

Travaux de modélisation et simulation

Erosion sédimentaire d'une dune

Marie Borni et Nicolas De Rycker

25/03/2002

Table des matières

1	Ecoulement sur une plaque plane	2
2	Modélisation du problème de la dune	6
2.1	Partie théorique	6
2.1.1	Le flux de matière : couplage fluide/paroi érodable	6
2.1.2	Le frottement pariétal	7
2.2	Validation avec Castem	9
2.2.1	Programme général de simulation d'écoulement sur une bosse	9
2.2.2	Résultats généraux	11
2.2.3	Variation des paramètres	14
2.2.4	Comparaison entre le modèle et les résultats de Castem - Approximations envisagées.	15
3	Evolution de la dune	19
3.1	Structure du programme utilisé	19
3.2	Approximation d'Exner (1925)	20
3.3	Approximation de Von Kármán	22
3.4	Introduction d'un frottement seuil	23
A	Programme Castem d'écoulement sur une bosse	26
B	Programme en C d'évolution de la bosse	30

Résumé

Sand dunes develop wherever sand is exposed to an agitating medium (air, water,...) that lifts grains from the ground and entrains them into a surface flow. The diverse conditions of wind and sand supply in different regions on earth give rise to a large variety of different shapes of aeolian dunes. This kind of problem is very important as it can have dramatic consequences on housing and plantations. Moreover, dunes have been found on Mars, thus we can see that this field is broad and worth studying. Despite the long history of the subject, the underlying physical mechanisms of dune formation are still not very well understood, involving many different phenomena.

The literature on the topic is dense, we only focused on some of the possible articles, restraining ourselves only on some parts of these articles. The objective is to simulate the evolution of a dune subjected to a constant laminar wind. First we study the problem of a laminar outflow on a plane patch thanks to the software Castem 2000 in order to make some relevant remarks to approach then the differences due to the presence of a dune. In a second part, we expose the theoretical models used later in our simulations. The latter consist in two steps : Thanks to Castem 2000 we resolve the Navier-Stokes equations with variations of the parameters. The results enable us to validate our theoretical results and use them in our simulation of evolution in a programme in C.

Introduction

Des dunes de sable se forment partout où du sable est exposé à une force agitatrice (due au vent, à l'eau, ...) qui soulève les grains de sable et crée un flux en surface. Les types de vent et de sable entraînent une grande variété de dunes sculptées. L'écoulement de l'air sur une dune peut faire évoluer cette dernière de manière très différente. Ce type de problème est très important dans la pratique, il peut en effet toucher habitations et plantations de manière très marquée. D'autre part, des dunes ont été trouvées sur Mars, on voit donc que le champ d'étude est très large. C'est un problème qui reste par contre difficile car il y a couplage entre plusieurs phénomènes.

Nous étudions dans une première partie avec le logiciel Castem le problème d'un écoulement laminaire sur une plaque plane afin de faire un certain nombre de remarques générales pour pouvoir aborder ensuite les différences entraînées par la présence d'une bosse, et pour évaluer les résultats de Castem sur un tel problème. Dans une deuxième partie, nous exposons les modèles théoriques auxquels nous faisons appel lors des simulations. On vérifie si la contrainte pariétale, qui détermine le flux de matière emportée correspond à une formule simplifiée issue entre autres de la théorie de la couche limite. Les simulations se font en deux étapes : Grâce à Castem 2000, on résout les équations de Navier Stokes et en faisant varier le maillage, la taille de la bosse, le nombre de Reynolds, nous faisons ensuite une analyse plus précise de cet écoulement. Les résultats obtenus nous permettent de valider nos résultats théoriques que nous réutilisons ensuite pour simuler l'évolution d'une dune sous un vent constant grâce à un programme en C.

Chapitre 1

Écoulement sur une plaque plane

L'étude de l'écoulement sur une plaque plane se fait grace au logiciel Castem. Nous ne détaillons pas le programme ici, nous le faisons dans une partie suivante au moment où nous analysons l'écoulement sur une bosse. Il s'agit juste ici de faire un certain nombre de remarques générales, nous rentrerons plus tard dans les détails.

Nous étudions l'écoulement laminaire d'un vent venant en amont avec une vitesse uniforme selon e_x , la seule autre condition imposée est une vitesse nulle au sol (fluide visqueux). Nous visualisons ci-dessous, après convergence de l'algorithme qui résout les équations de Navier-Stokes, l'écoulement sur la zone maillée rectangulaire (Fig. 1.1), le profil de pression au sol (Fig. 1.2) et le frottement pariétal τ (Fig. 1.4), qui correspond à la composante tangentielle de la contrainte exercée par le fluide sur la paroi. Il est directement relié au flux de matière emportée par le vent, nous en parlons plus en détail dans la partie suivante en en donnant également son expression mathématique.

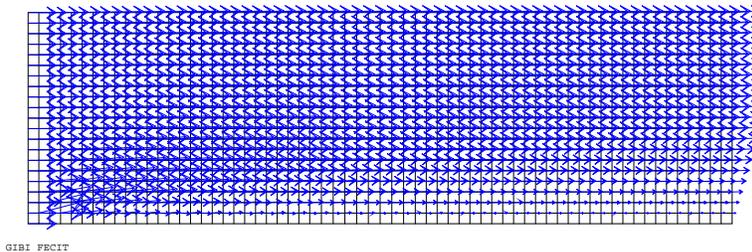


FIG. 1.1 – écoulement laminaire sur une plaque plane

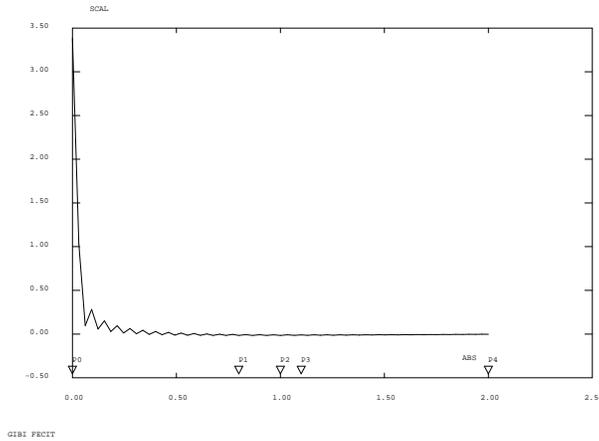


FIG. 1.2 – pression au sol

On constate immédiatement des problèmes au niveau du point $a0$ où on a à la fois u nul et égal à 1 car le point appartient à la fois au sol et à l'entrée. Ces conditions aux limites interfèrent, donnant le profil douteux que l'on observe. Mais la zone considérée est suffisamment longue pour considérer qu'en sortie cette perturbation n'a plus aucune conséquence et qu'on y observe bien le profil d'écoulement laminaire de fluide visqueux sur plaque plane. On voit d'ailleurs très bien à la sortie le profil de vitesse typique d'un écoulement de fluide visqueux sur une paroi plane. La théorie de la couche limite d'un écoulement sur une plaque plane [1] nous donne une pression dont le profil correspond à celui qui est observé avec une annulation assez rapide. On observe par contre des oscillations parasites qui proviennent sans doute encore de cette interférence de conditions aux limites. La Figure 1.3 montre le champ de pression dans toute la zone, on y voit immédiatement l'origine de la perturbation, à savoir une forte surpression en entrée.

Dans l'étude de l'écoulement sur une bosse, nous utiliserons le profil de sortie observé ici pour éviter ce genre de perturbation : le profil observé en sortie ici sera modélisé et imposé en entrée de l'écoulement sur la bosse afin de simuler un écoulement venant de suffisamment loin et pour diminuer au maximum l'influence des interférences.

Enfin, le frottement pariétal a l'allure suivante (Fig. 1.4) : Le pic observé en $a0$ est toujours dû au même problème. La théorie de couche limite nous donne

$$\tau = \frac{0.3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1.1)$$

Le graphe 1.5 nous montre la superposition des deux courbes. Le vent qui arrive sur une plaque plane va emmener de moins en moins de sable au fur et à mesure de son avancement.

