

ETUDE DE L'EVOLUTION D'UNE DUNE DE
SABLE DANS UN ECOULEMENT
CONSTANT

Laurent Castera
Gaël Hajeri

Mars 2004

Table des matières

1	Etude théorique et modélisation du problème statique	3
1.1	Conditions aux limites	3
1.2	Modélisation du problème à géométrie fixe	5
1.3	Premiers résultats	6
1.3.1	Champ de vitesse	6
1.3.2	Champ de pression	7
1.3.3	Frottement au niveau du sol	7
2	Modélisation du problème global	10
2.1	Modélisation du problème	10
2.2	Résultats	10
2.3	Remarques générales	13
3	Problème d'évolution	14
3.1	Méthode de la transformée de Fourier	14
3.1.1	Théorie	14
3.1.2	Simulation	15
3.2	Approche par les différences finies	16
3.2.1	Equations du modèle	16
3.2.2	Simulation	18
3.2.3	Résultats	18
3.2.4	Discussion du modèle et prolongements possibles	21

Introduction

Le sujet de ce Travail de Modélisation et de Simulation est l'étude de l'évolution d'une dune dans le temps. En fait, l'étude de la formation et de la propagation des dunes de sable est un sujet de préoccupation actuel pour les scientifiques, comme en témoignent les nombreux articles à caractère scientifique qu'on a pu lire sur le sujet. Ces études mêlent, comme souvent en mécanique, l'expérience et la simulation.

La problématique de notre sujet est d'étudier différentes modélisations du calcul du frottement pariétal et de voir si elles se vérifient. La première partie est consacrée à la présentation théorique du problème à partir des équations de Navier-Stokes. Cette partie nous permet également d'imposer les conditions aux limites à notre problème et ainsi de fixer le cadre pour notre simulation sous Castem. Dans un deuxième temps, une fois calculé les champs en statique, on aborde l'évolution proprement dite de la dune toujours avec le code Castem. On recalcule ici à chaque itération le champ de vitesse pour évaluer le frottement pariétal. Enfin dans une troisième partie, on adopte une modélisation autonome. Ainsi on calcule directement le frottement pariétal grâce à une formulation simplifiée du modèle de couche limite.

Abstract : In this paper, we present a two-dimensional simplified model of a dune evolution. We use CASTEM to compute the propagation of the sand dune. At the beginning, we choose the dune profile and the constant wind which is blowing on the dune ; then we observe how the dome move following the Navier-Stokes equations. We focus our work on the influence of the different factors involved in the friction on the dome. Moreover, we study other modelisations of the link between the volumic sand flux $q(x,t)$, the friction and the profile $f(x,t)$. We have tried to find the pros and cons of such a model.

Partie 1

Etude théorique et modélisation du problème statique

L'étude du déplacement de la dune se fait à partir de la simulation de l'écoulement du fluide autour du profil. Avant de calculer le frottement pariétal et la pression à la paroi, on tente d'obtenir le champ de vitesse $\underline{U} = ue_x + ve_y$ au dessus de la dune. L'écoulement suit les équations de Navier-Stokes 2D adimensionnées :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \cdot \nabla^2 u \\ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \cdot \nabla^2 v \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour simplifier, on choisit de se placer en régime laminaire stationnaire ($Re < 10^5$) et de considérer un fluide incompressible. Dans un premier temps nous allons expliquer comment on a fixé les conditions aux limites dans notre modèle. Puis nous calculerons l'écoulement sur la bosse de forme donnée avec le code CASTEM2000.

1.1 Conditions aux limites

Une fois défini le cadre rectangle qui va servir de base au maillage nécessaire au calcul ultérieur de l'écoulement par éléments finis, on fixe un profil de gaussienne. Ce sera la forme initiale choisie pour la dune.(voir fig 1.1)

Sur le sol, on applique les conditions limites d'un fluide visqueux à savoir la condition d'adhérence à la paroi de la bosse : la vitesse est nulle au sol. On fixe ensuite la pression égale à zéro à la sortie et les dérivés normales nulles en haut ce qui traduit une absence de contraintes sur le bord supérieur du cadre.

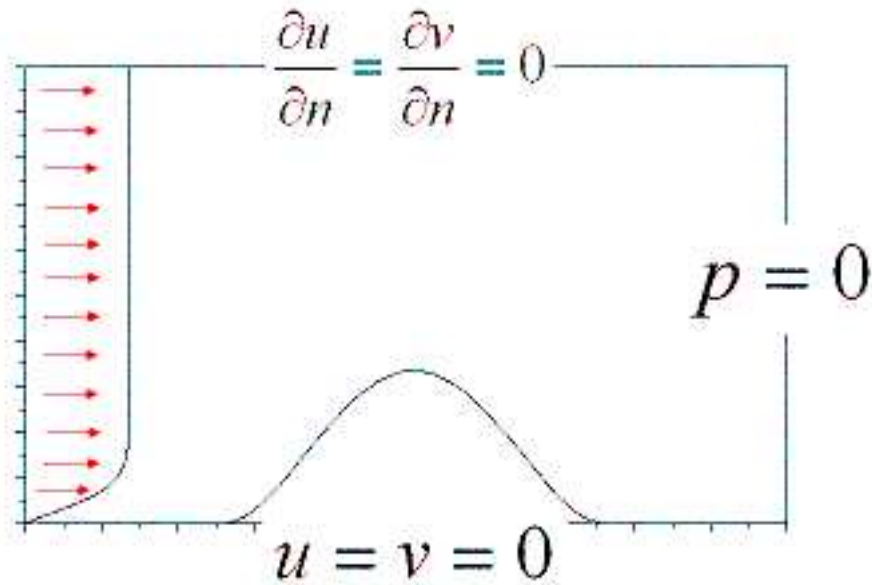


FIG. 1.1 – Forme de la dune et profil de vitesse à l'entrée choisis

Pour ce qui est du profil de vitesse à l'entrée, on a d'abord choisi un profil de la forme $\underline{U} = U_{\infty} e_x$. Cependant ce choix pour les vitesses à l'entrée a posé des problèmes de bord dans le coin en bas à gauche du fait de l'incompatibilité entre la composante v de la vitesse d'entrée non nulle sur le bord gauche et la vitesse supposée nulle sur le bord inférieur. C'est pourquoi on a opté pour un profil exponentiel de la vitesse d'entrée (voir fig 1.1), ce qui a limité les problèmes de bord.

La première étape était d'obtenir le champ de vitesse autour de la dune. La deuxième est de laisser le sol évoluer conformément à la loi de conservation de la masse. Cette loi lie la variation temporelle de la forme f de la dune à la divergence du flux de matière q .

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (1.2)$$

Le flux de matière q est lié à la valeur du frottement pariétal. La loi d'Exner (Yang 1995, voir [8]) énonce que :

$$q = \bar{w}(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \quad (1.3)$$

La fonction $\bar{w}(x)$ est définie telle que si $x < 0$, $\bar{w}(x) = 0$ et si $x = 0$, $\bar{w}(x) = x$. Cette loi traduit le fait que plus le frottement pariétal est élevé plus il y a de matière à enlever. Le terme τ_s signifie qu'il y a un seuil pour l'arrachement, le coefficient Λ traduit un effet de gravité qui devrait avoir tendance à "lisser" les modifications de forme du profil.

Dans nos calculs avec Castem, nous n'avons pas tenu compte de l'effet de seuil. Par contre, on a étudié l'évolution du profil en fonction de la présence ou de l'absence du terme de gravité. En fait, à partir du calcul du champ des vitesses on a évalué de la manière suivante :

$$q = \tau - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.4)$$

Il est important de noter que parfois, selon les auteurs, la relation liant le flux q au frottement pariétal est modifiée en (cf Andreotti, [5]) :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\bar{w}(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \quad (1.5)$$

Bien que les théories sont nombreuses concernant l'évolution des dunes, nous essaierons par la suite de comparer différentes modélisations, et notamment leur interprétation physique.

1.2 Modélisation du problème à géométrie fixe

Le problème d'évolution d'une dune de sable suppose, comme on l'a vu précédemment, de connaître l'état du frottement au niveau du sol dans un écoulement. La première idée a donc été de calculer en statique (dune fixe) les paramètres physiques pour un écoulement donné. Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse simplificatrice d'un vent constant.

