vitesse transverse  $v$  est imposée à la paroi et vaut  $-v_0$  (nous désignerons par la suite  $v_0$  sous le nom élégant de "vitesse de transpiration"). De même, la paroi inférieure (en  $y = 0$ ) aspire le fluide avec un débit identique, la vitesse transversale sur la paroi inférieure est donc  $-v_0$ . L'écoulement est créé par un gradient de pression longitudinal (suivant  $x$ ) que l'on note  $k$  et qui est nécessaire pour produire un mouvement longitudinal.

### 1.2 Direct resolution:

Le problème est manifestement invariant par translation en  $x$ , nous chercherons donc une solution sous la forme:

$$\vec{u}(x, y, z) = U(y) \vec{e}_x + V(y) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z.$$



Figure 2: Basic Poiseuille profile, [click on the Image] to see the effect of aspiration

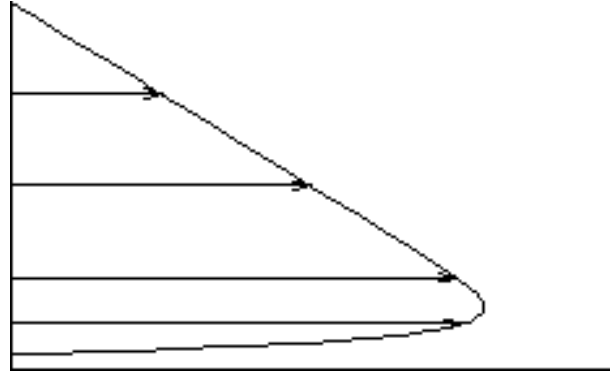


Figure 3: The profile with strong suction at the lower wall and blowing at the upper. [click on the Image] to see the effect of aspiration.

En écrivant les conditions aux limites de problème (sur les deux parois), puis en écrivant que le fluide est incompressible, on montre que l'on obtient l'expression de la vitesse transverse:

$$V(y) = -v_0.$$

En écrivant les équations de Navier- Stokes dans le cas présent, on voit que la pression ne dépend effectivement nécessairement que d'une des variables spatiales;

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \text{ donc } p(x) = -kx + P_0$$

Elles se réduisent à une seule équation différentielle (12) pour  $U(y)$ :

$$-v_0 \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1)$$

La résolution compte tenu des conditions d'adhérence en haut et en bas nous donne:

$$U(y) = \frac{ka}{\rho v_0} \left( -\frac{y}{a} + \left( \frac{1 - \exp(-v_0 y / \nu)}{1 - \exp(-v_0 a / \nu)} \right) \right)$$

Il y a en fait plusieurs vitesses caractéristiques pour ce problème:  $v_0$ ,  $(\frac{ka^2}{\rho\nu})$ . On peut faire apparaître différents nombres sans dimension qui caractérisent ce problème.

### 1.3 Non dimensional equation

Posons  $y = a\bar{y}$  et  $u = U_0\bar{u}$ . jouons toujours le jeu de la méconnaissance de la solution exacte. On ne connaît pas  $U_0$  pour l'instant. On adimensionne l'équation:

$$-(v_0 a / \nu) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = ka^2 / (\rho\nu U_0) + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2)$$

si on prend  $U_0 = ka^2/\rho\nu$  ce choix nous permet de voir que si l'on pousse le fluide, et que l'on l'aspire légèrement, le bon paramètre décrivant l'aspiration est  $(v_0a/\nu)$ . L'équation sans dimension à résoudre est donc:

$$-(v_0a/\nu) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = 1 + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3)$$

Avec  $\bar{U}(0) = \bar{U}(1) = 0$ .

