

# Équation de Ruissellement: Saint Venant Laminaire

P.-Y. Lagrée

CNRS & UPMC Univ Paris 06, UMR 7190,

Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France

pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/~lagree

17 avril 2013

## 1 Problème

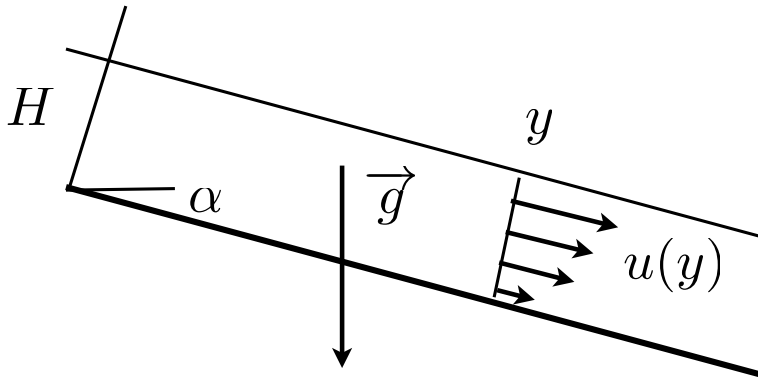
### 1.1 Film simple

Il s'agit de résoudre une chute de liquide le long d'un plan incliné d'angle  $\alpha$ . La solution est appelée film de Nusselt (Nuβelt). L'écoulement est invariant par translation en  $x$  pris le long du plan incliné, les équations de Navier Stokes s'écrivent ( $u(y)$  suivant  $x$  et  $u = v = 0$  en  $y = 0$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  en  $y = H$ ) :

$$0 = 0, \quad 0 = 0 + \mu_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho_f g \sin \alpha \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial y} p - \rho_f g \cos(\alpha).$$

De solution le film de Nuβelt (ou demi Poiseuille) :

$$u = \frac{gH^2 \sin \alpha}{2\nu_f} \left(\frac{y}{H}\right) \left(2 - \left(\frac{y}{H}\right)\right), \quad v = 0, \quad p = \rho_f g(H - y) \cos(\alpha).$$



## 1.2 Film liquide et gaz

Il y a problème si on met un fluide au dessus (noté gaz par la suite), puisque dans ce gaz, il faut aussi résoudre NS. On se placera par la suite dans un canal penché : en  $y = L_0/2$  il y a une autre paroi. La pression varie dans la gaz, mais comme on fait apparaître le facteur  $\rho_g/\rho_f$  qui est très petit ; la pression dans le gaz est faible. De même, ce sera le fluide liquide qui entraînera le gaz. En première approximation l'écoulement dans le gaz est un Couette dont la vitesse varie de  $\frac{gH^2 \sin \alpha}{2\nu_f}$  en bas à 0 en haut. Pour l'air et l'eau le rapport  $\rho_g/\rho_f = 0.0012$  et  $\mu_g/\mu_f = 0.019$ .

La solution complète est telle que :

$$\mu_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho_f g \sin \alpha, \quad \mu_g \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho_g g \sin \alpha,$$

$$u(0) = u(H_c) = 0 \quad u(H^-) = u(H^+) = 0 \quad \mu_g \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_H = \mu_f \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_H$$

On adimensionne  $y$  avec  $H$ , et  $u$  avec  $\rho_f g \sin \alpha / m \mu_f$ , le problème sans dimension :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -1, \quad (\mu_g/\mu_f) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -(\rho_g/\rho_f),$$

$$\bar{u}(1^-) = \bar{u}(1^+) = 0 \quad \bar{u}(0) = \bar{u}(\bar{H}_c) = 0 \quad (\mu_g/\mu_f) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_1$$

la solution exacte est (cas  $\bar{H}_c = 2$ ),  $m = (\mu_g/\mu_f)$  et  $r = (\rho_g/\rho_f)$ .

$$\bar{u}(\bar{y} < 1) = \frac{1}{2} \left( -\bar{y}^2 + \frac{(r-m)\bar{y}}{m+1} + 2\bar{y} \right), \quad \bar{u}(1 < \bar{y} < 2) = -\frac{(\bar{y}-2)(r\bar{y}m + m + r(\bar{y}-1))}{2m(m+1)}$$

Nous utiliserons ces formules pour comparer les résultats.