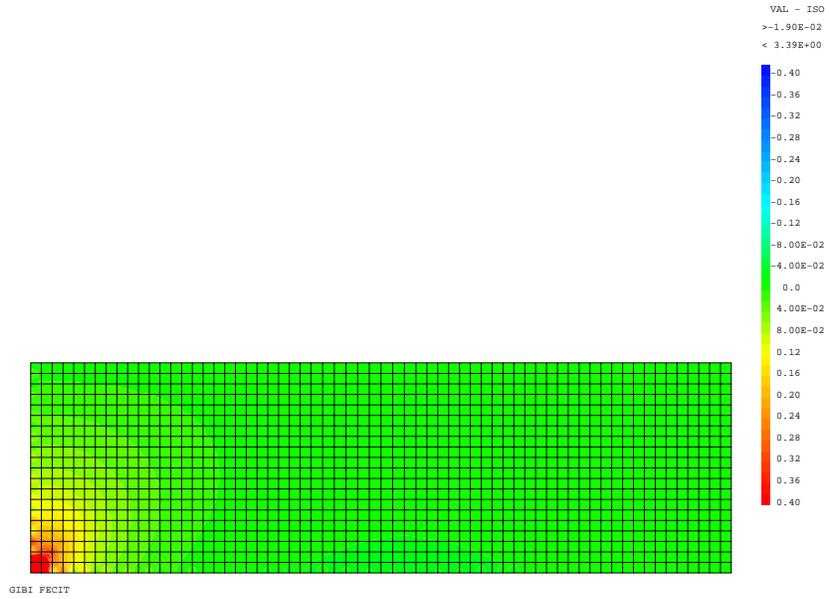


FIG. 1.3 – champ de pression

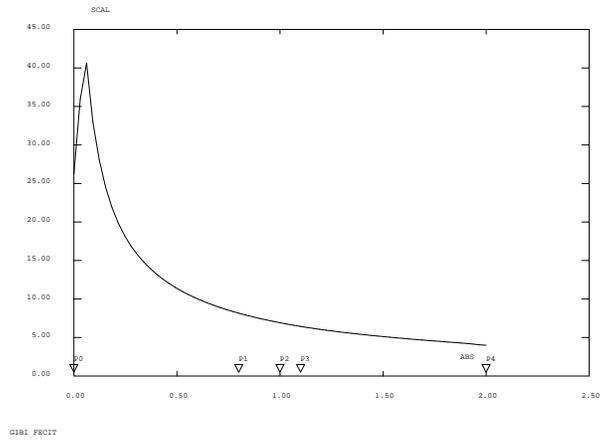


FIG. 1.4 – frottement pariétal

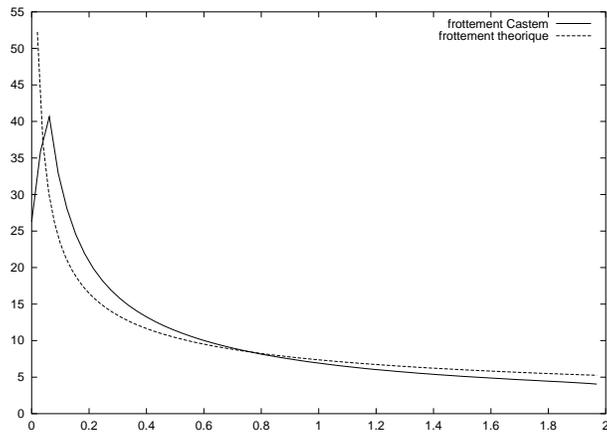


FIG. 1.5 – comparaison du frottement pariétal issu de la simulation et de la théorie

Après cette étude succincte de l'écoulement sur une plaque plane, nous allons introduire une dune de hauteur faible. Cette perturbation de la paroi entraîne des modifications dans l'écoulement. Une étude théorique préliminaire va nous permettre de modéliser l'influence de cette perturbation.

Chapitre 2

Modélisation du problème de la dune

2.1 Partie théorique

2.1.1 Le flux de matière : couplage fluide/paroi érodable

On note $f(x)$ la forme de la bosse et q le flux de matière emporté (débit à travers une unité de longueur verticale par unité de temps), un simple bilan de conservation de la masse de fluide entre x et $x + dx$ nous donne :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2.1)$$

qui relie le taux d'érosion $-\frac{\partial f}{\partial t}$ et la divergence du flux q . On peut noter que cette expression traduit aussi la migration du profil de surface à la vitesse v :

$$v \propto \frac{\partial q}{\partial f} \quad (2.2)$$

Il s'agit donc de modéliser le flux de matière emporté et de le relier au frottement pariétal noté τ : $q = g(\tau)$. Lorsqu'on regarde la littérature consacrée à la détermination de l'expression de q , on trouve un certain nombre d'expressions correspondant à différents niveaux d'approximations ([4] et [5]).

Dans un premier temps, on peut ainsi les relier en disant qu'ils sont proportionnels :

$$q_s \propto \tau \quad (2.3)$$

(parfois même $q \propto \tau^\beta$). Certains considèrent que le flux de matière emporté est tel qu'il y a entraînement de matière si le frottement dépasse un seuil τ_s , sinon non (cela paraît logique, il faut tenir compte du fait que le sol est plus ou moins meuble) :

$$q = \begin{cases} \tau - \tau_s & \text{si } \tau > \tau_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

Mais les expressions précédentes sont insuffisantes pour décrire clairement les phénomènes. Elles doivent notamment tenir compte de l'effet de saturation : si on considère une parcelle de sable sur laquelle le vent souffle, le flux q augmente d'abord mais sature après une longueur caractéristique l_{sat} à cause du phénomène de rétroaction des grains de sable sur la vitesse du vent (l_{sat} dépend a priori d'un certain nombre de paramètres tels que les masses volumiques de l'air et du sable, du diamètre moyen du grain de sable et de la vitesse du vent).

Il est important de montrer qu'une valeur de saturation q_{sat} est atteinte après la longueur l_{sat} . On modélisera donc dans un deuxième temps le couplage de la façon suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q_{sat} - q}{l_{sat}} \quad (2.5)$$

L'équation précédente est uniquement vraie si des grains de sable sont accessibles sur le lit de sable (sur un sol trop dur par exemple le flux ne pourra pas augmenter et atteindre une valeur saturante). Des études indiquent qu'on peut multiplier le second membre de l'équation précédente par une fonction appropriée qui tend vite vers 0 quand f est inférieure (par exemple) au diamètre du grain et qui vaut 1 au dessus de cette valeur (la hauteur d'un sol dur est $f = 0$). Dans ce cas là, l'équation précédente peut devenir non-linéaire.

2.1.2 Le frottement pariétal

Si $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur-contrainte, alors $\tau = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$ où \underline{n} est le vecteur normal et \underline{t} le vecteurs tangent à f .

On a $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{d}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Dans l'hypothèse d'une petite bosse, $\underline{n} \approx \underline{e}_y$ et $\underline{t} \approx \underline{e}_x$. D'autre part, avec un écoulement uniforme et horizontal à l'infini, les approximations habituelles donnent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

On a donc :

$$\tau \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.8)$$

La suite de la réflexion consiste maintenant à trouver une expression simplifiée de τ qui sera nécessaire dans les simulations d'évolution de la dune. Il faut donc relier la perturbation du frottement pariétal à la forme de la dune :

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = F[f]$$

Pour cela il faut étudier l'écoulement près de la paroi, en considérant le problème intérieur de couche limite. Ecrivons alors les équations de couche limite (éq. de Prandtl) avec gradient de pression :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u = v = 0 \text{ pour } y = 0 \quad ; \quad u = U(x) \text{ pour } y \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Ces équations sont obtenues en appliquant les approximations usuelles de couche limite aux équations de Navier Stokes.