Le principe de la modélisation est un calcul de type éléments finis quadrangulaires en deux dimensions. Nous effectuons les simulations sous CASTEM2000. Ce logiciel réalise un calcul de solution des équations de Navier Stokes par une méthode itérative. La dune est initialement une gaussienne de hauteur 1m et de largeur à mi-hauteur 30cm (voir fig 1.2). Les conditions aux limites respectent le cadre théorique ; ainsi on impose :

$$\begin{aligned} -\underline{U} &= \underline{0} && \text{au niveau du sol} \\ -\underline{U} &= U_\infty \underline{e}_x && \text{sur le bord gauche (profil d'entrée)} \\ -\frac{\partial \underline{U}}{\partial n} &= \underline{0} && \text{sur le bord supérieur (équivalent à l'absence de contrainte)} \\ -p &= 0 && \text{sur le bord droit du maillage} \end{aligned} \quad (1.6)$$

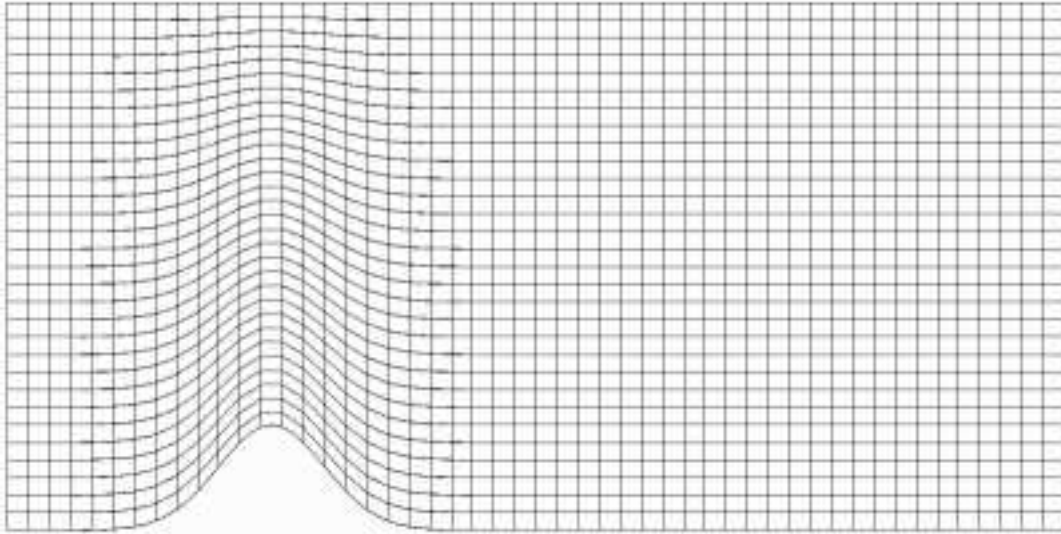


FIG. 1.2 – Maillage du domaine

Nous initialisons le champ de vitesse par un profil de type couche limite dans tout le maillage. Cette initialisation est en réalité assez transparente dans les résultats. En effet, elle revient à définir une vitesse non nulle en chacun des points. Mais il faut alors environ 2000 à 3000 itérations du calcul Navier-Stokes pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-4} (ce que nous fixons comme référence dans toute la suite). Ainsi, au bout de tant d'itérations la forme du profil est relativement indépendante de l'initialisation, du moment que l'on reste dans le domaine de profil de vitesse "cohérents" (imposer $U = cte$ dans tout l'intérieur du domaine serait quasiment équivalent).

1.3 Premiers résultats

1.3.1 Champ de vitesse

Nous commençons par observer l'état du champ des vitesses dans le domaine considéré. La première remarque que l'on peut faire concerne la différence entre le champ observé et l'initialisation. Ceci confirme intuitivement l'indépendance de la solution vis à vis de l'initialisation.

L'autre principale constatation est que la présence de la dune modifie clairement le profil des vitesses. On voit se former un tourbillon en aval de la dune (voir fig 1.3), qui correspond à un décrochage de la couche limite.

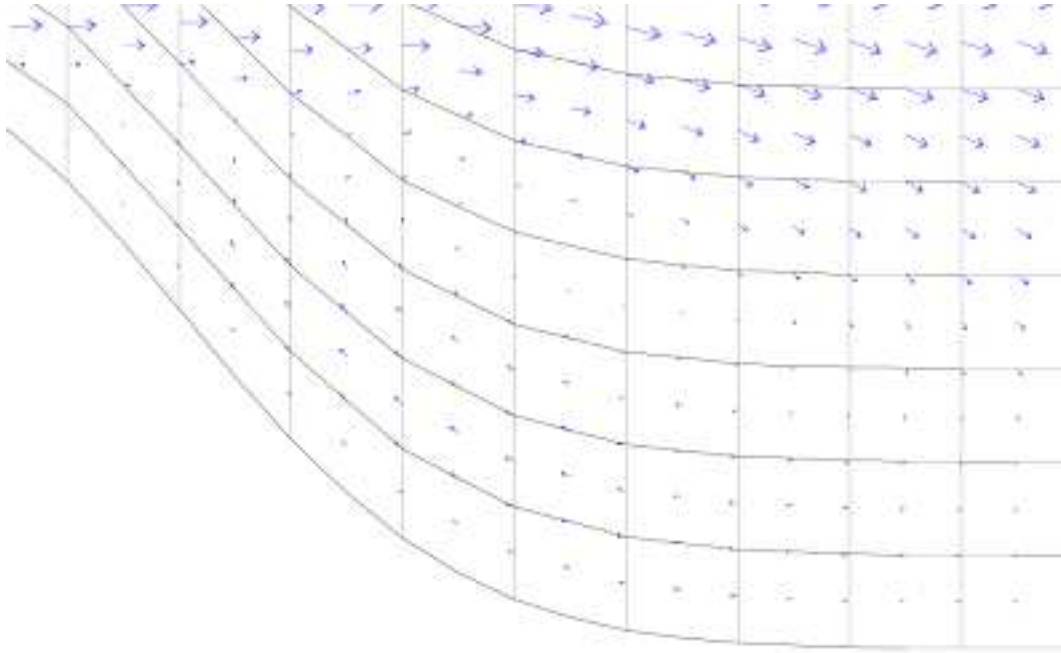


FIG. 1.3 – *Champ de vitesse en aval de la dune : on voit se former un tourbillon*

1.3.2 Champ de pression

Le champ de pression confirme les résultats sur le champ des vitesses. En effet, la formation du tourbillon en aval crée une dépression qui sera à l'origine de l'avancée de la dune. A l'inverse, l'amont de la bosse est soumis à une surpression. Déjà on imagine le comportement de la dune : de la matière va être transférée des zones de haute pression vers les zones de faible pression.

L'alternance des effets de surpression et de dépression est d'autant plus remarquable lorsqu'on représente le frottement au niveau du sol (voir fig 1.5).

Il est intéressant de noter aussi que la présence de la dune crée un effet de confinement de l'écoulement puisque la surpression s'observe à des hauteurs de deux fois la hauteur de la dune. Ceci crée l'accélération de l'écoulement au passage de la dune observée sur le champ des vitesses. Il faut cependant nuancer cette idée à cause des effets de bord. On peut en effet penser qu'une telle surpression se dissipe beaucoup plus rapidement dans un domaine infini, et que l'accélération n'est que très locale.