#### 1.4 Light suction/blowing

L'équation à résoudre dépendant d'un petit paramètre est donc:

$$\bar{U}'' + \varepsilon \bar{U}' + 1 = 0, \text{ et } \bar{U}(0) = \bar{U}(1) = 0$$

On vérifie alors facilement que le problème d'aspiration légère sur un écoulement de Poiseuille est bien un problème régulier puisque la solution à  $\varepsilon = 0$  est :

$$\frac{\bar{y}}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2}$$

on perturbe à l'ordre  $\varepsilon$  cette solution de Poiseuille (cf figure 5.2):  $\bar{U} = \frac{\bar{y}}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} + \varepsilon \bar{u}_1 + \dots$  on substitue dans l'équation de départ  $\bar{U}'' + \varepsilon \bar{U}' + 1 = 0$  et on trouve l'ordre suivant, qui vérifie

$$\bar{u}_1'' + 1/2 - \bar{y} = 0 \text{ et } \bar{u}_1(0) = \bar{u}_1(1) = 0$$

c'est à dire l'influence de la légère aspiration sur le profil de Poiseuille se traduit par la perturbation de vitesse:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{y}^3}{6} - \frac{\bar{y}^2}{4} + \frac{\bar{y}}{12}$$

etc. On peut continuer à l'ordre suivant!!!

En développant la solution exacte (qu'encore une fois on connaît car le problème est simple) qui est

$$\bar{U}_{exacte} = -\frac{-e^\varepsilon \bar{y} + \bar{y} + e^\varepsilon - e^{\varepsilon - \varepsilon \bar{y}}}{\varepsilon - \varepsilon e^\varepsilon}$$

on vérifie maintenant que tout va bien:

$$\bar{U}_{exacte} = -\frac{-e^\varepsilon \bar{y} + \bar{y} + e^\varepsilon - e^{\varepsilon - \varepsilon \bar{y}}}{\varepsilon - \varepsilon e^\varepsilon} = \left(\frac{\bar{y}}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2}\right) + \left(\frac{\bar{y}^3}{6} - \frac{\bar{y}^2}{4} + \frac{\bar{y}}{12}\right)\varepsilon + \dots$$

On retrouve bien la solution de Poiseuille plus la perturbation  $\bar{u}_1$ . On en déduit que le problème d'aspiration légère est régulier. On voit que le profil se déplace vers la paroi aspirée.

### 1.5 Strong suction/blowing

Cette fois on prend  $U_0 = ka/\rho/v_0$  ce choix nous permet de voir que si l'on pousse le fluide, et que l'on l'aspire fortement le bon paramètre décrivant l'aspiration est encore  $(v_0a/\nu)$ , mais cette fois  $\varepsilon = \nu/(av_0)$ . L'équation à résoudre dépendant d'un petit paramètre est donc:

$$\varepsilon \bar{U}'' + \bar{U}' + 1 = 0$$

Avec toujours  $\bar{U}(0) = \bar{U}(1) = 0$ . L'aspiration déforme le profil de Poiseuille (7).

#### 1.5.1 case $\varepsilon = 0$

On commence par résoudre à  $\varepsilon = 0$ , on trouve:

$$\bar{U} = 1 - \bar{y}.$$

Seule la condition à la limite en  $\bar{y} = 1$  est prise en compte. Il y a un problème en  $\bar{y} = 0!!!$  La vitesse glisse sur la paroi à une valeur  $\bar{U}(0) = 1$  alors qu'elle devrait être nulle. On appelle cette solution "solution extérieure". Le problème est donc singulier puisque près de la paroi ça ne marche plus. Il se passe quelque chose de rapide près de la paroi.

#### 1.5.2 Boundary layer "inner solution"

Pour satisfaire la condition à la paroi, il faut changer d'échelle, en fait près de la paroi, la vitesse va varier beaucoup pour passer de 0 à 1. Cette variation très forte fait que le terme  $\varepsilon \bar{U}''$  n'est plus négligeable.