Ne pas mettre de paroi supérieure (imposer une condition de glissement par exemple) produit une accélération continuelle préjudiciable à la stationnarisation du problème.

Ici le film liquide entraîne le fluide, on peut dans le programme modifier les paramètres pour que ce soit le gaz qui entraîne le film...

## 2 G

*Gerris* résout :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T)) + \rho \vec{f}$$

qui est écrit sous la forme :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \{ -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (MU(\vec{\nabla} \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)) \} + Source(\vec{u})$$

où *alpha* est l'inverse de la densité et *MU* la fonction de viscosité et *Source* un terme de forçage volumique. Les deux premières fonctions vont varier du liquide au gaz, la troisième est la gravité. On définit une fonction *T* (traceur) telle  $T = 1$  dans le fluide et  $T = 0$  dans le gaz.

source viscosity is  $\mu$  (some times written  $\eta$ ) the second Lamé coefficient of the fluid, and  $\nu = \mu/\rho$ , i.e.  $\alpha\mu$ . The first is the dynamic viscosity, the second the kinematic viscosity. I hope I do no mistake, because I always confuse both names ;-), but I am sure of the symbols!

So *Gerris* solves

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \{ -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (SourceViscosity(\vec{\nabla} \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)) \} + Source(\vec{u})$$

## 3 Adimensionnement de *Gerris*

### 3.1 Adimensionnement

On pose  $x = H\bar{x}$   $y = \bar{y}$  et  $u = U_0\bar{u}$   $v = U_0\bar{v}$  et  $p = \rho_f U_f^2 \bar{p}$ . Puis  $\rho = \rho_f \bar{\rho}$  et  $\mu = \mu_f \bar{\mu}$   
On définit deux nombres sans dimension Froude et Reynolds  $F^2 = gH/U_0^2$  et  $Re = U_0 H/\nu$ .

La fonction  $\bar{\mu}$  vaut 1 dans le fluide, et vaut  $\mu_g/\mu_f$  dans le gaz.  
Donc  $\bar{\mu} = T + (\mu_g/\mu_f)(1 - T)$ , de même  $\bar{\rho} = T + (\rho_g/\rho_f)(1 - T)$

$$\frac{d\vec{u}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\rho}} (-\vec{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla} \cdot (\bar{\mu}(\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T))) + \frac{1}{F^2} (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$$

### 3.2 Nusselt

L'équilibre le long d'un plan incliné donne pour le liquide  $\bar{\mu} = 1$  et il ne reste bien que

$$0 = 0 + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{u} + \frac{1}{F^2} \sin \alpha$$

avec  $Re = \frac{F^2}{\sin \alpha}$  car  $U_0 = \frac{gH^2 \sin \alpha}{\nu}$  La solution est  $\bar{u} = \bar{y}(2 - \bar{y})/2$ .

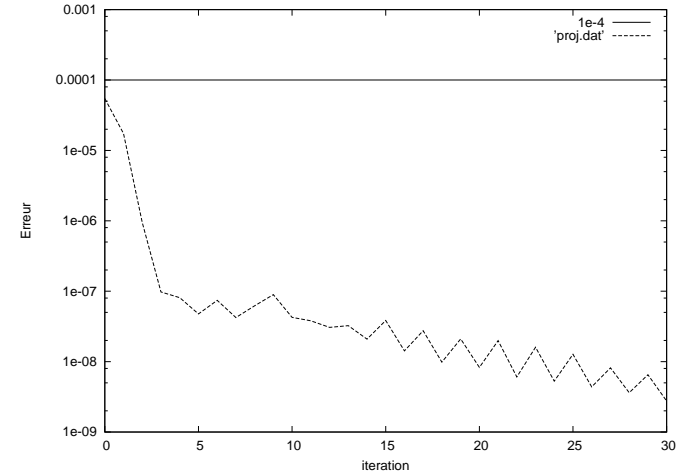


FIGURE 1 – Variation d'un itération à l'autre toutes les 10 itérations.