1.3.3 Frottement au niveau du sol

L'analyse du champ de pression ne nous donne en réalité qu'une information qualitative. En effet, comme l'explique la théorie, seul le frottement peut caractériser l'arrachement de matière, et donc l'évolution de la dune. Nous représentons

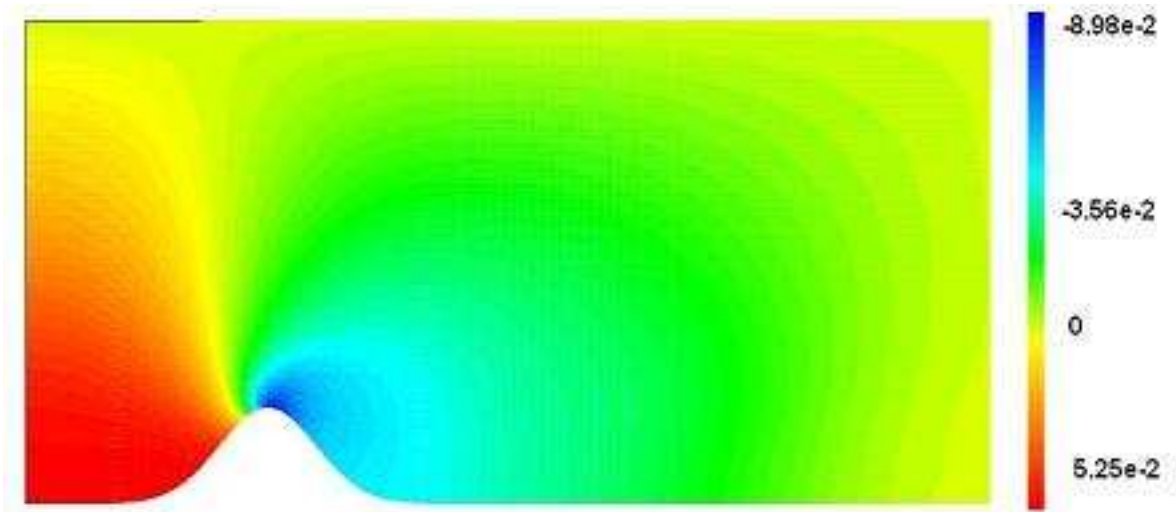


FIG. 1.4 – Champ de pression dans le domaine maillé (l'échelle étant graduée en jaune-rouge pour les surpressions et bleu

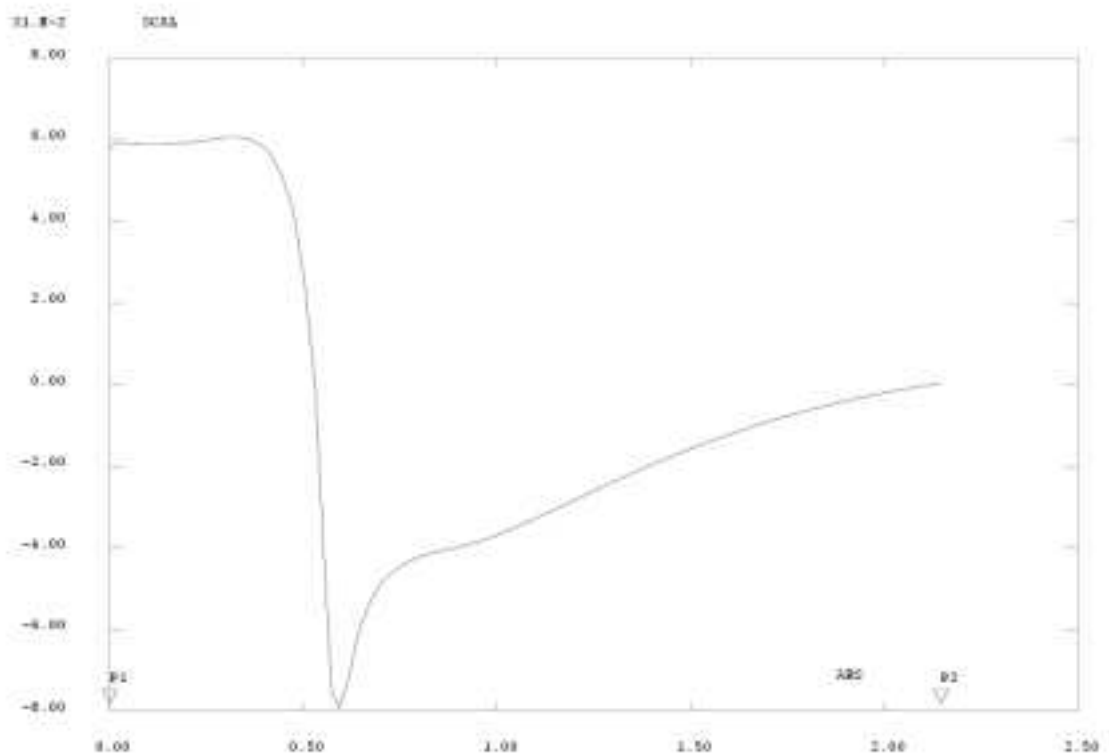


FIG. 1.5 – Etat de pression au niveau du sol

donc $\frac{\partial u}{\partial y}$ au niveau du sol (voir fig 1.6).

Le frottement connaît un maximum juste devant le sommet de la dune. En-

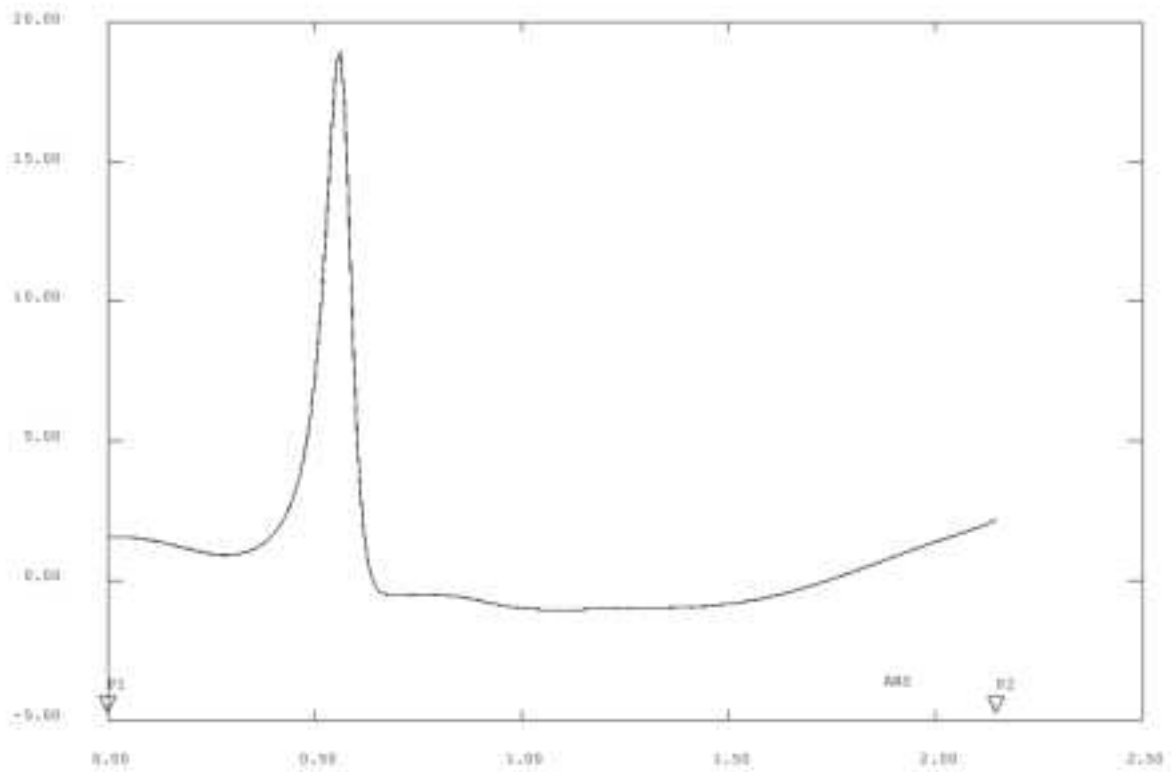


FIG. 1.6 – *Evolution du frottement au niveau du sol en fonction de l'abscisse*

core une fois ceci suppose que la dune aura tendance à se creuser sur sa partie amont. En revanche, en aval, le frottement s'annule et devient même négatif (effet du tourbillon). L'écoulement aura ainsi pour effet de rajouter de la matière légèrement en aval du sommet.

Notons que les résultats obtenus pour l'évolution du champ de pression et du frottement confirme les mesures déjà effectuées (voir section 2 de [1]) ainsi que d'autres modélisations (voir section 1.1.3 de [2]).

Partie 2

Modélisation du problème global

Maintenant que nous avons obtenu l'état des paramètres physiques à forme de dune constante, nous pouvons intégrer ces données pour faire évoluer cette même dune. Nous utilisons pour cela la théorie vue précédemment concernant l'équation de conservation de la matière.

2.1 Modélisation du problème

La méthode développée dans cette section repose sur un va-et-vient entre le calcul du champ de contraintes sur la dune et les équations d'évolution. En effet, le principe consiste tout simplement à calculer l'état du frottement pour une géométrie de dune donnée (avec une erreur inférieure à 10^{-4}); puis nous compilons les résultats dans l'équation d'évolution pour déplacer le maillage et nous réitérons le procédé avec la nouvelle forme de bosse.

Algorithmiquement, la principale difficulté de cette modélisation a été de déplacer le maillage correctement (c'est à dire en compilant les équations sous CASTEM) et résoluble pour le calcul Navier-Stokes par le procédé itératif de CASTEM.