On va donc poser  $\tilde{U} = \bar{U}$  et  $\bar{y} = \delta \tilde{y}$ . avec  $\delta \ll 1$ . En substituant avec ces nouvelles échelles:

$$\varepsilon \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{y}^2} + \frac{1}{\delta} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} + 1 = 0$$

Dans notre nouvelle description,  $\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}}$  est d'ordre un, la vitesse varie tranquillement. En revanche  $\frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{y}^2}$  est très grand. Son ordre de grandeur est  $\frac{1}{\delta}$ . Si on examine l'équation, on voit que le troisième terme est vraisemblablement négligeable par rapport au second. Le premier est tel que la dérivée seconde est très grande (en  $\frac{1}{\delta^2}$ ). Mais elle est multipliée par un terme petit.

On introduit ici encore le Principe de Moindre dégénérescence: on veut garder le maximum de termes on va donc garder le terme que l'on avait perdu, et en récupérer le maximum dans les autres. On choisit

$$\varepsilon \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\delta} \text{ soit } \delta = \varepsilon$$

L'équation devient

$$\frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{y}^2} + \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{y}} = 0$$

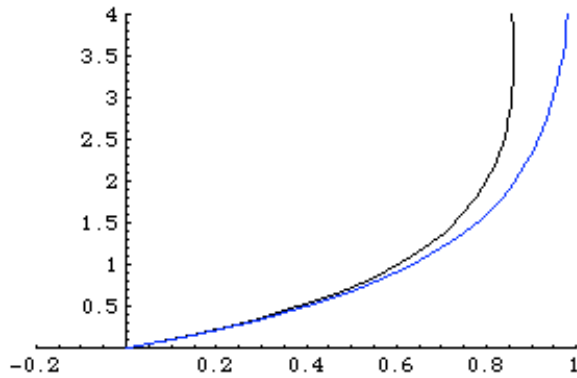


Figure 4: The profile seen in the boundary Layer scales, for increasing suction [Adobe / QuickTime]

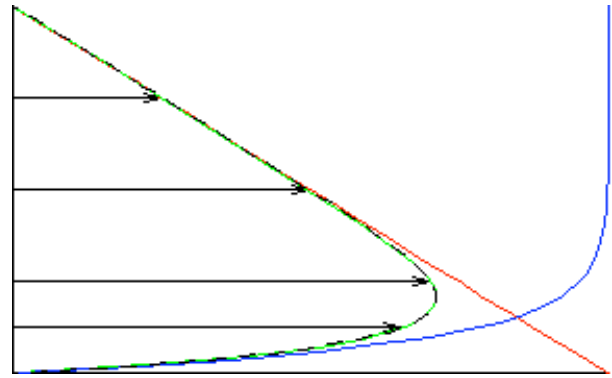


Figure 5: Composite and exact solutions seen in the 0(1) scales for increasing suction [Adobe / QuickTime].

On trouve facilement  $\tilde{U} = A(1 - e^{-\tilde{y}})$  qui est la solution qui satisfait  $\tilde{U}(0) = 0$ . Cette condition en 0 est la raison pour laquelle on a fait ce travail. Mais on a une solution avec une constante indéterminée  $A$ .

### 1.6 Matching

On introduit alors le dernier ingrédient qui est le raccord asymptotique et qui s'énonce ainsi:

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow 0} \bar{U}(\bar{y}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{U}(\tilde{y})$$

La limite lorsque l'on se rapproche de la paroi de la valeur de la "solution extérieure" et la valeur à l'infini de la "solution intérieure".

En pratique, cela donne la vitesse de glissement  $\bar{U}(0) = 1$  que l'on doit égaler à la vitesse  $\tilde{U}(\tilde{y})$  prise à l'infini, i.e.  $\tilde{U}(\infty) = A$ . Donc  $A = 1$  la vitesse dans la couche intérieure dilatée est donc:

$$\tilde{U} = (1 - e^{-\tilde{y}}).$$

Ainsi on a trouvé la solution en décomposant le domaine en deux régions. Une première où on est à l'échelle normale. Une seconde où on est à une échelle plus petite. On passe ensuite d'une région à l'autre par le "raccord".

