

Travaux de Modélisation et de Simulation Déplacement d'une dune soumise à l'érosion du vent

Jérôme Blain - Alan Guegan

25 mars 2002

ABSTRACT : We present in this paper a study of the evolution of a sand dune under a flow of air. Our work is parted in three. First we put forward the different options that we tried on the software Castem in order to calculate the truest possible shear stress applied on the dune. Then we analyze the functioning of a program in C which enables us to compute the evolution of the dune. In a third part, we review a few models of evolution of the dune with regard to the expression of the shear stress. We conclude by outlining future research directions to complete and sharpen this study.



Table des matières

1	Analyse du problème et étude de l'écoulement autour d'une dune rigide	4
1.1	Position du problème et adaptation à la résolution numérique	4
1.2	Estimation du frottement pariétal grâce à CASTEM	5
1.2.1	Modèle utilisé	5
1.2.2	Choix du maillage	6
1.2.3	Choix du nombre d'itérations	7
1.2.4	Influence du nombre de Reynolds	8
1.3	Problèmes rencontrés lors des simulations	9
1.3.1	Suppression de la contradiction sur les conditions aux limites en vitesse	9
1.3.2	Problèmes de recirculation	11
2	Simulation de l'évolution d'une dune	14
2.1	Formules approchées de la mécanique des fluides	14
2.1.1	Expression approchée de la vitesse du fluide	14
2.1.2	Approximation de Karman	15
2.2	Validation des formules approchées	15
2.3	Structure de l'algorithme	17
2.4	Choix de la méthode de discrétisation	17
3	Résultats des expériences numériques	21
3.1	Modèles "classiques" d'arrachement	22
3.1.1	Modèle d'Exner - 1925	22
3.1.2	Arrachement proportionnel au frottement à la paroi	22
3.2	Raffinements des modèles d'arrachement	23
3.2.1	Influence de la gravité	23
3.3	Modèle à plusieurs dunes	24
3.3.1	Modèle d'Exner	24
3.3.2	Modèle " $q = \tau$ "	25
A	annexes	28

INTRODUCTION

On comprend encore mal comment évoluent les étendues sableuses telles que celles du Sahara qui ne cessent pourtant chaque année de gagner du terrain sur les terres habitées qui leurs sont limitrophes. Tant que l'on ne comprendra pas correctement le phénomène de déplacement des dunes, nous ne saurons pas prévenir efficacement l'avancée du désert, et cette compréhension passera sans doute par la simulation numérique.



FIG. 1 – protections envahies par le sable entraîné par le vent, Tunisie

C'est pourquoi la recherche s'intéresse actuellement à la simulation de l'évolution des dunes, suscitant plusieurs articles émanant notamment du Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure [1].

Nous avons pour notre part tenté de reproduire numériquement certains phénomènes observés dans les systèmes dunaires, principalement l'avancée des dunes soumises à l'érosion du vent. Pour cela, nous avons découpé le problème en un problème fluide quasi-stationnaire et un problème solide quasi-statique ; pour calculer l'écoulement stationnaire du vent autour d'une dune rigide, nous avons utilisé Castem, et nous avons modélisé l'évolution quasi-statique de la dune grâce à un code écrit en C et qui évaluait les données pertinentes de l'écoulement (vitesse du vent et frottement à la paroi) grâce à deux approximations de la mécanique des fluides, que les calculs d'écoulement nous ont permis de valider.

Nous poserons le problème dans une première partie, où nous exposerons également les problèmes et les résultats obtenus lors de la simulation de l'écoulement par Castem. Dans une seconde partie, nous détaillerons la structure du programme utilisé pour simuler l'évolution de la dune, ainsi que quelques points posant problème pour la simulation. Enfin, nous exposerons et critiquerons les résultats obtenus avec différents modèles.

1 Analyse du problème et étude de l'écoulement autour d'une dune rigide

Le premier pas vers une modélisation de l'érosion d'une dune a été de restreindre notre étude à l'évolution d'une dune à deux dimensions, cas simple mais déjà parlant, et pertinent car existant dans la nature (figure 2).



FIG. 2 – dunes parallèles "bidimensionnelles", Australie

Nous avons ensuite découpé le problème "solide" consistant en l'évolution de la forme dunaire et le problème "fluide" de l'écoulement autour de cet obstacle. Cette démarche est justifiée par les ordres de grandeur des temps caractéristiques de chacun des phénomènes :

- le temps fluide τ_f est de l'ordre de grandeur de la seconde, temps que met le fluide à parcourir la dune
- la dune évolue à l'échelle de la journée, voire de l'heure : le temps "solide" τ_{sol} vaut 10^4 secondes, soit 10000 fois le temps fluide !