$U = U(x)$ est la vitesse du fluide à la la frontière extérieure de la couche limite. C'est aussi la vitesse à la limite inférieure du problème extérieur, où la viscosité n'intervient plus. On a donc :

$$U(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_{ext}(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} u_{int}(x, y) \quad (2.12)$$

On peut alors se ramener au frottement pariétal en intégrant transversalement l'équation (2.10) suivant l'épaisseur totale de la couche limite [3] :

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = -\frac{\tau}{\rho}$$

La vitesse normale v se réécrit à partir de l'équation de continuité : $v = -\int_0^y \partial u / \partial x dy$. On peut alors intégrer le deuxième terme par parties :

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

On a donc :

$$\int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau}{\rho}$$

que l'on peut réécrire :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^h (U - u) dy = \frac{\tau}{\rho} \quad (2.13)$$

Les intégrants étant nuls en dehors de la couche limite, on peut prolonger l'intégration jusqu'à $y \rightarrow \infty$. Introduisons alors deux épaisseurs caractéristiques δ_1 et δ_2 telles que :

$$\delta_1 U = \int_0^\infty (U - u) dy \quad \delta_2 U^2 = \int_0^\infty u(U - u) dy$$

L'équation (2.13) se réécrit alors :

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2\delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} = U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (\delta_1 + 2\delta_2)U \frac{dU}{dx}$$

En posant : $H = \delta_1/\delta_2$ et f_2 tel que $\tau/\mu = (\partial u/\partial y)_0 = f_2 H U/\delta_1$, on obtient l'équation de Von Kármán :

$$\nu \frac{f_2 H}{U \delta_1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_1}{H} \right) + \delta_1 \left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}$$

soit sous forme adimensionnée :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\bar{\delta}_1}{H} \right) = \bar{\delta}_1 \left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{1}{\bar{U}} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} - \frac{f_2 H}{\bar{\delta}_1 \bar{U}} \quad (2.14)$$

Cette équation différentielle sur δ_1 contient encore les inconnues H et f_2 . Pour simplifier, on suppose que la bosse est petite et que l'on reste près de la solution de Blasius pour la plaque plane : $H \simeq H_0 = 2.59$, $f_2 \simeq f_{20} = 0.25$. L'équation (2.14) se ramène donc à une équation différentielle sur la seule inconnue $\bar{\delta}_1$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta}_1^2 \right) = \left[\left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{H}{\bar{U}} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \right] \bar{\delta}_1^2 - \frac{f_2 H^2}{\bar{U}} \quad (2.15)$$

Cette équation, que l'on pourra résoudre par une méthode de différences finies, permet de relier δ_1 à la vitesse U . On a vu (cf. éq.2.13) que U est la limite pour $y \rightarrow 0$ de la vitesse dans le problème extérieur de fluide parfait. Pour une petite bosse de profil $\varepsilon L f(x)$, la théorie des petites perturbations de fluide parfait permet alors de trouver $U(x)$ [1] :

$$U = U_\infty \left(1 + \varepsilon \frac{1}{\pi} \int \frac{f'}{x - \xi} d\xi + \dots \right) \quad (2.16)$$

Ainsi, l'approximation de Von Kármán et la théorie des petites perturbations de fluide parfait nous permettent de déterminer une approximation du frottement pariétal :

$$\frac{\tau}{\mu} = f_2 H \frac{U}{\delta_1} \quad (2.17)$$

Tout ceci est une modélisation, dans laquelle nous avons fait un certain nombre d'approximations. Pour évaluer la pertinence de ce modèle dans le but de calculer l'évolution d'une dune soumise à un vent constant, nous avons alors utilisé le logiciel Castem pour comparer les résultats du modèle avec ceux d'un outil de résolution plus fort.

2.2 Validation avec Castem

2.2.1 Programme général de simulation d'écoulement sur une bosse

Le programme est donné en entier en ANNEXE A. Castem travaille sur des surfaces maillées. Il s'agit dans un premier temps de faire résoudre les équations

de Navier-Stokes sur un profil plan avec une bosse de forme triangulaire (la base du triangle est formé par la base $[a1a3]$ et le sommet $a2$. Il faut garder à l'esprit la fait que les approximations diverses nécessitent de travailler sur une petite bosse.

La 1ère partie du programme consiste à mailler la zone rectangulaire en la découpant de façon intelligente, pour visualiser correctement les zones où nous aurons des observations à faire au niveau de la bosse et derrière celle-ci. Nous avons choisi de conserver le même pas de maillage sur toutes les droites (ce pas est déterminé au début du programme de maillage et peut être changé à tout moment) et de travailler sur des quadrillages plutôt que sur des maillages en triangles. Divers essais nous ont en effet donné une impression de "plus grande régularité" avec le quadrillage. Nous avons d'autre part choisi une zone de travail suffisamment longue pour pouvoir négliger, en arrivant sur la bosse, les problèmes que nous avons observés précédemment.

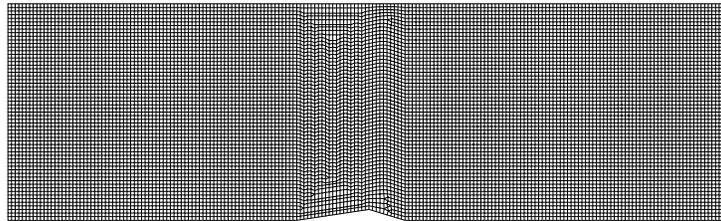


FIG. 2.1 – notre maillage

La 2ème partie consiste en la résolution des équations de Navier-Stokes.

$$\nabla u = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (2.19)$$

Il faut également préciser les conditions aux limites : au sol les conditions d'interface entre un fluide visqueux et un solide : $u = v = 0$, en entrée une vitesse uniforme selon e_x (et même $u = 1$ car Castem travaille avec des équations adimensionnées) sauf pour l'entrée "proche du sol" en a_0 où, pour reproduire l'écoulement obtenu en sortie d'un écoulement laminaire sur une plaque, on a imposé un gradient de vitesse en $y/l e_x$.

On se place dans le cadre d'écoulements laminaires car c'est une modélisation qui est plus facile à simuler en laboratoire. Ce cas est une première approche de l'érosion sédimentaire d'une dune.

La valeur du nombre de Reynolds qui est déterminante (qui correspond en fait à $1/\nu$, Castem travaillant avec des équations adimensionnées) est prise égale à 200. Nous la ferons varier plus tard en commentant les résultats obtenus. Nous

avons travaillé avec des nombres de Reynolds variant entre 200 et 5000. Cela peut surprendre compte tenu des valeurs réelles des coefficients pour l'air ou l'eau, mais nos approximations, modélisations et simulations restent des maquettes. Des nombres de Reynolds trop élevés introduisent de la turbulence. Or nous nous sommes placés dans un cadre laminaire. Travailler avec nos valeurs permet tout de même un certain nombre d'observations pertinentes.

Concernant le nombre d'itérations du programme, il s'agit bien sûr de choisir un nombre de pas suffisant pour faire converger la solution du programme. Nous introduisons pour cela un système de calcul d'erreur : nous calculons à chaque pas $|u_n - u_{n-1}|$ et $|v_n - v_{n-1}|$ et nous en prenons les maxima sur tout le maillage. Nous avons intégré au programme quelques lignes qui permettent de le faire tourner jusqu'à descendre en-dessous d'une certaine erreur seuil. Nous avons considéré qu'avec une erreur plus petite que 10^{-4} il y a convergence de la solution (mais nous n'avons pas étudié l'évolution de l'erreur en détail).

Puis, avec quelques dernières lignes de programme, nous nous laissons la possibilité de visualiser le maillage, l'écoulement, le profil général de pression, la pression au sol, le frottement pariétal.

2.2.2 Résultats généraux

Avant de faire varier les paramètres, on peut faire un certain nombre de remarques générales : les Figures 2.2 et 2.3 représentent l'écoulement dans tout le domaine, ainsi que le champ de pression.

Il faut rester prudent lors de l'interprétation des graphes. La condition limite imposée en a_0 entraîne quelques perturbations qui peuvent mettre une certaine distance à se résorber. Il ne faut pas tenir compte de la valeur élevée de τ (et de la surpression) en a_0 et prévoir une distance suffisamment grande en amont de la bosse.

En analysant la pression au sol (Fig. 2.4, en faisant abstraction de la pression élevée à l'origine, on constate que la pression est quasi-nulle (Cf écoulement sur une surface plane) sauf en amont de la bosse (surpression) et tout de suite après celle-ci (dépression), les deux phénomènes sont évidemment liés au changement de profil du sol.

Parallèlement on observe également une variation du frottement pariétal en fonction de f (Fig. 2.5). Il augmente entre a_1 et a_2 , il est maximal avant le sommet de la bosse et rediminue ensuite. En a_3 , il redescend plus bas que sa valeur avant la bosse. Cette dissymétrie de τ traduit en fait l'histoire de la couche limite qui sera plus épaisse à la sortie de la bosse.