## 4 Résultat

Pour le calcul on définit une longueur de boîte  $L_0$  plus grande que  $H$ . On retrouve la solution exacte.

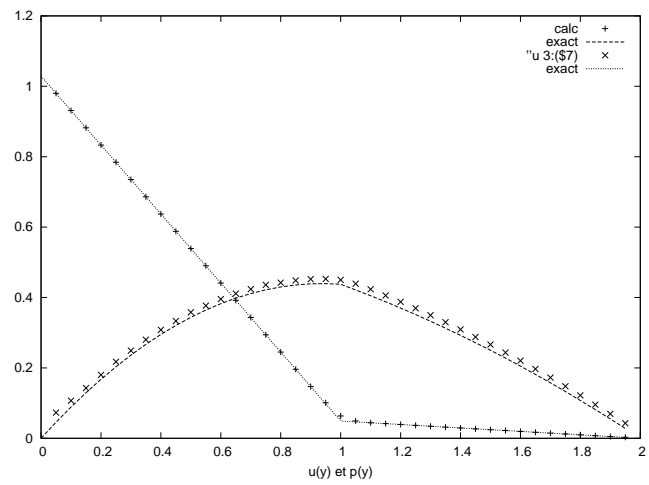


FIGURE 2 – Solution exacte et solution de *Gerris* pour  $\rho_g/\rho_f = 0.05$  et  $\mu_g/\mu_f = 0.2$

## 5 Code

```
#####
# Poiseuille par PYL, sauver dans "nuss.gfs"
# 01/10
# valeurs de dimension
Define L0 4.
Define H0 1.
Define alph 0.2
Define F2 1
Define Rho_gSf 0.05
Define mu_gSf .2
Define U0 ((2 - (y/(H0)))*(y/(H0))*(y<H0) + (y-L0/2)/(H0-L0/2)*(y>H0))/2
Define T0 (-y + H0 )
Define Nraf 4
Define Nrafp2 5
Define Nrafp3 6
Define Nrafp4 5

1 1 GfsSimulation GfsBox GfsGEdge{} {
# attention la boite est L0xL0
PhysicalParams { L = L0 }
# on s'arrete au bout du temps 500 quoiq' il arrive
Time {end = 500 }
VariableTracerVOF T
# viscosite Re = F2/sin(a)
SourceViscosity { } sin(alph)/F2*(T + (mu_gSf)*(1. - T)) {beta = 1}
# AdvectionParams { gc = 1 }
PhysicalParams { alpha = 1./(T + (Rho_gSf)*(1. - T)) }

# le domaine est de longueur L0, les deux plans sont entre y=0 et y=H0
#paroi inf

Solid ( y +.001 )

# au moins 32 cases, soit dx=L0/2^5=5/32=0.16
Refine Nraf
# raffinement pour la paroi...
RefineSolid Nrafp4
# on a Poiseuille entre y=0 et y=H0
Init {} { U = U0 }
Source {} V -cos(alph)/F2
```

```
Source {} U sin(alph)/F2
InitFraction T T0
# Init {} { T = T0 }

# adaptation automatique de maillage sur la vorticite et T
# dx=L0/2^7=5/128=0.04
AdaptVorticity { istep = 1 } { maxlevel = Nrafp2 cmax = 1e-2 }
AdaptGradient { istep = 1 } { maxlevel = Nrafp3 cmax = 1e-3 } T

OutputSimulation { istep = 10 } stdout
OutputTime { istep = 10 } stderr

# sortie des valeurs dans un fichier
OutputSimulation { start = end } VAL/end.gfs
# sortie sur une ligne au milieu definie par le fichier "profil.dat"
OutputLocation { start = end } VAL/Centre.data profil.dat
#test d'arret
EventStop { istart = 20 istep = 1} U 1e-5 DU
OutputProjectionStats { istep = 10 } {
awk '{
if ($1 == "residual.infty:") print $3 ;
}' > proj.dat
}
}
#condition
# périodicité d'où le 1 1 right et le 1 1 du départ
# en haut d/dy=0 ET p=0
GfsBox { top = Boundary {
BcDirichlet U 0
BcDirichlet V 0
BcDirichlet P 0
}
}
1 1 right
#####
```