Le solide est donc bien immobile par rapport au fluide, que l'on peut considérer comme en écoulement stationnaire.

Nous avons par la suite estimé grâce au logiciel CASTEM la valeur du frottement de l'air sur la dune, que nous avons pu comparer à la solution simplifiée dite "de Karman" afin de valider celle-ci. Nous avons ainsi assuré de bonnes bases pour la suite de notre travail, qui a consisté à modéliser le déplacement effectif de la dune en se basant notamment sur cette relation.

1.1 Position du problème et adaptation à la résolution numérique

Nous avons considéré une dune de sable qui, soumise au frottement de l'air, subit une érosion : on estime couramment que le flux de matière emporté q est proportionnel au frottement $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$ où μ est une constante, au-delà d'un certain seuil :

$$q = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < \tau_s \\ \tau - \tau_s & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Or ce frottement dépend de l'écoulement de l'air autour de l'obstacle, et donc de la forme de la dune. On se trouve ainsi face à un problème *couplé* où la déformation

de la dune, qui joue ici le rôle de *solide* immergé dans le *fluide* " air ".

Cependant, l'échelle de temps τ_d de l'érosion du tas de sable est suffisamment grande devant le temps $\tau_f l$ caractéristique de l'écoulement du vent pour que l'on puisse s'intéresser au problème *découplé* : la forme quasiment fixe de la dune à l'instant t impose un écoulement de l'air et donc une certaine répartition du frottement sur son profil. La dune évolue alors *lentement* en fonction de ce frottement selon la relation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

Pour simuler numériquement l'évolution de la dune, on a donc supposé qu'à chaque pas de temps n de son évolution elle ne se déformait pas ; on s'est donc ramené à chaque pas de temps à l'étude d'un écoulement *stationnaire* de l'air autour d'un obstacle *fixe*, que l'on a déformé en se basant sur le frottement calculé alors, afin de passer à l'itération suivante. Ainsi, pour connaître la forme de la dune f^{n+1} au pas de temps temps $n + 1$ suivant il nous a suffi d'écrire :

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \left(-\frac{\partial q^n}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Notre travail s'est déroulé en deux temps : nous avons tout d'abord simulé l'écoulement du vent autour d'un obstacle triangulaire grâce à Castem. Cela nous a permis de valider une expression approchée du frottement pariétal, sur laquelle nous nous sommes ensuite appuyés pour calculer l'érosion de la dune, grâce à un code en C inspiré de l'algorithme précédent.

1.2 Estimation du frottement pariétal grâce à CASTEM

1.2.1 Modèle utilisé

Nous avons calculé le frottement pariétal s'exerçant sur différents obstacles de forme triangulaire, grâce au module de résolution Navier-Stokes de Castem 2001. Nous avons considéré pour nos calculs :

- une viscosité de $1/2000$, et donc ici un Reynolds de 2000
- un domaine de longueur proche de 1
- une "dune" de longueur 0.3 , de hauteur variant entre 0.01 et 0.15 unités, et de sommet situé à ses deux tiers.

Nous avons choisi d'imposer les conditions aux limites suivantes :

- une condition de surface libre sur le segment droit ("la sortie") du domaine
- une vitesse nulle sur les segments inférieurs du domaine ("le sol")
- une vitesse verticale nulle en entrée
- une vitesse d'entrée horizontale de valeur unité sur le segment de gauche

Cependant, le modèle que nous venons de présenter pose quelques problèmes : il faut choisir judicieusement le maillage afin d'obtenir des résultats proches de l'écoulement réel et surtout des valeurs de frottement correctes. Par ailleurs, la condition de vitesse horizontale uniforme en entrée est en contradiction avec la condition de vitesse nulle qui s'applique sur le sol et doit donc être vérifiée au moins sur un voisinage du point commun au sol et au segment d'entrée. Enfin et surtout, nous avons observé une recirculation derrière des dunes mêmes relativement "plates"

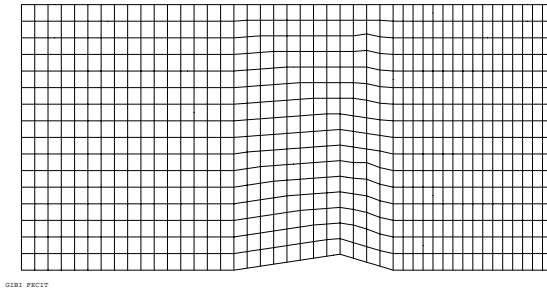


FIG. 3 – domaine de calcul pour l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle triangulaire

(typiquement de hauteur dix fois moindre de leur longueur), dont il a fallu tenir compte dans nos calculs.