Un des grands enjeux de cette section repose en réalité sur la modélisation que l'on associe à l'équation d'évolution $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$ et en particulier à la valeur du flux $q(x)$.

2.2 Résultats

La figure 2.1 montre l'évolution de la dune pour les 15 premières itérations. Tout d'abord nous pouvons voir que l'intuition de la section précédente est confirmée. On remarque facilement que le déplacement de matière suit le champ de vitesse : la dune se creuse en amont et en aval et le profil devient plus pentu.

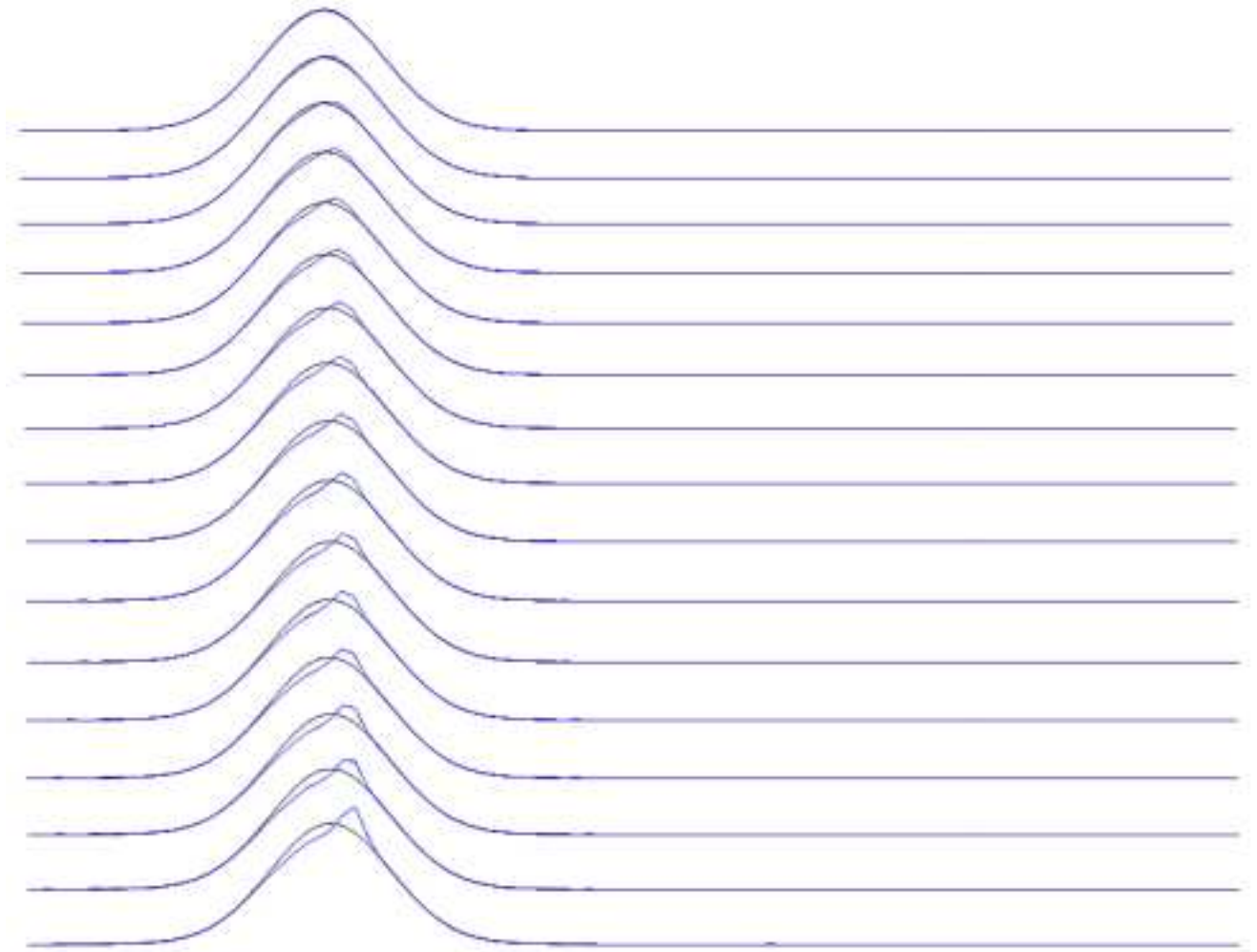


FIG. 2.1 – *Evolution de la dune au cours des 15 premières itérations ($\tau_{final} = 15 \cdot 10^{-4}$); la modélisation adoptée est $q = \lambda\tau$, pour un maillage de 100×60 éléments : la dune s'amplifie jusqu'à former un point anguleux qui fait alors diverger le code.*

Le problème majeur de cette modélisation est que le code diverge assez rapidement. En effet, au fur et à mesure que le profil augmente, la surpression en amont et la dépression en aval augmente (la dune exerce une résistance plus grande à l'écoulement). Ainsi le profil s'amplifie jusqu'aux limites de calcul de CASTEM. Pour améliorer cette divergence du profil, on peut opter pour une autre modélisation du facteur $q(x)$ en prenant par exemple $q = \lambda\tau - \mu \frac{\partial f}{\partial x}$, on peut imaginer limiter l'élévation de la dune. En effet, l'équation d'évolution devient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Le facteur $\mu \frac{\partial f}{\partial x}$ dans $q(x)$ permet d'obtenir une variante de l'équation de la chaleur : $\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ainsi ce facteur devrait permettre d'écraser la forme de la dune (la réponse de cette équation à un pic de chaleur donnant une gaussienne qui s'écrase au cours du temps).

Lorsqu'on simule une telle expression de $q(x)$ sous CASTEM, on est très rapidement confronté à la divergence du schéma. En effet, on sait que la condition CFL de convergence de l'équation de la chaleur est du type :

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$$

(résultat tiré du lemme 2.2.14 de [3]) Cela suppose que l'on ait soit un pas de temps très faible (auquel cas on ne voit quasiment pas évoluer la dune) soit un maillage très grossier (ce qui amène rapidement des erreurs de convergence du schéma). Si nous conservons les mêmes paramètres physiques que précédemment, nous observons très rapidement des oscillations et une divergence du schéma (voir Fig 2.2).

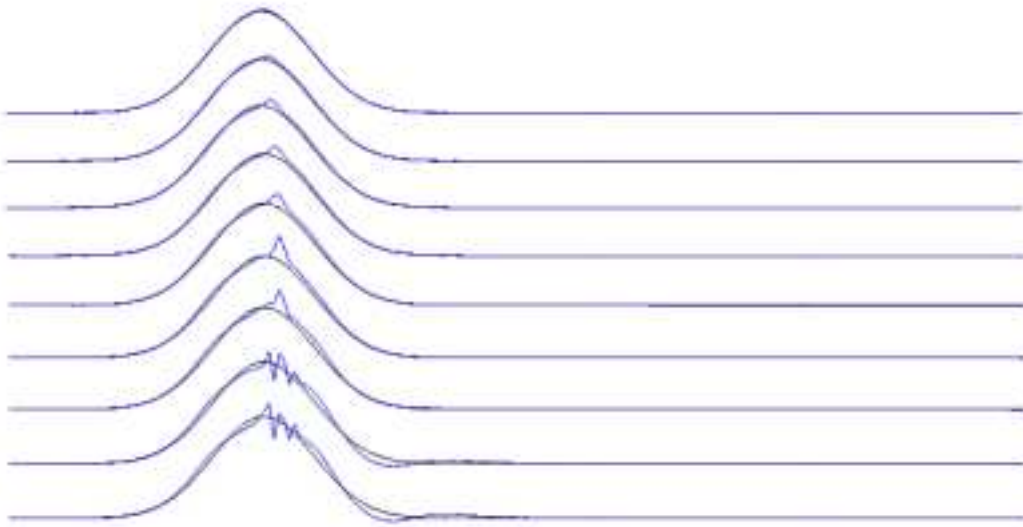


FIG. 2.2 – Evolution de la dune au cours des 9 premières itérations ($t_{final} = 5.10^{-4}$); la modélisation adoptée est $q = \lambda\tau + \mu \frac{\partial f}{\partial x}$, pour un maillage de 100×60 éléments : on voit clairement apparaître des oscillations pour ce modèle; les oscillations augmentent encore si l'on raffine le maillage

2.3 Remarques générales

Ce qu'il faut sans doute retenir de cette section est la limite des calculs par éléments finis. En effet, nous avons vu que l'algorithme permettait d'obtenir des résultats très cohérents mais que cette précision a un prix : le temps de calcul. Il faut en effet compter plusieurs heures de calcul pour obtenir une vingtaine d'itérations.