### 1.7 Composite Expansion

Comme on vient de le remarquer, ces deux solutions précédentes sont valables dans deux domaines différents:

$$1 \geq \bar{y} > 0 \text{ on a } \bar{U} = 1 - \bar{y}$$

---

## Multiscale Hydrodynamic Phenomena

---

$$\infty > \tilde{y} \geq 0 \text{ on a } \tilde{U} = (1 - e^{-\tilde{y}})$$

On peut réconcilier les deux descriptions en posant:

$$\bar{U}_{composite} = \bar{U}(\bar{y}) + \tilde{U}(\bar{y}/\varepsilon) - \bar{U}(0)$$

ce qui donne

$$\bar{U}_{composite} = 1 - \bar{y} + (1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon}) - 1$$

Sur la figure 9 on représente en pointillé la solution exacte et en vert la solution composite. On voit qu'elles sont très proches l'une de l'autre.

### 1.8 For the "Saint Thomas"

"Saint Thomas" is a guy who believes only what he sees (in english "Doubting Thomas" a skeptic guy). On prend la solution exacte de l'équation différentielle:

$$\bar{U}_{exacte} = -\bar{y} + \frac{(1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon})}{(1 - e^{-1/\varepsilon})}$$

lorsque  $\bar{y}$  est fixé et que l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on trouve alors:

$$\bar{U}_{exacte} \simeq -\bar{y} + \frac{(1 - 0)}{(1 - 0)} = 1 - \bar{y}$$

On retrouve la solution extérieure précédente.

Si maintenant on garde  $\bar{y}/\varepsilon$  fixé et que l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on trouve alors:

$$\bar{U}_{exacte} \simeq -\varepsilon(\bar{y}/\varepsilon) + \frac{(1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon})}{(1 - 0)} \simeq (1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon})$$

On retrouve la solution intérieure précédente.

Encore plus fort, si on garde le groupement  $\bar{y}/\varepsilon$  avant de fixer soit  $\bar{y}$  soit ce rapport et que l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on trouve alors:

$$\bar{U}_{exacte} \simeq -\bar{y} + \frac{(1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon})}{(1 - 0)} \simeq (1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon}) = (1 - \bar{y}) + (1 - e^{-\bar{y}/\varepsilon}) - 1$$

On retrouve donc exactement la solution composite!

### 1.9 using gerris

Nous allons résoudre le problème (12) avec `gerris`, nous nous plaçons en configuration périodique avec un terme source pour tenir compte du gradient de pression imposé. Nous devons adimensionner le problème une fois pour toute. Pour les longueurs, nous prenons  $a$ , et le gradient de pression imposé sera pris unitaire, donc, prenons dans (12)  $U = u_0 \bar{u}$  et  $y = a \bar{y}$ :

$$-\left(\frac{v_0}{u_0}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{ka}{\rho u_0^2} + \frac{\nu}{u_0 a} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4)$$

on choisit  $u_0$  tel que  $\frac{ka}{\rho u_0^2} = 1$ , et ainsi si  $v_a = \frac{v_0}{u_0}$ :

$$-v_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 1 + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (5)$$

La résolution compte tenu des conditions d'adhérence en haut et en bas nous donne:

$$\bar{u}(\bar{y}) = \frac{1}{v_a} \left( -\bar{y} + \left( \frac{1 - \exp(-v_a Re \bar{y})}{1 - \exp(-v_a Re)} \right) \right)$$