1.2.2 Choix du maillage

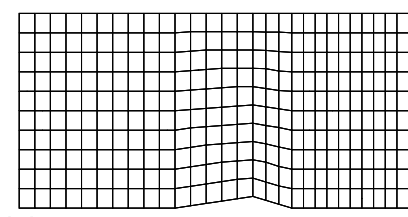
Afin de choisir un maillage qui soit suffisamment fin pour donner des valeurs acceptables pour le frottement et malgré tout assez large pour permettre des calculs raisonnablement rapides, nous avons testé quatre maillages différents allant de "serré" à "très lâche", représentés figure 4.

Le maillage "très serré" compte 80 mailles sur une vingtaine, avec une zone de "couche limite" où les mailles sont très resserrées (166 x 20), alors que le maillage "très lâche" n'en compte que 28 sur 10. Nous avons obtenu après calcul de l'écoulement autour d'une dune de hauteur 0.03 sur chacun de ces maillages les frottements représentés figure 5.

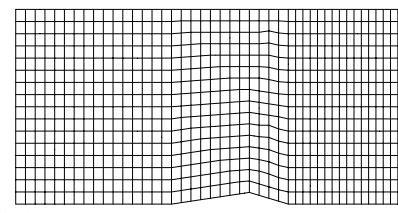
La première remarque à soulever est que ces différentes répartitions du frottement ont des allures très semblables : le frottement connaît un pic peu avant le sommet de la dune, puis chute pour devenir plus faible que sur une plaque plane dans le creux de l'obstacle. On reconnaît également deux zones où il est constant, les parties où le sol est plat, en amont et en aval de la dune. Enfin, un artefact est toujours présent à l'entrée du domaine, où l'on enregistre un pic de frottement.

En revanche, les valeurs atteintes par le frottement dépendent fortement du maillage : plus le maillage est lâche, plus ces valeurs sont réduites. Le frottement maximum atteint varie ainsi pour la même dune de 2.5 pour le maillage très lâche à 4.5 pour le maillage le plus serré, pour lequel il faut préciser que nous avons arrêté le calcul au bout de 10000 itérations à un stade un peu moins avancé de la convergence que les autres maillages.

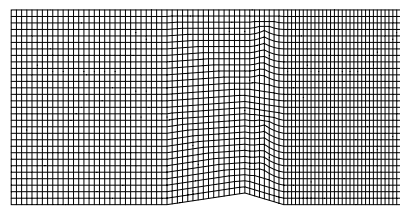
C'est enfin une trivialité que de dire que les maillages les plus lâches ont donné les calculs les plus rapides : le maillage le plus grossier a fait converger notre algorithme jusqu'à la limite que l'on s'était fixée pour tous les calculs en moins de 2000 itérations quand il en a fallu plus de 10000 pour converger sur le maillage le plus fin, les calculs



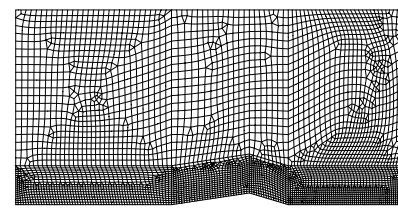
maillage 28 x 10



maillage 44 x 16



maillage 83 x 30



maillage 83 x 20 avec une couche limite finement maillée (166 x 20)

FIG. 4 – les quatre maillages différents utilisés, du plus lâche au plus serré

étant bien sûr en outre les plus lents sur les maillages les plus serrés (courbes en annexe) : au final, certains calculs prenaient moins de 10 minutes et d'autres plus de quatre ou cinq heures.

Finalement, nous avons éliminé le maillage "très lâche", trop éloigné des autres calculs en terme de valeur du frottement maximum, ainsi que le maillage "serré", qui donnait des calculs bien trop lents (convergence imparfaite au bout de cinq heures de calculs). Nous avons donc conservé pour nos calculs le maillage "moyennement serré" (80 x 30). Les calculs mettaient alors entre 30 minutes et une heure pour converger au sens où deux itérations successives donnaient des résultats identiques en vitesse à 10^{-7} près.