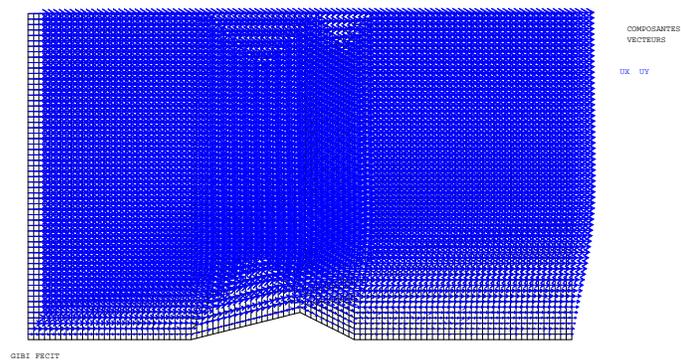


FIG. 2.2 – champ de vitesse

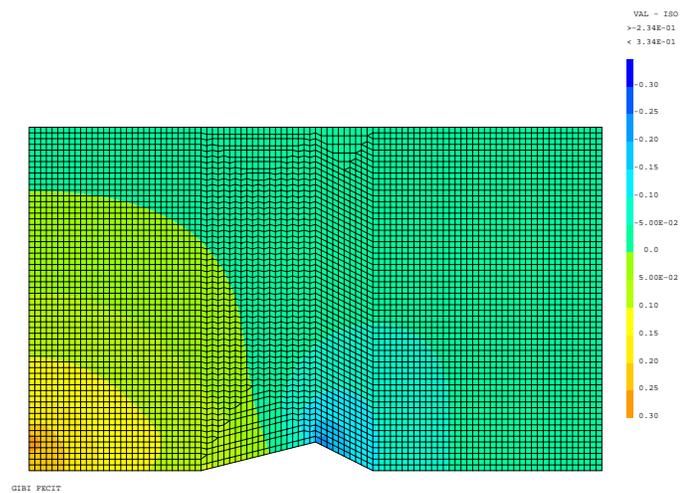


FIG. 2.3 – champ de pression

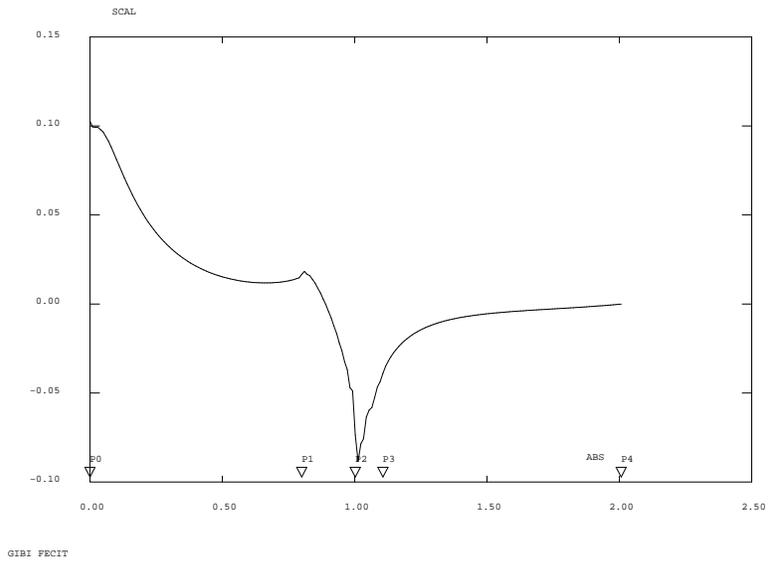


FIG. 2.4 – pression au sol

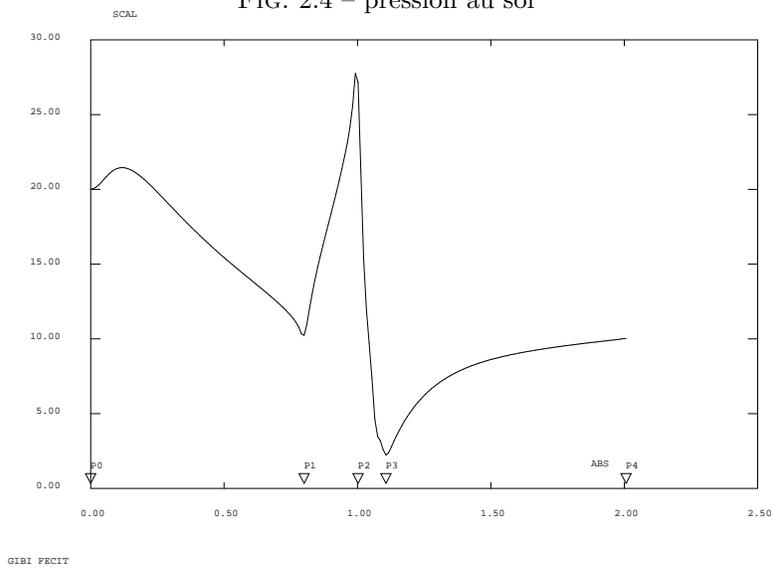


FIG. 2.5 – frottement pariétal

2.2.3 Variation des paramètres

Nous avons également fait varier deux paramètres : la hauteur de la bosse et la valeur du nombre de Reynolds par l'intermédiaire de la viscosité. En faisant varier la hauteur de la bosse (donc la pente de celle-ci si on maintient constante sa largeur), on constate que les variations de τ sont beaucoup plus marquées avec des bosses de plus en plus hautes. On se rend compte qu'en aval de la bosse on pourra parfois observer la naissance d'un tourbillon. Ce dernier commence à apparaître à partir d'une certaine hauteur de bosse. Ce phénomène peut se voir sur l'évolution du frottement pariétal.

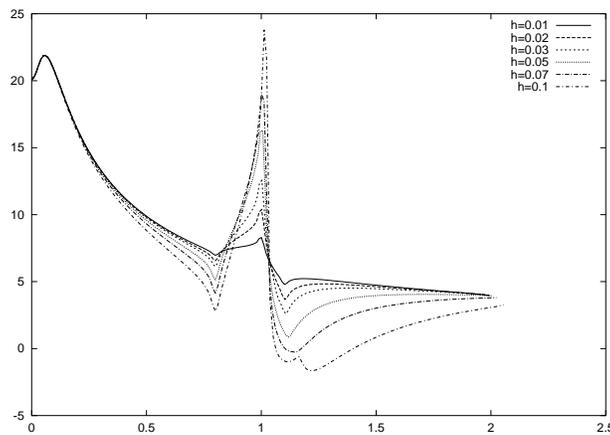


FIG. 2.6 – variation du frottement pariétal avec la hauteur de la bosse

Nous voyons qu'à partir d'une certaine hauteur de bosse ce dernier devient négatif juste derrière la bosse (on observe une irrégularité, une sorte de saut très visible). Le raccordement (lorsque la vitesse selon e_x redevient positif) correspond au moment où τ redevient lui aussi positif. La longueur sur laquelle le frottement est négatif peut donc nous donner une idée de la longueur nécessaire à ce fameux raccordement. Les résultats sortent par contre de notre cadre d'approximation à partir d'une trop grande hauteur.

On constate que plus le nombre de Reynolds est faible -i.e. plus le fluide est visqueux- plus le frottement pariétal est faible. Le fluide a beau être plus visqueux (et donc sembler accrocher la paroi), sa faible vitesse à la paroi ne lui permet pas d'engendrer un grand flux de matière. On constate également qu'à partir d'une certaine valeur de Re , on commence à observer un saut similaire à celui décrit précédemment juste après la bosse (cf (Fig. 2.7)) C'est le même phénomène de turbulence qui apparaît.

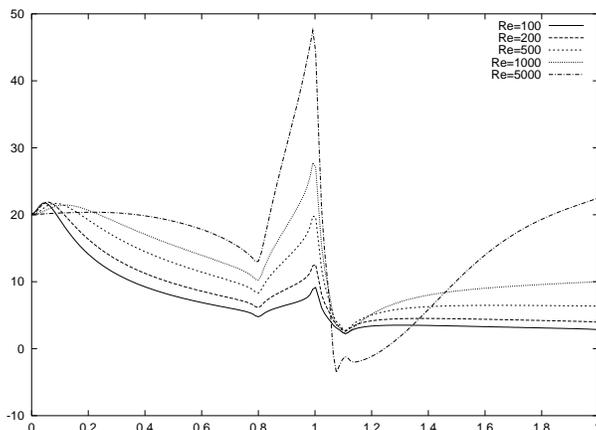


FIG. 2.7 – variation du frottement pariétal avec Re

2.2.4 Comparaison entre le modèle et les résultats de Castem - Approximations envisagées.

Pour valider la modélisation et les approximations faites au §2.1, nous allons maintenant comparer les résultats obtenus par ce modèle avec ceux obtenus par la résolution des équations de Navier-Stokes par Castem. En effet, on suppose que la résolution avec Castem donne une représentation assez exacte de l'écoulement (c'est ce qu'on a vu par exemple dans le cas de la plaque plane). Cette validation nous autorisera à utiliser la modélisation précédente pour une simulation numérique d'évolution de la dune.