## Multiscale Hydrodynamic Phenomena

---

```
#####
# 29/09/10 Poiseuille aspire par PYL, sauver dans "aspois0.gfs"
# lancer avec:      gerris2D -DRe=50 -DVa=0.1 aspois0.gfs | gfsview2D v.gfv
# valeur du Reynolds et de l'aspiration passes en parametres
# definition de 1 boite avec 1 connection
# met le coin gauche en 0,0
1 1 GfsSimulation GfsBox GfsGEdge{x = 0.5 y = 0.5 } {
  SourceViscosity {} 1./Re
# precision 2**(-4.) = 1/16=0.06   5-> 32  0.03
  Refine 4
# temps initial 0
  Init {} { U = 0 }
# on impose un gradient de pression
  Source {} U 1.
# AdaptGradient { istep = 1 } { cmax = .1 maxlevel = 5 } U
  GfsAdaptVorticity { istep = 1 } { maxlevel = 5 cmax = 1e-1 }
# sortie tous les 20 pas de calculs du temps en cours
  OutputTime { istep = 20 } stderr
# valeurs qui vont sortir pour entrer dans gfsview
# tous les 20 pas de calcul
  OutputSimulation { istep = 20 } stdout
  OutputSimulation { istep = 20 } SIM/sim-%g.txt {format = text}
  EventScript { istep = 20 } { cp SIM/sim-$GfsTime.txt sim.data}
# arret lorsque la variation de U devient "petite"
  EventStop { istep = 10 } U 1.e-4 DU
}

#conditions aux limites
GfsBox {
# en haut vitesse nulle
    top = GfsBoundary {
        GfsBcDirichlet U 0
        GfsBcDirichlet V -Va
    }
# en bas vitesse nulle
    bottom = GfsBoundary {
        GfsBcDirichlet U 0
        GfsBcDirichlet V -Va
    }
}
```



---

## Multiscale Hydrodynamic Phenomena

---

```
# branchement périodique
1 1 right
# fin de fichier
#####

    fichier de lancement run.sh

#!/bin/bash
#
#
for zeVa in 0.01 0.1 1 ; do
gerris2D -DRe=50 -DVa=$zeVa aspois0.gfs | gfsview2D v.gfv
cp sim.data sim$zeVa.data
cat <<EOUF | gnuplot
set xlabel 'y'
Va=$zeVa
Re=50
set title "Re=50 Va=$zeVa"
p[0:][0:] "< awk '{if((\ $1>0.4)&&(\ $1<0.51)){print \$2,\ $6}}' sim.data" w p,\
(-x+(1-exp(-Va*x*Re))/(1-exp(-Va*Re)))/Va t'solution exacte'
EOUF
done;

cat <<EOUF | gnuplot
    set term post eps enhanced
    set output "prof_aspi.eps"
    set ylabel "@^{\261}u(@^{\261}y) "
    set xlabel '@^{\261}y'
Re=50
u(x,Va)=(-x+(1-exp(-Va*x*Re))/(1-exp(-Va*Re)))/Va
set title "Re=50 Va"
p[0:][0:] "< awk '{if((\ $1>0.4)&&(\ $1<0.51)){print \$2,\ $6}}' sim0.01.data" t'Va=0.01' w p,\
u(x,0.01) t'solution exacte',\
"< awk '{if((\ $1>0.4)&&(\ $1<0.51)){print \$2,\ $6}}' sim0.1.data"t'Va=0.1' w p,\
u(x,0.1) t'solution exacte',\
"< awk '{if((\ $1>0.4)&&(\ $1<0.51)){print \$2,\ $6}}' sim1.data"t'Va=1' w p,\
u(x,1) t'solution exacte'
EOUF
```