On peut cependant accélérer le calcul en grossissant le maillage. Mais en revanche, là on perd très rapidement des informations et le programme diverge rapidement. En effet, ce qui fait que le code de calcul fonctionne bien à la première itération est la régularité de la bosse. Dès que le profil devient plus "anguleux" (ce qui arrive au bout d'une quinzaine d'itérations en général, même avec un maillage fin), Castem a beaucoup plus de mal à calculer l'écoulement et la solution se met à diverger (ce qui s'observe en pratique par une augmentation radicale de l'erreur au cours des itérations). Une solution intermédiaire consisterait à raffiner le maillage au voisinage de la bosse, et de garder un maillage plus grossier dans les zones "neutres" de l'écoulement. Avec notre modèle, nous ne sommes parvenus qu'à voir l'initialisation du mouvement.

L'inconvénient majeur de cette limite du calcul est que l'on peut difficilement comparer les différents modèles propagatifs de la dune. Que l'on prenne $q(x) = \lambda\tau$ ou bien $q(x) = \lambda\tau + \mu\frac{\partial f}{\partial x}$ ne change quasiment rien aux résultats puisqu'on ne dépasse pas le stade de la première déformation initialisant le mouvement.

Face à toutes ces difficultés, nous avons par la suite étudié directement les modèles de propagation des dunes, sans passer à chaque fois par le calcul du champ de frottement au niveau du sol. La phase de calcul en statique nous permet juste de confirmer que ces modèles sont cohérents à chaque itération.

Partie 3

Problème d'évolution

3.1 Méthode de la transformée de Fourier

Parmi les nombreuses approches possibles du problème, l'une repose sur l'analyse de Fourier.

3.1.1 Théorie

Le passage à la transformée de Fourier se fait de manière discrète, ie on va poser dans les équations :

$$\hat{u}_k = \sum_j u_j e^{2ik\pi j/n}$$

L'hypothèse de base revient à poser que le frottement τ est proportionnel à $q(x)$. Cette hypothèse revient physiquement à faire une approximation de couche limite (pour Re grand, on fait l'approximation de triple couche simplifiée, comme exposé dans [1] et [2]).

On définit ensuite une grandeur A_r appelé arrachement qui quantifie le transport ou non de matière. Ainsi il introduit un frottement seuil τ_s à partir duquel les grains de sable pourront être arrachés et transportés. L'arrachement A_r peut alors être évalué à (voir [1] et [2] pour la démonstration exacte) :

$$A_r = \alpha(\tau - \tau_s - \lambda \frac{df}{dx})^\beta$$

On est alors amené à résoudre :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{dq}{dx}$$

où $q(x)$ est solution de :

$$\frac{dq}{dx} + Vq(x) = A_r$$

Il n'y a plus qu'à discrétiser en temps et en espace pour obtenir algorithmiquement l'évolution de la dune.

3.1.2 Simulation

Le code que nous avons utilisé compile dans un programme C les équations précédentes de façon incrémentale. Nous observons l'évolution de la dune sous gnuplot (voir fig 3.1).

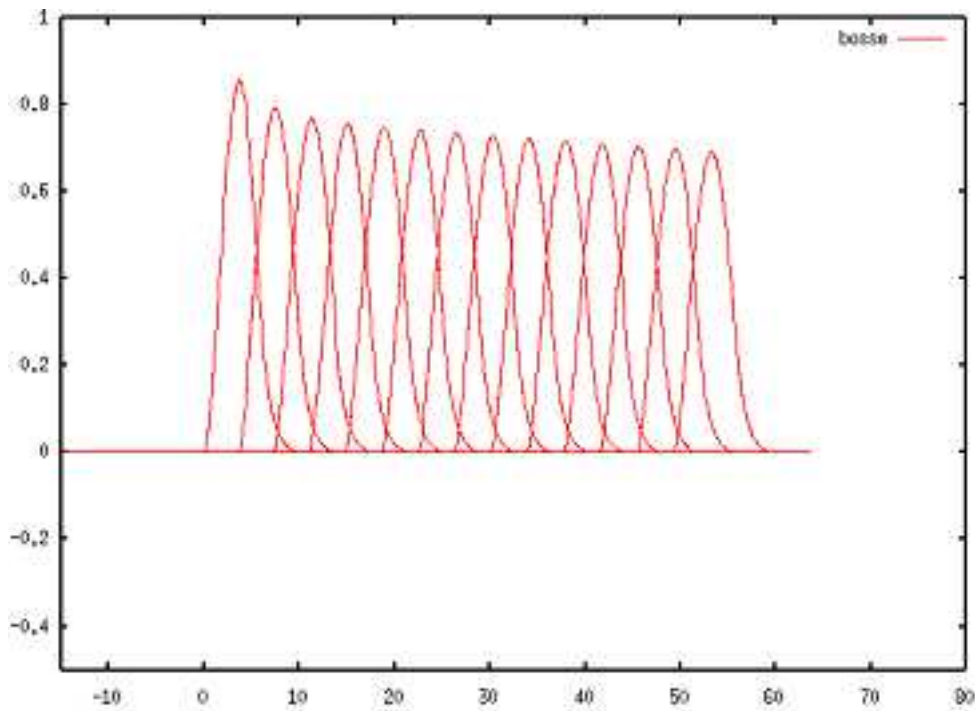


FIG. 3.1 – Tracé de l'évolution de la dune pour les 14 premières itérations pour la modélisation par transformée de Fourier

L'évolution de la dune se fait en décroissant. On observe ainsi les effets de propagation et d'atténuation combinés. Cette évolution confirme ce qu'on peut trouver dans la littérature sur les évolutions des dunes (voir [5]). Il est intéressant de voir que ce modèle ne donne qu'une atténuation très faible de l'amplitude de la dune.

Contrairement à la méthode précédente, on arrive à simuler l'évolution de la dune sur plusieurs longueurs sans avoir recours à des dizaines d'heures de calcul. En effet, dans la mesure où on évite totalement le laborieux calcul du frottement, on compile uniquement les équations d'évolution. D'autres approches reprennent cette idée de n'étudier que les équations de propagation.

3.2 Approche par les différences finies

Le but de cette partie est de présenter un modèle simplifié de l'évolution de dune (Modèle de Sauermann ([6])). L'approche est légèrement différente et permet par simplification de se passer des transformées de Fourier. La description de l'évolution de dunes bi-dimensionnelles est basée comme précédemment sur l'étude de deux grandeurs : la grandeur du profil $f(x,t)$ et le flux de matière $q(x,t)$. Nous allons écrire les trois équations reliant ces quantités incluant (i) la conservation de la masse, (ii) la progressive saturation du transport de sable et (iii) l'influence réciproque du profil sur la valeur du frottement pariétal et donc du flux de matière.

3.2.1 Equations du modèle

La conservation de la masse s'écrit toujours de la même façon ([4]) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.1)$$

Ensuite, cette théorie prend en compte un phénomène de saturation du flux de sable. Comme on le voit sur la figure 3.2, quand le vent souffle sur une bande de sable, le flux de sable augmente d'abord avant de plafonner à une valeur après une longueur l_{sat} . On montre que cette longueur dépend de la taille du grain de sable et du rapport des masses volumiques du fluide et du sable. Ce phénomène a été étudié par de nombreux auteurs ([5] et [6]). Même si l'allure de q est certainement plus compliquée en réalité que sur la figure 3.2, on peut de manière satisfaisante modéliser cette saturation par l'équation (3.2).

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{l_{sat}}(q_{sat} - q) \quad (3.2)$$

On adimensionnera avec l_{sat} par la suite.