1.2.3 Choix du nombre d'itérations

Afin de déterminer à quelle itération arrêter le calcul, nous avons employé une procédure Castem permettant d'estimer l'écart entre deux champs de vitesse calculés lors de deux itérations successives ; nous avons décidé de bloquer le calcul lorsqu'un écart limite arbitrairement fixé à 10^{-7} était atteint. Afin de s'assurer que cet écart n'était pas trop grand, nous avons effectué un calcul en fixant la limite à 10^{-10} , qui nous a donné un frottement très proche de celui obtenu à 10^{-7} (figure 6).

1 ANALYSE DU PROBLÈME ET ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE DUNE RIGIDES

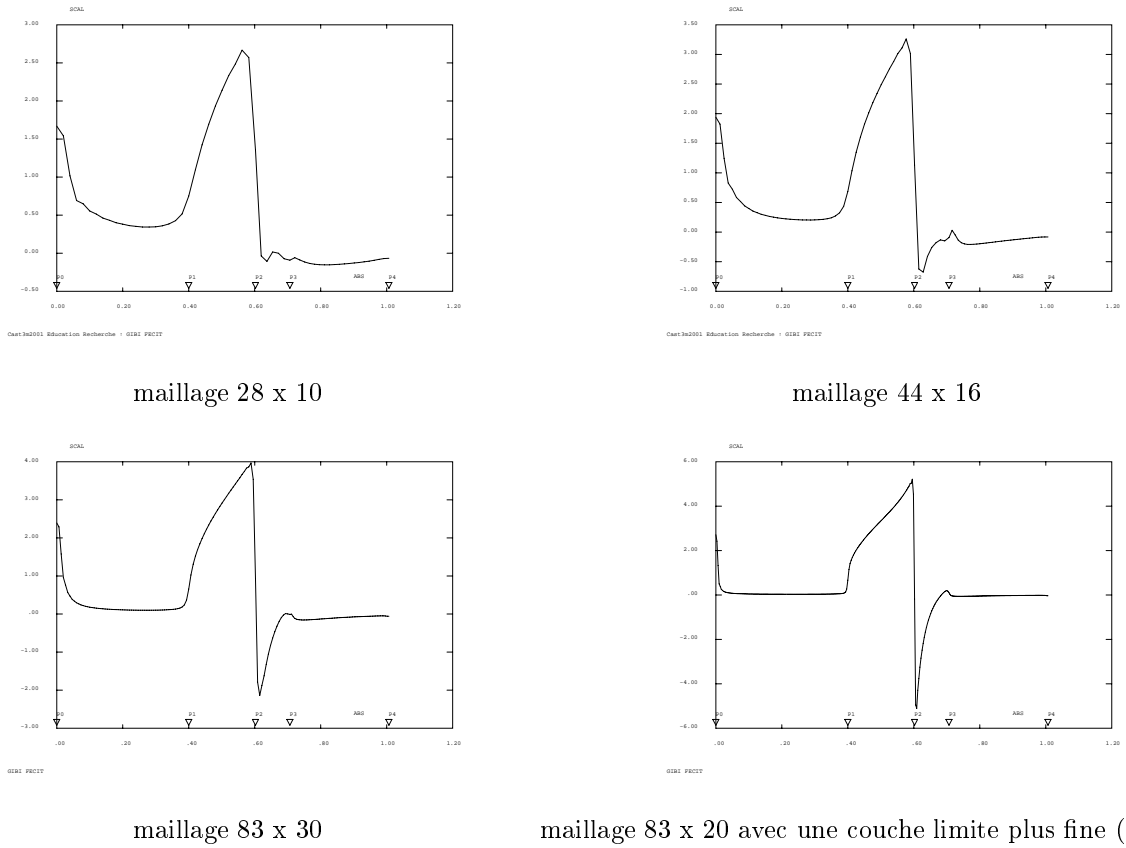


FIG. 5 – estimation du frottement pariétal obtenue avec les différents maillages

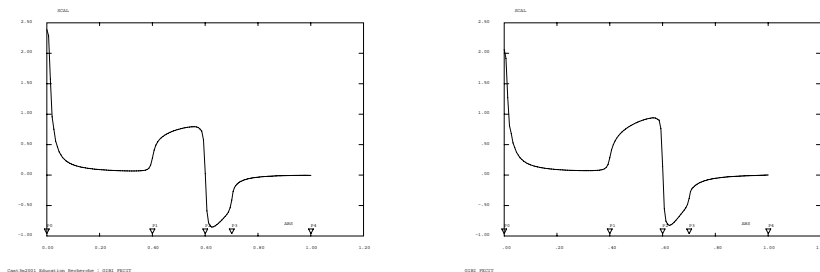


FIG. 6 – Les deux valeurs du frottement pariétal obtenues pour des écarts entre itérations de 10^{-7} et 10^{-10}

1.2.4 Influence du nombre de Reynolds

Différentes valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement donnent différentes valeurs du frottement sur l'obstacle; nous avons voulu le vérifier avec Castem en effectuant, outre nos calculs à $Re = 2000$, deux calculs, l'un à $Re = 500$ et l'autre à $Re = 5000$.