On écrira désormais des variables adimensionnées, en omettant les symboles d'adimensionnalisation pour alléger l'écriture. Pour calculer le frottement pariétal obtenu avec le modèle retenu, on utilise un programme en C (donné en annexe B). On initialise d'abord le profil $y = f(x)$ de la dune. Pour se placer dans le même cadre que la résolution effectuée avec Castem, on prend pour l'instant un profil triangulaire. On calcule alors la vitesse (adimensionnée) de glissement à la paroi en fluide parfait :

$$U = 1 + \frac{1}{\pi} \int \frac{f'(\xi)}{x - \xi} d\xi + \dots$$

Dans le cas particulier d'un profil triangulaire, on peut calculer analytiquement l'expression de U :

$$U = 1 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{b-a} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| - \frac{h}{c-b} \ln \left| \frac{x-b}{x-c} \right| \right] \quad (2.20)$$

Puis on résoud l'équation de Von Kármán (éq. (2.15)) discrétisée pour trou-



ver δ_1 , ce qui permet de calculer le frottement pariétal adimensionné :

$$\tau = f_2 H \frac{U}{\delta_1}$$

Les Figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement le frottement pariétal calculé par Castem, et celui obtenu par la modélisation pour différentes hauteurs réduites de bosse. On constate que ce frottement a la même allure dans les deux cas. En effet, on retrouve bien le fait qu'il est maximal au sommet de la bosse, et minimal au voisinage de la base. Cependant le résultat de la modélisation est plus piqué au niveau des valeurs extrémales. En effet, l'expression (2.20) montre que les points anguleux de la bosse triangulaire introduisent des singularités, ce que l'on ne retrouve pas avec Castem car la viscosité lisse les gradients.

De plus, la vitesse $U(x)$ suit aussi les mêmes variations que le frottement pariétal, toujours pour des faibles hauteurs réduites. Les Figures 2.10, 2.11 et 2.12 représentent respectivement le frottement obtenu par Castem, celui obtenu par modélisation, et la vitesse U juste au niveau de la bosse. On constate alors que cette vitesse se rapproche elle aussi fortement du frottement obtenu avec Castem. On a donc finalement, à des coefficients multiplicatifs près :

$$\tau_{Castem}(x) \sim f_2 H \frac{U(x)}{\delta_1} \sim U(x)$$

Ceci nous permet de valider deux méthodes d'approximation du frottement pariétal :

- l'approximation $\tau \sim U$, utilisée par Exner en 1925, qui sera une première approche pour les calculs d'évolution de la dune
- et l'approximation de Von Kármán qui a été développée au §2.1.

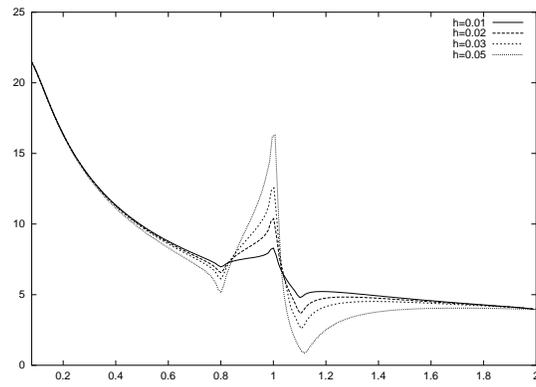


FIG. 2.8 – frottement pariétal calculé par Castem

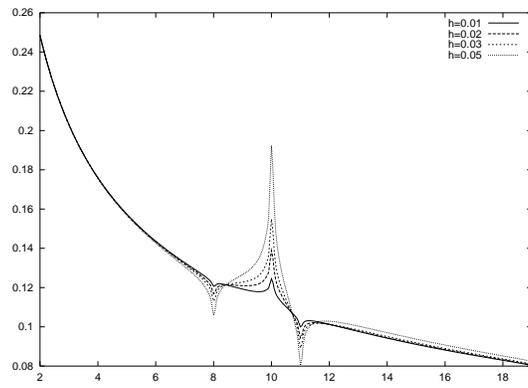


FIG. 2.9 – frottement pariétal obtenu par la modélisation

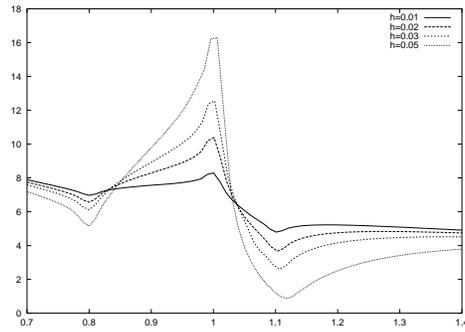


FIG. 2.10 – frottement pariétal obtenu par Castem

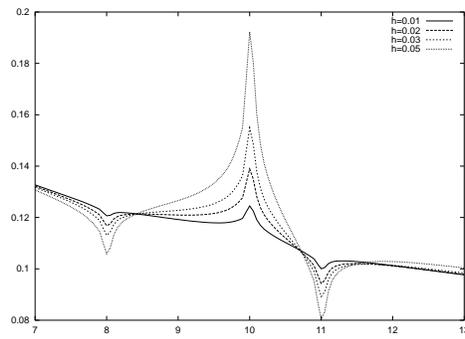


FIG. 2.11 – frottement pariétal obtenu par modélisation

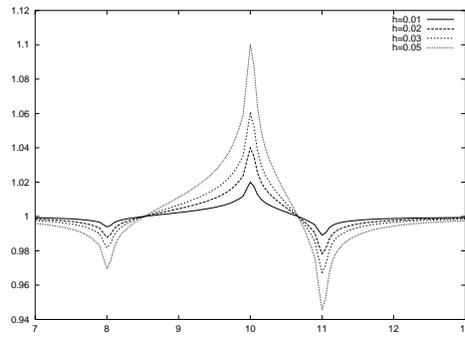


FIG. 2.12 – vitesse $U(x)$

Chapitre 3

Evolution de la dune

3.1 Structure du programme utilisé

Pour simuler l'évolution de la dune, nous utilisons un programme en C qui discrétise l'équation d'évolution $\partial f / \partial t = -\partial q / \partial x$.

On commence par initialiser l'abscisse $x[i]$ et le profil $yw[i]$ de la dune. On prend d'abord un profil gaussien centré en $x = 10$, et de hauteur réduite maximale $h_0 = 0.1$; un profil ainsi lissé reflète en effet mieux la réalité que le profil triangulaire que nous avons utilisé pour la validation du modèle. On prend donc :

$$yw[i] = h_0 e^{-\pi(x[i]-10)^2}$$

Puis une boucle en temps calcule l'évolution du profil de la dune. A chaque pas de temps :

- On calcule la pression à la paroi à l'aide du sous-programme *hilbokx*, qui renvoie la pression du problème de fluide parfait pour des petites perturbations :

$$p = -\frac{1}{\pi} \int \frac{f'}{x-\xi} d\xi$$

- On en déduit la vitesse U de glissement à la paroi en fluide parfait. En fait, les perturbations de U sont celles de $-p$ en termes de fluide incompressible linéarisé. En effet, écrivons la projection sur \underline{e}_x de l'équation de la quantité de mouvement :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En posant : $U = 1 + \varepsilon u + \dots$ et $V = \varepsilon v + \dots$ (d'après les conditions aux limites à l'infini), on a au premier ordre en ε :

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \text{ soit } \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

On écrit donc : $U = 1 - p$ (et on retrouve bien l'expression (2.16)).

- la suite dépend du modèle utilisé pour calculer le flux de matière q . L'idée, après avoir calculé q , est de discrétiser l'équation d'évolution avec un schéma adapté pour calculer le nouveau profil de la dune, puis passer au pas de temps suivant.