Enfin, l'effet de la topographie de la dune sur le flux de matière vient compléter ce jeu d'équations. Il a été modélisé par de nombreux auteurs notamment K.Kroy ([6]) de la manière suivante :

$$\frac{q_{sat}}{Q_{sat}} = 1 + A \int \frac{ds}{\pi s} \partial_x f(x-s) + B \partial_x f(x) \quad (3.3)$$

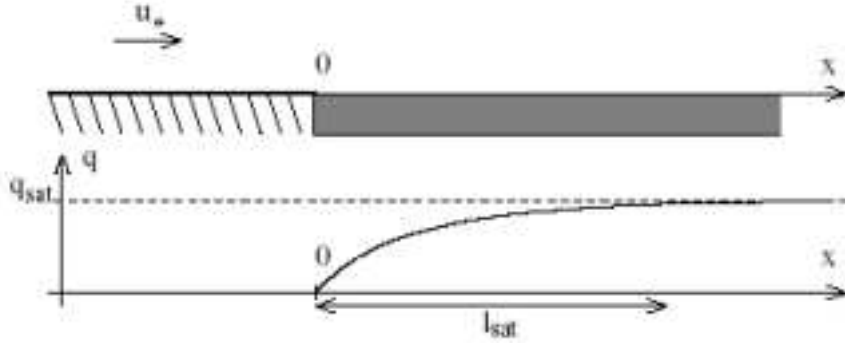


FIG. 3.2 – Lorsque le vent balaye une bande de sable, le flux de transport de sable sature après une longueur caractéristique l_{sat} . ([5])

où Q_{sat} est le flux de matière saturé sur un sol sablonneux plat balayé par le vent. Chaque terme de cette équation mérite une explication. L'intégrale de convolution de $\partial_x f$ agit un peu comme une dérivée moyennée, ce qui laisse apparaître un terme qui traduit les effets de courbure. Cela reflète l'observation selon laquelle la vitesse du vent augmente sur des bosses (courbures négatives) et décroît dans des creux (courbures positives). Ainsi, la courbure produit un effet sur le plafonnement q_{sat} du flux de matière. Le deuxième terme en $\partial_x f$ traduit simplement les effets de pente : les pentes positives sont plus érodées que les pentes négatives. On adimensionnera cette équation avec Q_{sat} et l_{sat} .

L'équation précédente peut être gardée telle qu'elle est. On peut l'associer à l'équation de conservation de la masse et à l'équation de saturation du flux de matière. Le traitement de la convolution peut alors se faire par transformées de Fourier comme dans le programme en C évoqué précédemment. Mais l'idée dans ce modèle est plutôt de remplacer ce terme par une expression plus simple. On remplace la convolution par le terme $-D\partial_{xx}f$ où D est une longueur caractéristique de la taille de la dune. Cette approximation faite, on obtient un système d'équation pour notre modèle :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = q_{sat} - q \\ q_{sat} = 1 - \alpha D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad (3.4)$$

α et β sont deux constantes du modèle. Ils ont un rôle pondérateur pour les deux facteurs qui influencent q_{sat} . Il est intéressant de voir leur influence respective sur la simulation.

3.2.2 Simulation

Avant de passer à la discrétisation du système d'équations du modèle et son traitement par différences finies, il est important de noter que l'introduction d'une dérivée seconde de f a certes simplifier le modèle mais a aussi augmenter l'ordre de l'équation différentielle. Ainsi, on a besoin d'une condition limite en plus pour intégrer ces équations. On a fait le choix de fixer l'altitude de la dune à zéro loin derrière la dune, ce qui semble physiquement acceptable.

Pour forme de départ, on a choisi une bosse polynomiale de degré 4 pour avoir un raccordement C^1 avec les demi-droites nulles avant et après la bosse. On remarque que si le raccordement n'est pas régulier au début, la convergence du modèle est plus difficile à obtenir (au niveau du choix des pas de temps et d'espace). Ensuite, on prend $D=0.1$ puisque c'est à peu près la largeur de la bosse choisie. Dans ce modèle, on s'aperçoit que la condition de convergence CFL est assez contraignante puisqu'on est obligé de choisir malgré tout des pas de temps et d'espace très faibles ($dx=0.01$ et $dt=0.0001$). Le programme associé est joint en annexe. Il a été compilé avec Scilab.

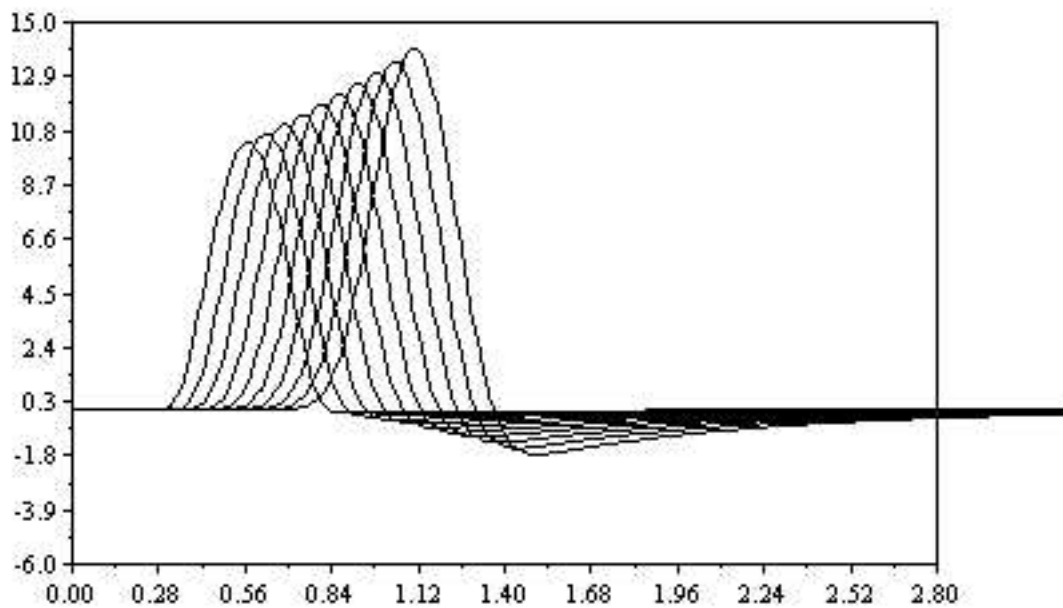


FIG. 3.3 – Résultat d'une de nos simulations : $\alpha = 0.01$ et $\beta = 4$ et $t=15000$

3.2.3 Résultats

Le tracé de cette simulation montre bien le déplacement de la dune. On observe un creusement important derrière la dune ce qui est conforme au principe de conservation de la matière. Le même genre de creusement se retrouve sur les simulations de B. Andreotti et P. Claudin ([5]). Ils ont eux simulé directement l'équation avec la convolution. En fait, ils obtiennent plusieurs oscillations. Mais du fait que l'on ait imposé un retour à altitude nulle pour le profil en bout de maillage, on a dans notre modèle une seule bosse qui évolue. Dans leur simulation, c'est une onde qui se forme et se développe. (voir fig 3.4)