## Multiscale Hydrodynamic Phenomena

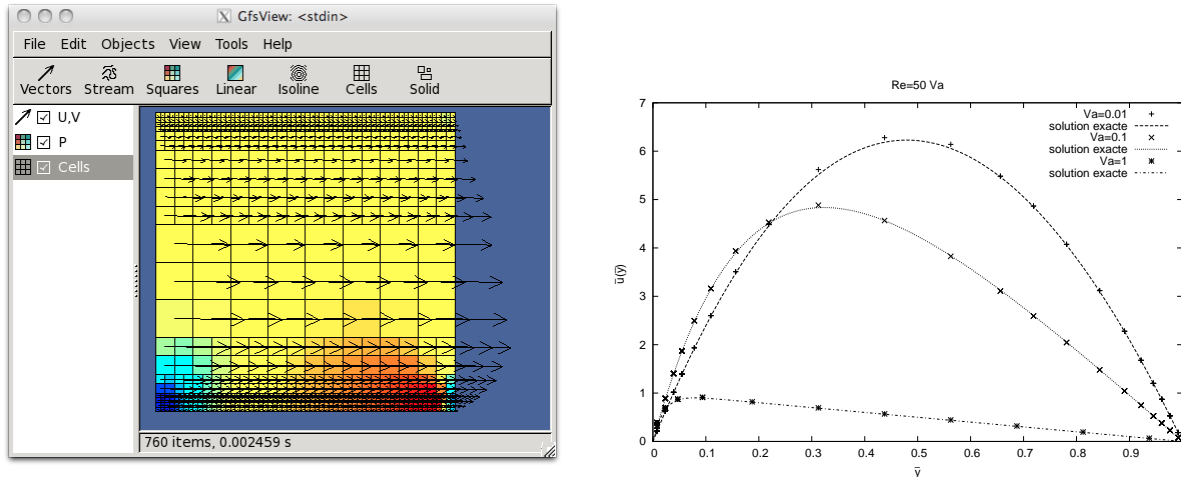


Figure 6: A 2D channel flow with suction and blowing.

pour tracer:

```
p[0:]< awk 'if(($1>0.4)&&($1<0.51)){print $2,$6}' sim.data"t'gerris' w lp,(-x+(1-exp(-Va*x*
```

## References

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1972. [http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page\\_229.htm](http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_229.htm)
- [2] Asymptotic Modelling in Fluid Mechanics, Lecture Notes in Physics (1994) Dériat Gatignol Rigolot Editeurs (lire l'intro de van Dyke et la conclusion de Guiraud)
- [3] C. M. Bender, S.A. Orzag Advanced Mathematical methods for scientists and engineers Mc Graw Hill (1991)
- [4] F. Coulouvrat, notes de Cours de DEA de Mécanique LMM/UPMC, Introduction aux Méthodes Asymptotiques en Mécanique.
- [5] J. Cousteix & J Mauss &(2006) Analyse asymptotique et couche limite, Springer M et A 57.
- [6] J.E. Hinch Perturbation Methods, Cambridge University Press, (1991)

## Multiscale Hydrodynamic Phenomena

---

- [7] W. Eckhaus, Asymptotic Analysis of singular perturbations, Stud. in Math. and Appl. 9, North Holland (1979)
- [8] C. François, Les Méthodes de perturbation en Mécanique, Editions ENSTA (1981)
- [9] C. François & S. Darrozès Mécanique des Fluides Springer Verlag , lecture Notes in Physics 143, (1982)
- [10] P. Germain Mécanique Ellipse T II (1986)
- [11] J. Kevorkian & J.D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer AMS 34 (1981)
- [12] J. Kevorkian & J.D. Cole, Multiple scale and singular perturbation methods, Springer AMS 114 (1991)
- [13] Kundu P.K. Cohen I.M. (2008) "Fluid Mechanics Fourth Edition", Academic Press.  
<http://books.google.fr/books>
- [14] T. Lévy, notes de Cours de DEA de Mécanique LMM/UPMC, Méthodes Asymptotiques, sans date (2000?)
- [15] A. Nayfeh, Introduction to perturbation technique, John Wiley (1981)
- [16] Paterson A. "A first course in fluid dynamics"  
<http://books.google.fr/books?dq=paterson+fluid+course>
- [17] M. Van Dyke, Perturbation methods in Fluid Mechanics (1975)

The web page of this text is:

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/>