3.2 Approximation d'Exner (1925)

La première approximation que l'on peut utiliser est celle faite par Exner, à savoir $q \sim U$. Nous avons alors calculé l'évolution du profil de la dune par l'équation discrétisée :

$$\frac{yw[i+1] - yw[i]}{\Delta t} = -\frac{q[i+1] - q[i-1]}{2\Delta x} \quad (3.1)$$

Mais des instabilités apparaissent très vite dans l'évolution du profil. La Figure 3.1 représente cette évolution pour les premiers pas de temps.

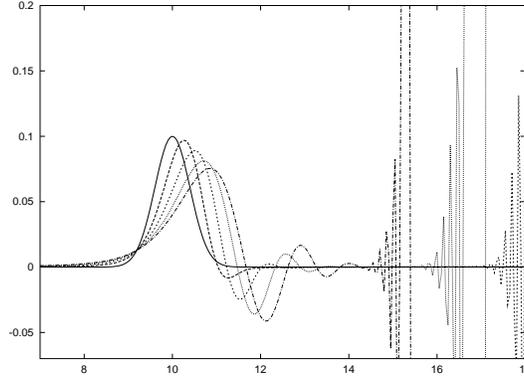


FIG. 3.1 – évolution d'une dune de profil gaussien dans l'approximation d'Exner - schéma centré

En effet, le schéma (3.1) centré en espace que nous avons utilisé n'est pas stable. Nous avons alors utilisé un schéma décentré en amont, qui n'introduit pas cette instabilité venant de la droite :

$$\frac{yw[i+1] - yw[i]}{\Delta t} = -\frac{3q[i] - 4q[i-1] + q[i-2]}{2\Delta x} \quad (3.2)$$

De plus, on modifie le calcul de q en utilisant l'expression (2.5) faisant intervenir dq/dx pour se rapprocher des résultats trouvés dans la bibliographie. Le flux de saturation q_s sera noté ici ar , pour "arrachement". Il correspond dans l'approximation d'Exner à la différence entre la vitesse $U(x)$ et la vitesse limite de la plaque plane, qui est $U = 1$. On voit sur la Figure 3.2 que l'instabilité a disparu, et on peut observer l'évolution de la dune pour des temps plus longs. Celle-ci évolue bien vers la droite (dans le sens de l'écoulement), et elle subit

une dispersion importante : les différentes longueurs d'onde ne se propagent pas à la même vitesse. On aboutit à une succession de dunes de largeur décroissante qui se propage vers la droite. Nous avons également calculé cette évolution pour d'autres profils de dune ; la Figure 3.3 correspond à une dune de profil initial :

$$yw[i] = \frac{h_0}{1 + (x[i] - 10)^2} \quad (3.3)$$

On observe le même type de dispersion. Cette dispersion très rapide n'est pas satisfaisante au vu de la réalité. Elle est sûrement due au comportement physique très simplifié que nous avons modélisé. Nous avons alors utilisé l'approximation de Von Kármán à la place de celle d'Exner.

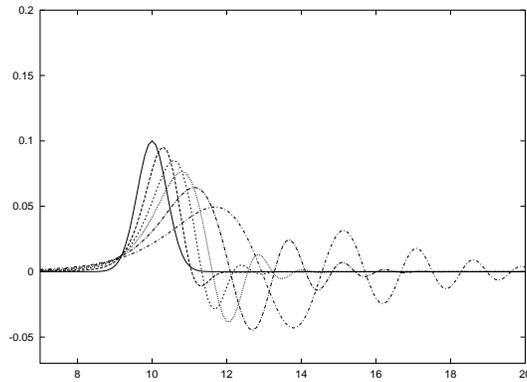


FIG. 3.2 – évolution d'une dune de profil gaussien dans l'approximation d'Exner - schéma décentré en amont

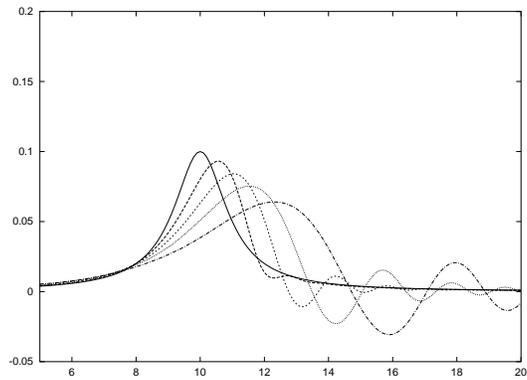


FIG. 3.3 – évolution du profil (3.3) dans l'approximation d'Exner - schéma décentré en amont

3.3 Approximation de Von Kármán

On utilise maintenant l'approximation de Von Kármán (éq. (2.17)) pour calculer le frottement pariétal, et on garde l'expression (2.5) pour le calcul de q . L'arrachement sera alors relié au frottement pariétal, et plus uniquement à la vitesse. Maintenant, ar est la différence entre τ et le frottement limite qui est celui de la plaque plane (éq. (1.1)). On voit sur les Figures 3.4 et 3.5 que la dispersion est moins importante que dans le cas d'Exner, mais elle est toujours très présente.

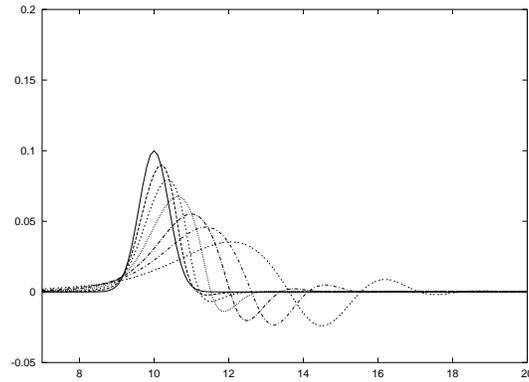


FIG. 3.4 – évolution d'une dune de profil gaussien dans l'approximation de Von Kármán

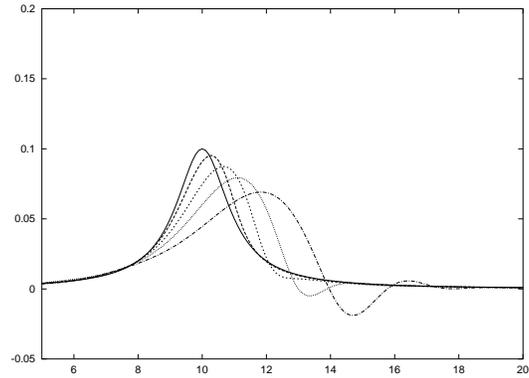


FIG. 3.5 – évolution du profil (3.3) dans l'approximation de Von Kármán

3.4 Introduction d'un frottement seuil

L'utilisation de l'approximation de Von Kármán ne fait donc pas disparaître la dispersion. En effet, il y a toujours des points où l'arrachement est négatif - notamment en aval de la dune - et la dune se creuse alors sous le niveau initial du sol de façon importante. Pour atténuer cet effet, on introduit un frottement pariétal seuil, en-dessous duquel le flux de matière n'est pas modifié par le frottement, c'est-à-dire $ar = 0$. Physiquement, cela correspond au fait que les particules de sable sont sensibles uniquement à un frottement pariétal suffisamment grand, ce qui paraît raisonnable. On prend donc :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -q + \begin{cases} ar = \tau - \tau_s & \text{si } \tau > \tau_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette hypothèse supplémentaire devrait réduire les creux successifs en aval de la dune. Les Figures 3.6 et 3.7 représentent l'évolution pour les deux profils utilisés, avec un frottement seuil, qui est celui de la plaque plane. On voit que la

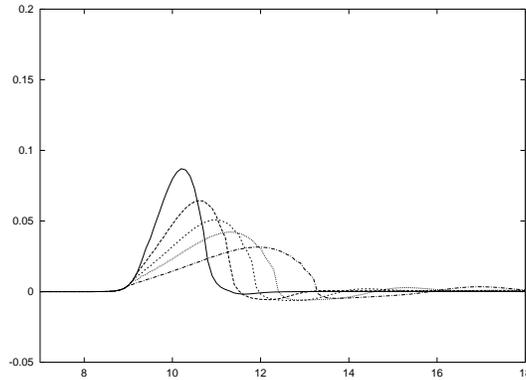


FIG. 3.6 – évolution du profil gaussien avec un frottement seuil τ_s

dispersion de la dune a bien disparu. On observe alors uniquement un étalement de la dune, avec également une disymétrisation importante : en effet, la partie haute de la dune avance plus vite que la base, qui se modifie plus lentement.