Pour lancer : Fichier "run.sh"

```
#!/bin/bash
#
#
export LANG=C
echo "lancement du calcul"
mkdir VAL
rm VAL/knd*
file="profil.dat"
awk 'BEGIN{
    LO = 5
    HO = 1
    x=-2.
    for (y = -LO/2 ; y <= LO/2; y += 0.05)
        print x " " y " 0 ";
}' > $file
gerris2D -m nuss.gfs | gfsview2D vue.gfv

echo "r=\\> load.gnu
echo `cat nuss.gfs | grep "Define Rho_gSf" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "m=\\>> load.gnu
echo `cat nuss.gfs | grep "Define mu_gSf" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "a=\\>> load.gnu
echo `cat nuss.gfs | grep "Define alph" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "F2=\\>> load.gnu
echo `cat nuss.gfs | grep "Define F2" | awk '{ print $3}'`>>load.gnu
echo "uf(x)=x*(2 +(-m+r)/(1+m)-x)/2 ">> load.gnu
echo "ug(x)=-(-2 + x)*(m + r *(-1 + x) + m*r*x)/(2*m*(m+1))">> load.gnu
echo "u(x)= uf(x)*(x<1)+ug(x)*(x>=1) ">> load.gnu
set title " "
echo "plot[0:] \"<awk '{ if(\$1>0) print \$0}' VAL/Centre.data\" u 3:(\$5) t'u(y) calc',\\
' u (\$3):(u(\$3)) t'u(y) exact' w l,\\
'u 3:(\$7)t'P',((1+r-x)*(x<1)+(2-x)*(x>1)*r)*cos(a)/F2 t'P exact'" >>load.gnu

cat << "FdF" |gnuplot
set xlabel "x"
set xlabel "u(y) et p(y)"
l'load.gnu'
    set term post
    set output "prof.ps"
    replot
FdF
ps2pdf prof.ps
```

```
cat <<FdF | gnuplot
    set ylabel 'Erreur'
    set xlabel 'iteration'
    set logscale y
    plot 1e-4,'proj.dat'w l
    set term post
    set output "err.ps"
    replot
FdF

ps2pdf err.ps

echo "fin normale ?"
```

Fichier "vue.gfv"

```
# GfsView 2D
View {
  tx = -0.00777133 ty = -0.232281
  sx = 1 sy = 1 sz = 1
  q0 = 0 q1 = 0 q2 = 0 q3 = 1
  fov = 17.2573
  r = 0.3 g = 0.4 b = 0.6
  res = 1
  lc = 0.001
  reactivity = 0.1
}
Linear {
  r = 1 g = 1 b = 1
  shading = Constant
  maxlevel = -1
} {
  n.x = 0 n.y = 0 n.z = 1
  pos = 0
} T {
  amin = 0 min = 0.25
  amax = 0 max = 0.75
  cmap = Jet
} 0 {
  reversed = 0
  use_scalar = 1
}
Vectors {
  r = 0 g = 0 b = 0
  shading = Constant
  maxlevel = 5
} {
  n.x = 0 n.y = 0 n.z = 1
  pos = 0
} P {
  amin = 1
  amax = 1
  cmap = Jet
} U V {
  scale = 0.1
  use_scalar = 0
}
```

archive des fichiers à la page :  
[www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SOURCES/GERRIS/NUSSELT/nusselt.zip](http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SOURCES/GERRIS/NUSSELT/nusselt.zip).