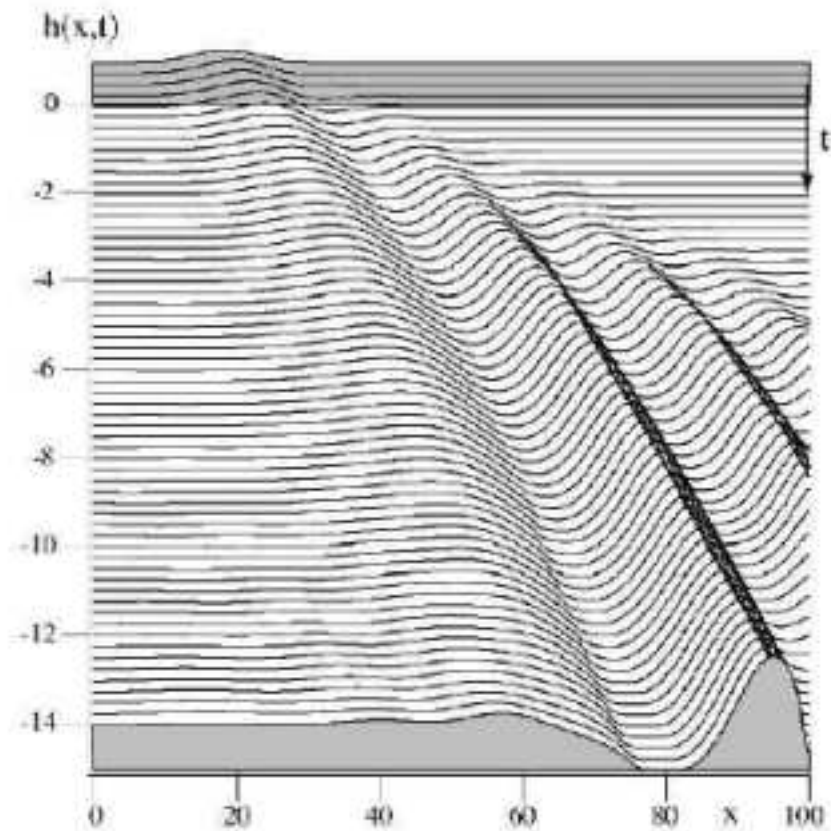
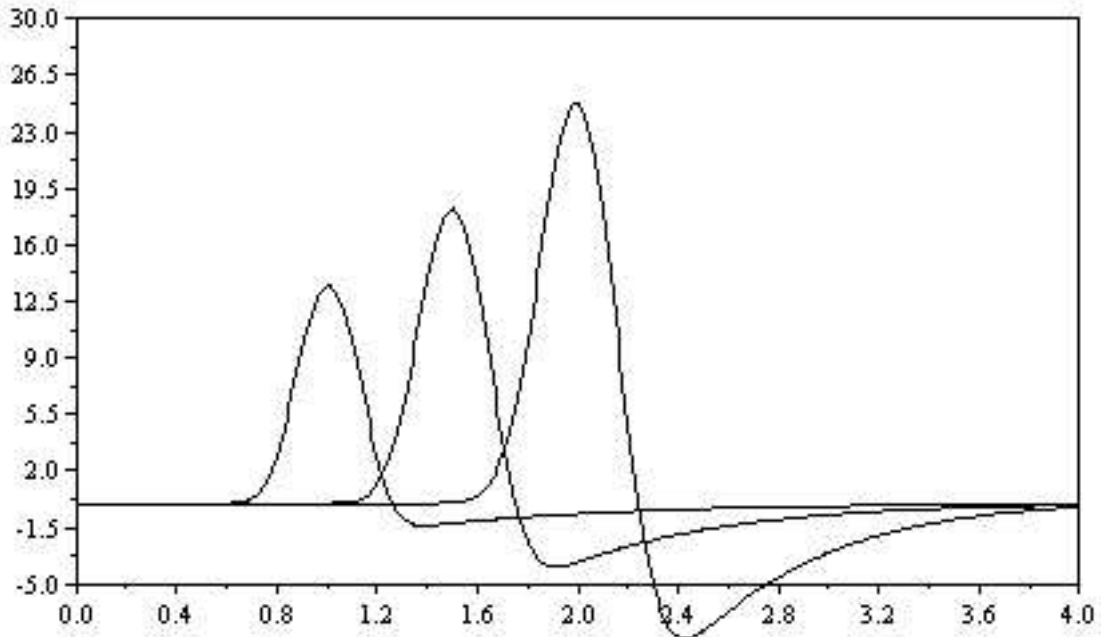
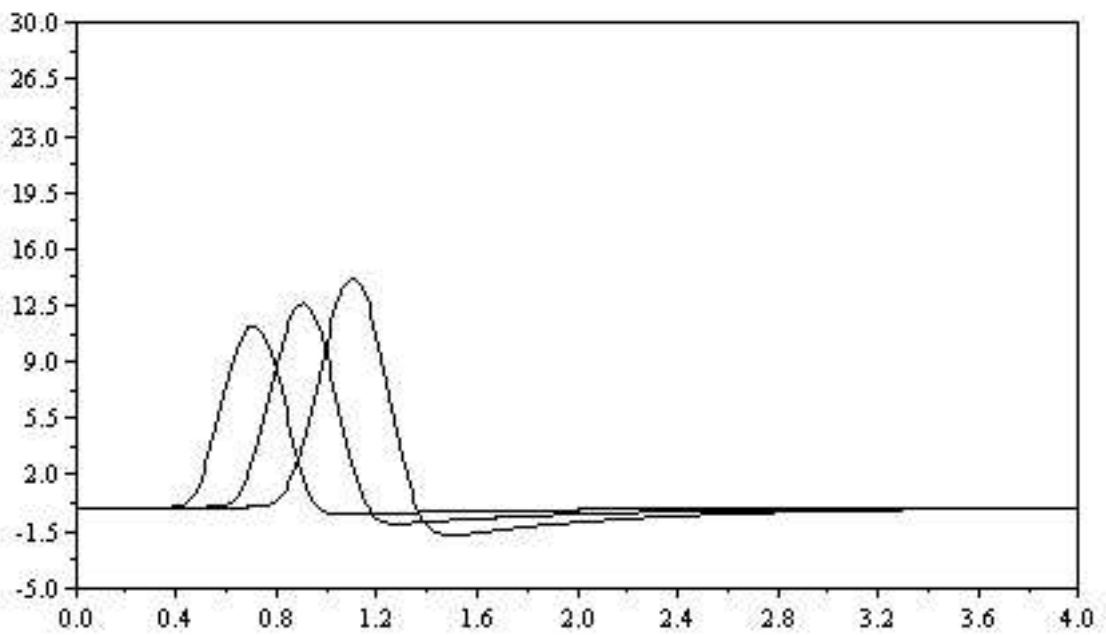


FIG. 3.4 – Simulation numérique réalisée par Sauermann à partir du modèle avec la convolution. Pour plus de lisibilité, les profils sont tracés translatés verticalement pour chaque instant. ([6])

On peut étudier l'influence des deux facteurs que sont la pente et la courbure moyennée sur q_{sat} et donc sur l'évolution de la dune. Les deux graphes fig 3.5 et fig 3.6 montrent que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ influence la vitesse d'avancement de la dune. L'influence du terme en β (effet de pente) est plus visible que celle du terme en α (effet de courbure). On voit sur ces graphes que en passant de $\beta = 40$ à $\beta = 100$ (à α fixé), au bout du même nombre d'itérations ($t=1500$), la dune est beaucoup haute et décalée avec le β grand.

FIG. 3.5 – Simulation pour $\alpha = 0.01$ et $\beta = 100$ pour $t=1500$ FIG. 3.6 – Simulation pour $\alpha = 0.01$ et $\beta = 40$ pour $t=1500$

Par contre, lorsqu'on passe de $\alpha = 0.0001$ à $\alpha = 1$ (à β fixé) l'écart d'évolution de la dune est moins nette mais n'est pas pour autant négligeable (voir fig

3.7) Plus α est faible est plus l'évolution de la dune se fait rapidement. Ainsi, l'évolution de la dune est le résultat de la compétition entre deux mécanismes opposés : le rôle de α qui aplanit la dune et le rôle destabilisateur de β .

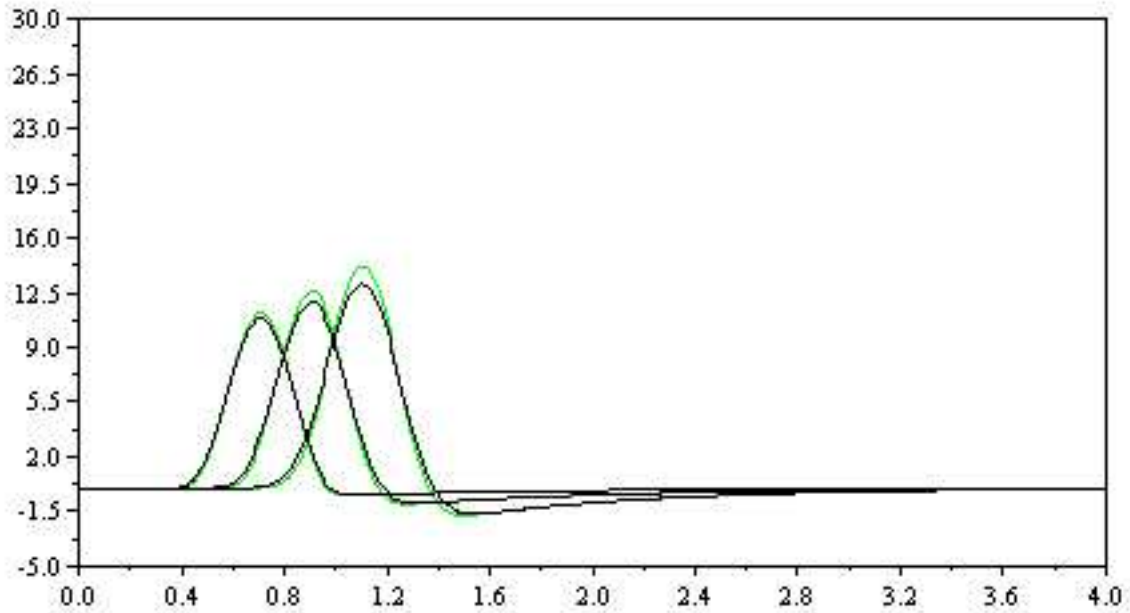


FIG. 3.7 – Simulation pour $\alpha = 0.0001$ (en vert) et $\alpha = 1$ (noir), $\beta =$ est fixé à 40, $t=1500$ encore