De plus, au bout d'un certain nombre d'itérations, la pente de la partie de la dune non exposée au vent devient assez importante. Or dans la réalité cette pente ne peut pas dépasser un certain angle limite, qui est l'angle de talus. Si cet angle est dépassé, des avalanches se produisent, limitant ainsi la pente à cet angle de talus (C'est un comportement général des milieux granulaires). Pour poursuivre notre étude, il faudrait donc inclure dans notre programme d'évolution un calcul des modifications du profil par avalanches lorsque la pente devient trop importante.

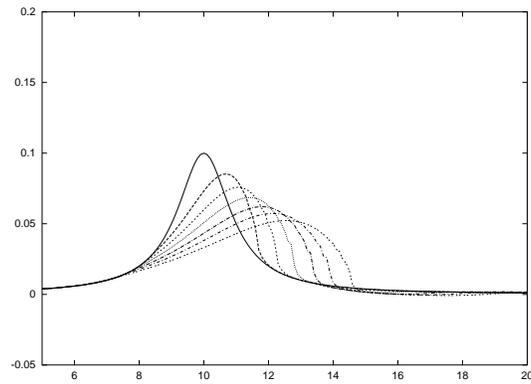


FIG. 3.7 – évolution du profil $h_0/(1+x^2)$ avec un frottement seuil τ_s

Conclusion

L'évolution des dunes de sable sous l'effet du vent est un problème complexe, car les comportements phénoménologiques des dunes font intervenir différentes influences. Le couplage entre l'écoulement du vent et l'érosion de la dune est sujet à de multiples modélisations comme nous avons pu le constater dans nos premières recherches bibliographiques. Il nous a donc fallu retenir certaines modélisations simples, en particulier nous avons considéré uniquement des modèles linéaires. Des non linéarités introduisent de nouveaux phénomènes que nous avons choisi de ne pas aborder dans le cadre de notre étude. L'utilisation de Castem nous a permis de valider le modèle retenu. Cependant il faut garder à l'esprit le fait que Castem est déjà un outil de simulation qui introduit des approximations. De plus, les observations faites avec Castem dépendent fortement du maillage utilisé, des conditions aux limites choisies etc. Mais elles sont bien moins importantes que celles que nous avons effectuées par la suite. En effet, nous avons d'abord considéré des modèles très simplifiés (comme le cas d'Exner sans frottement seuil). Par la suite nous avons raffiné ces modèles pour obtenir des résultats plus convaincants.

La modélisation développée ici nous a permis néanmoins d'obtenir des résultats pertinents pour des dunes de profil assez mince et pour des temps d'évolution pas trop longs. En particulier, on observe une dispersion spatiale assez importante de la dune pour un frottement-seuil bas (voire inexistant), alors que cette dispersion disparaît lorsque le seuil est plus élevé. On observe alors uniquement un étalement de la dune, avec une disymétrisation de celle-ci. Une étude plus poussée pourrait être envisagée avec l'étude de la turbulence, d'équations en q non linéaire et de couplages fluide-solide plus complexes, de phénomène d'avalanches, etc... Enfin, nous avons révisé ici une étude en 2D, des phénomènes encore plus complexes peuvent apparaître en 3D.

Annexe A

Programme Castem d'écoulement sur une bosse

```
\OPTION 'TRAC' PSC; nomfic = 'reyn2.ps'; OPTION 'FTRAC' nomfic;
*les resultats sont rediriges sur monnom.ps *que l'on lit ensuite
avec ghostview.

COMPLET = FAUX ; SI ( COMPLET ) ;
    d1= 0.5 ; d2= 0.02 ;
    nbit = 5000 ;
    err1 = 7.5E-3 ;
SINON ;
    d1 = 1.0 ; d2 = 0.1 ;
    nbit = 10;
    err1 = 7.E-2 ;
FINSI ; GRAPH = 'N' ;
*****
* CALCUL DE L'ERREUR *
*****
DEBPROC CALCUL ; ARGU RVX*'TABLE' ;
RV = RVX.'EQEX' ;
DD = RV.PASDETPS.'NUPASDT' ; NN = DD/5 ; LO = (DD-(5*NN)) EGA 0 ;
SI ( LO ) ;

UN    = RV.INCO.'UN' ; UNM1 = RV.INCO.'UNM1' ;

unx= kcht (rv.'DOMAINE') scal sommet (exco 'UX' un) ; unm1x
=kcht(rv.'DOMAINE') scal sommet (exco 'UX' unm1) ; uny= kcht
(rv.'DOMAINE') scal sommet (exco 'UY' un) ; unm1y = kcht
(rv.'DOMAINE') scal sommet (exco 'UY' unm1) ;
```

```

ERRX = KOPS unx '-' unmx ; ERRY = KOPS uny '-' unmy ; ELIX =
MAXI ERRX 'ABS' ; ELIY = MAXI ERRY 'ABS' ; ELIX = (LOG (ELIX +
1.0E-10))/(LOG 10.) ; ELIY = (LOG (ELIY + 1.0E-10))/(LOG 10.) ;
MESSAGE 'ITER ' RV.PASDETPS.'NUPASDT' 'ERREUR LINF ' ELIX ELIY ;
RV.INCO.'UNM1' = KCHT $mtot 'VECT' 'SOMMET' (RV.INCO.'UN') ; IT =
PROG RV.PASDETPS.'NUPASDT' ; ER = PROG ELIY ; RV.INCO.'IT' =
(RV.INCO.'IT') ET IT ; RV.INCO.'ER' = (RV.INCO.'ER') ET ER ; FINSI
;

```

```

FINPROC ;

```

```

*****

```

```

* MAILLAGE *

```

```

*****

```

```

OPTI DIME 2 ELEM SEG2; h=0.03; L=0.3; *abscisses
a0=0.; a2=1.; a1=(a2-((2./3.)*L)); a3=(a2+((1./3.)*L)); a4=2.;
a5=a4; a6=a3; a7=a2; a8=a1; a9=0; *ordonnees b0=0.; b1=0.; b2=h;
b3=0.; b4=0.; b5=0.6; b6=0.6; b7=0.6; b8=0.6; b9=0.6; *points
p0=a0 b0; p1=a1 b1; p2=a2 b2; p3=a3 b3; p4=a4 b4; p5=a5 b5; p6=a6
b6; p7=a7 b7; p8=a8 b8; p9=a9 b9; *pas du maillage n=0.01; n01=
ENTIER ((a1-a0)/n); n12= ENTIER
(((b2-b1)**2+(a2-a1)**2)**(0.5))/n); n23= ENTIER
(((b3-b2)**2+(a3-a2)**2)**(0.5))/n); n34= ENTIER ((a4-a3)/n);
n45= ENTIER ((b5-b4)/n); n56= ENTIER ((a5-a6)/n); n67= ENTIER
((a6-a7)/n); n78= ENTIER ((a7-a8)/n); n89= ENTIER ((a8-a9)/n);
n90= ENTIER ((b9-b0)/n); n18= ENTIER ((b8-b1)/n); n27= ENTIER
((b7-b2)/n); n36= ENTIER ((b6-b3)/n); 101= DROI p0 n01 p1; 112=
DROI p1 n12 p2; 123= DROI p2 n23 p3; 134= DROI p3 n34 p4; 145=
DROI p4 n45 p5; 156= DROI p5 n56 p6; 167= DROI p6 n67 p7; 178=
DROI p7 n78 p8; 189= DROI p8 n89 p9; 190= DROI p9 n90 p0; 118=
DROI p1 n18 p8; 181= DROI p8 n18 p1; 127= DROI p2 n27 p7; 172=
DROI p7 n27 p2; 136= DROI p3 n36 p6; 163= DROI p6 n36 p3; ct0= 101
et 118 et 189 et 190; ct1= 112 et 127 et 178 et 181; ct2= 123 et
136 et 167 et 172; ct3= 134 et 145 et 156 et 163; ct4= ct0 et ct1
et ct2 et ct3; OPTI ELEM QUA4; SU0= SURF ct0; SU1= SURF ct1; SU2=
SURF ct2; SU3= SURF ct3; mtot= SU0 et SU1 et SU2 et SU3; sol= 101
et 112 et 123 et 134; dro= 145; entr= 190;

```

```

tass mtot ; orienter mtot ;

```

```

'ELIM' 1.E-3 mtot; trac mtot;

```

```

$mtot = DOMA mtot impr ; $dro= DOMA dro;

```

```

mt2 = mtot ; *mt = $mt.maillage ;

```

```

*****

```

```
* RESOLUTION *
*****
```

```
Nu = 1./200. ; tos = 0. 0. ;
```

```
RV = EQEX $mtot 'ITMA' nbit 'ALFA' 0.9
'OPTI' 'SUPG'
'ZONE' $mtot 'OPER' CALCUL
'ZONE' $mtot 'OPER' 'NS' NU 'INCO' 'UN'
'ZONE' $dro 'OPER' 'TOIM' tos 'INCO' 'UN' ;
```

```
YI= 'COOR' 2 entr; YII= ((YI masq supe 0.05)+((YI / 0.05)*(YI masq
eginfe 0.05)));
```

```
RV = EQEX RV
'CLIM' 'UN' 'UIMP' sol 0.
'UN' 'VIMP' entr 0.
'UN' 'UIMP' entr YII
'UN' 'VIMP' sol 0. ;
```

```
RVP = EQPR $mtot KTYPI 1
ZONE $mtot 'OPER' 'PRESSION' 0. ;
```

```
RV.INCO=TABLE INCO ; RV.INCO.'UN'=kcht $mtot VECT SOMMET (1. 0.);
rv.inco.'UNM1' = kcht $mtot 'VECT' 'SOMMET' (1.E-5 1.E-5 ) ;
rv.inco.'IT' = PROG 1 ; rv.inco.'ER' = PROG 0. ; rv.inco.'NBIT' =
0 ; RV.PRESSION =RVP ;
```

```
EXEC RV; repeter bc1 1000; toto= RV.INCO.'ER'; titi=extr toto
(dime toto); si ( titi < -4. ); quitter bc1; finisi; exec rv; fin
bc1;
```

```
*****
* CALCUL DU FROTTEMENT A LA PAROI (dU/dy) *
*****
```

```
UU=exco 'UX' RV.INCO.'UN'; Uxdey= kcht $mtot scal sommet (UU);
GRADU = kops Uxdey 'GRAD' $mtot; DUDY = kcht $mtot scal centre
(exco 'UY' GRADU); DUDY = elno $mtot DUDY;
```

```
*****
* TRACES *
*****
```

```

LISTp = PROG
  -0.4 -0.38 -0.36 -0.34 -0.32 -0.3 -0.28 -0.26 -0.24 -0.22 -0.2
  -0.18 -0.16 -0.14 -0.12 -0.1 -0.08 -0.06 -0.04 -0.02
  0. 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.18 0.2
0.22 0.24 0.26 0.28 0.3 0.32 0.34 0.36 0.38 0.4;

unch = vect RV.INCO.'UN' 0.04 UX UY bleu ; TRACE UNCH mt2 ; pn =
elno $mtot RVP.PRESSION; TRACE LISTp pn mt2; pn0 = evol CHPO pn
SCAL sol; dess pn0; EVOLDUDY = evol 'CHPO' DUDY SCAL sol; dess
EVOLDUDY;

*****
* sauvegarde pour Gnuplot *
*****

x1 = EXTR (EVOL CHPO DUDY sol) ABSC; y1 = EXTR (EVOL CHPO DUDY
sol) ORDO; z1 = EXTR (EVOL CHPO pn sol) ORDO; np= DIME x1; I=0;
*sortie dans le fichier ~.OUT OPTI IMPR 10 IMPR 'reyn2.OUT';
REPETER BCL1 (np-1); I=I+1; xi= EXTR x1 I; yi= EXTR y1 I; zi= EXTR
z1 I; MESSAGE xi ' ' yi ' ' zi; FIN BCL1; OPTI IMPR 6;

*****

fin;

```

Annexe B

Programme en C d'évolution de la bosse

```
#define X11
#ifdef X11
#define CRLF "\n"
#else
#define CRLF "\r"
#endif
#include <stdio.h> #include <stdlib.h> #include "math.h"
#include <string.h>

#define GLURPZ
//#ifndef GLURPZ
/*-----*/
/*on declare des tableaux x position, yw le sol, ywp sa pente, u
vitesse, p pression, tau le frottement et q le flux de matiere */
double*x=NULL,*yw=NULL,*ywp=NULL,*ywn=NULL; double
*u=NULL,*p=NULL,*q=NULL,*tau;
/* fichiers sortie */
FILE *fs,*g;
/*-----*/

int main(void) {
/*-----*/
/* on declare des variables locales */
int i,it,itt,nx; double thetam,m,Lx,dx,Pi,dt,t,h0;

/* Initialisation conditions initiales */
```

```

h0=0.1; nx=400; dx=.05; t=0; dt=dx/50.; Pi=4*atan(1);
thetam=-10000; printf("Resolution des equations de Exner 1925
\n");
printf(" pente d'avalanche theta= %lf          \n",thetam);
printf(" dx= %lf, dt= %lf\n",dx,dt);
printf(" nombre de points %d entre %lf et %lf \n",nx,0, nx*dx);
/* affectation: on affecte de la memoire dynamique      */
x=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
yw=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
ywp=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
ywn=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
u=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
p=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
tau=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
q=(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));
printf(".....\n");
/* initialisation remplissage de x, yw, u et p      */
for (i=0; i<=nx;i++)
  {x[i] = i*dx;
  yw[i]=h0*exp(-Pi*pow((x[i]-10),2));
  //yw[i]=h0/(1+pow((x[i]-10),2);
  /* la bosse est centree en 10 */
  u[i] =1;
  p[i] =0;
  q[i] =0;
  tau[i]=0;}
for (i=1; i<nx;i++)
  { ywp[i]=(yw[i+1]-yw[i-1])/(x[i+1]-x[i-1]);}
  ywp[0]=0;
  ywp[nx]=0;

/* boucle en temps */ for (it=0;it<1000000;it++){

  fs= fopen("xyp.OUT","w");
  for (i=0; i<nx;i++)
  { fprintf(fs,"%lf %lf %lf %lf %lf %lf %s",
            x[i],yw[i],u[i],q[i],ywp[i],tau[i],CRLF); }
  fclose(fs);
/* boucle incluse pour aller plus vite */ for (itt=0;itt<2
;itt++){ t=t+dt;

/* calcul de y' la pente, derivee centree      */
  for (i=1; i<nx;i++)
  { ywp[i]=(yw[i+1]-yw[i-1])/(x[i+1]-x[i-1]);}
  ywp[0]=0;

```



```

/* on declare le tableau de delta1 */
static double *delta1=NULL; /* fichiers sortie */ FILE *fs,*g;
/*-----*/

static unsigned i; static double H,f2,d0,d12;

/* H et f2 sont les facteurs de forme */
H=2.59;
f2=0.25;

/* delta1 est l'epaisseur de deplacement */
delta1 =(double*)calloc(nx+2,sizeof(double));

/* dudy frottement */
dudy[0]=0;
delta1[0]=0;

/* %%%%%%%%%%%%%%% */
/* karman simplifie en:
1 d      2 H      2 d u      f2 H
- --- delta = - (1 + - ) delta --- + -----
2 d x      1 u      H      1 d x      delta u
                                           1
*/
for (i=1;i<=nx;i++) {
    d12 = delta1[i-1]*delta1[i-1]/2. +
        (x[i]-x[i-1]) * H*(
            -delta1[i-1]*delta1[i-1]*(1+2/H)*(1/u[i])*(u[i]-u[i-1])/(x[i]-x[i-1])
            + (f2*H/u[i]));

    delta1[i] = pow(d12*2.,0.5) ;
}
/* du/dy */
for (i=1;i<=nx;i++) {
    dudy[i]= f2*H*u[i] /delta1[i] ;
}

return 0;
}

```

Bibliographie

- [1] P. Huerre. Mécanique des fluides TOME I, Edition 1998
- [2] Paillère H. et Dabbene F. . "Initiation à la simulation numérique des fluides à l'aide de CASTEM 2000", Cours ENSTA . p.93 à 106
- [3] Schlichting (1979) : "Boundary layer theory", Mc Graw Hill.
- [4] B. Andreotti et P. Claudin : "Selection of dunes shapes and velocities", arXiv :cond-mat/0201105v1 08/02/02
- [5] K. Kroy, G. Sauermann, et H.J. Hermann : "A minimal model for sand dunes", arXiv :cond-mat/0101380 24/01/01