3.2.4 Discussion du modèle et prolongements possibles

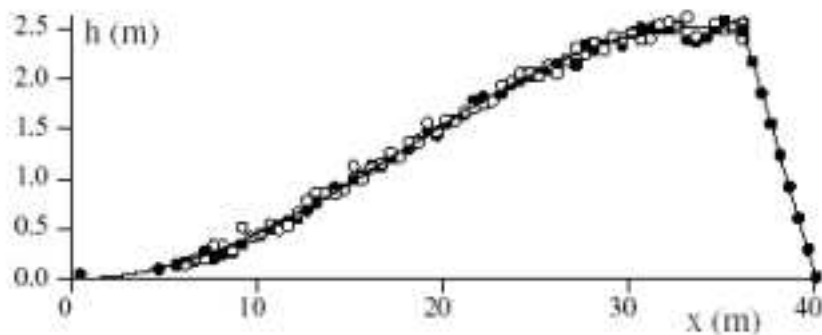


FIG. 3.8 – Relevé du profil d'une dune dans le Sud du Maroc. ([5])

Ce modèle, même s'il restitue le déplacement d'une bosse ne prend pas en compte tout les effets qui aboutiraient à l'évolution d'une vrai dune. En effet si on regarde le relevé de position d'une dune dans le Sud du Maroc (voir fig 3.8), on voit qu'apparaît un phénomène de "bulle de recirculation", c'est ainsi que Sauermann nomme ce mécanisme. Il vient du fait que le vent ne suit pas toujours le profil de la dune, il peut décrocher du profil et recoller un peu plus loin derrière la dune. Ainsi se crée juste derrière la dune une "bulle" où le vent souffle beaucoup moins fort. En conséquence, tout le sable érodé glisse sous forme d'avalanche juste derrière la dune ce qui modifie le profil différemment du modèle. Ce phénomène a été modélisé par Zeman et Jensen ([7]) mais aussi Kroy ([6]). Ils ont obtenu des résultats plus proches de la réalité (voir fig 3.9). Ceci fait partie des limites de notre modèle simplifié et apporter les améliorations de Kroy aurait pu faire l'objet de prolongements de nos travaux.

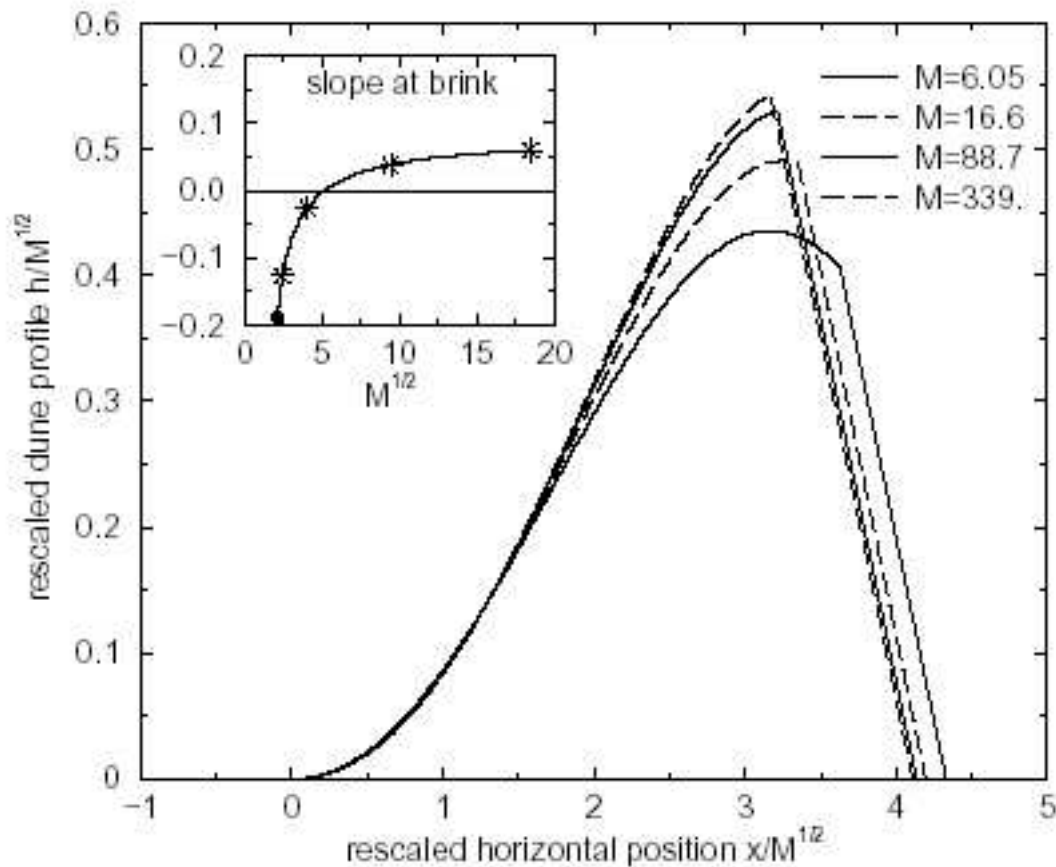


FIG. 3.9 – Amélioration du profil tenant compte du phénomène de "bulle de recirculation". ([5])

Nous avons montré dans cette partie, inspirés par les travaux de Sauermann, qu'il est possible de construire un modèle assez simple en deux dimensions de

la propagation d'une dune. Ce modèle repose sur deux variables principales : le profil f de la dune et le flux de sable q . Cette simulation fait intervenir trois phénomènes qui sont la conservation de la masse, la saturation du flux due à la nature même du sable, et l'effet retour du profil sur le flux. Dans ce système de trois équations, les processus d'érosion et de redépôt apparaissent comme le résultat de l'influence opposée de deux mécanismes : un rôle stabilisateur du terme de courbure moyennée (terme en α) et un rôle destabilisateur du terme de pente (terme en β).

Conclusion

Grace au code CASTEM, on a été capable dans le cadre de notre Travail de Modélisation et de Simulation, de simuler et de tracer l'évolution d'une dune de forme donnée. Cette étude nous a aussi permis de constater que l'étude de la propagation des dunes de sable est un sujet d'actualité dans le monde de la recherche et qu'il est l'objet de nombreuses publications très variées. Plusieurs modélisations ont été faites pour le calcul du frottement pariétal et pour l'influence réciproque de la topographie du profil sur le flux de matière. Nous n'avons pas pu toutes les aborder mais chaque modèle étudié nous a permis de mettre en évidence un facteur particulier qui joue un rôle dans la progression de la dune. Ainsi, par exemple, le dernier modèle traité par différences finies nous a montré l'influence de la pente et de la courbure de la dune.

Cette étude permet aussi de cerner la limite d'une modélisation globale des phénomènes ; même par éléments finis, on doit souvent avoir recours à des modélisations simplifiées des phénomènes physiques. Et, comme nous le montre la littérature en la matière, les modèles sur le sujet sont très nombreux et parfois avec des résultats très différents. Ceci ne fait que souligner la variété du problème qu'est l'évolution des dunes de sable.

Bibliographie

- [1] K.K.J Kouakou, H. Caps & P.Y Lagrée, *Comparaison numérique analytique et asymptotiques pour l'écoulement sur une dune sous-marine*, sept 2003
- [2] K.K.J Kouakou, *Erosion et sédimentation dans un canal*, juin 2003
- [3] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, dec 2002
- [4] P.-Y Lagrée, *Erosion sédimentation d'une dune*, fev 2004
- [5] B. Andreotti, P. Claudin and S.Douady, "*Selection of dunes shapes and velocities. Part 2 : A two dimensionnal modelling*",page 1-12
- [6] K. Kroy, G. Sauermann and H.J. Herrmann, "*A minimal model for sand dunes*",submitted to Phys. Rev. Lett., cond-mat/0101380 (2001).B.
- [7] N-O. Jensen and O. Zeman, "*in International workshop on the physics of blown sand*", Barndor-Nielsen, Moller, Rasmussen and Willets editors, University of Aarhus, 351-368 (1985).
- [8] C.T. Yang, "*Sediment Transport : Theory & Practice, McGraw-Hill Education Europe*", 1995.