1 ANALYSE DU PROBLÈME ET ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE DUNE RIGIDE⁹

Le frottement est, sans surprise, plus élevé pour un Reynolds plus grand (couche limite plus fine, donc variation plus violente de la vitesse orthogonalement à la paroi) et plus faible pour un Reynolds plus petit : il passe d'un minimum de 0.6 pour $Re = 500$ à un maximum de 1.0 pour $Re = 5000$.

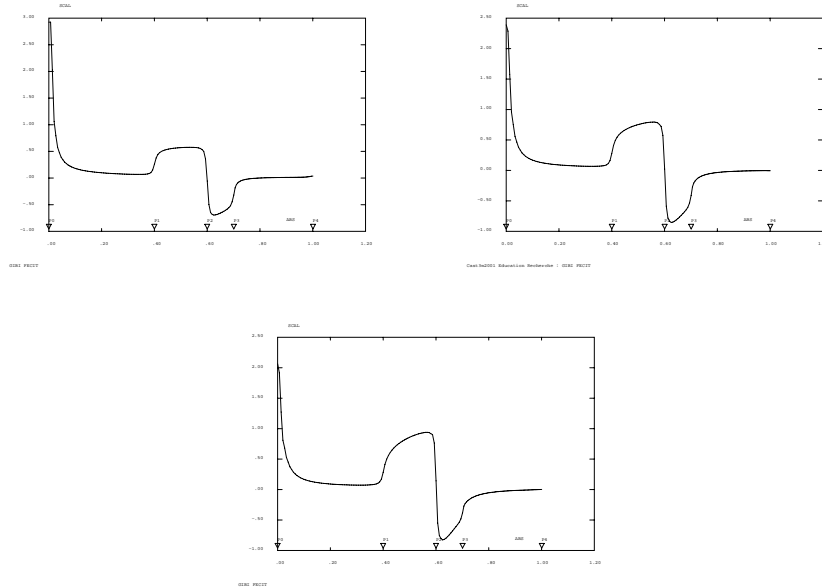


FIG. 7 – Les valeurs du frottement pariétal obtenues pour trois Reynolds de 500, 2000 et 5000

1.3 Problèmes rencontrés lors des simulations

1.3.1 Suppression de la contradiction sur les conditions aux limites en vitesse

Nous ne pouvons pas imposer une vitesse horizontale non nulle sur l'ensemble du segment de gauche de notre domaine sans entrer en conflit avec la condition de vitesse nulle sur le "sol". L'algorithme des équations de Navier-Stokes, perturbé par cette contradiction, nous a donné le champ de vitesses suivant :



FIG. 8 – résultat rendu par Castem lorsque les deux conditions aux limites sur la vitesse entrent en conflit

Nous pouvons constater que, au point problématique (commun au sol et au segment d'entrée), la vitesse donnée par Castem est un compromis entre les deux vitesses imposées, au lieu d'être nulle. En outre, bien que le problème se résorbe lorsque l'on s'éloigne de ce point, il faut plus d'une dizaine de mailles pour retrouver une vitesse réellement nulle au sol. Nous avons donc cherché à améliorer notre modèle en affinant la définition de la vitesse d'entrée.

L'idée naturelle était de reprendre la solution du problème de Blasius (écoulement sur une plaque plane), et de l'appliquer en entrée à la place d'une vitesse homogène. Pour résoudre le problème de Blasius, il faut séparer le domaine fluide en un domaine où l'écoulement est celui d'un fluide parfait, et une couche limite d'épaisseur adimensionnée $\delta = \frac{1}{\sqrt{Re}}$, dans laquelle la vitesse passe rapidement de zéro à la vitesse de l'écoulement de fluide parfait à proximité de la paroi, selon un profil $u(x, y)$ vérifiant :

$$u(x, y) = f'(\eta) \quad (4)$$

où f vérifie l'équation de Blasius :

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0 \\ f(0) = f'(0) &= 0 \\ f'(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Pour des facilités d'écriture du code, nous avons modélisé cette séparation couche limite / domaine fluide en imposant à la vitesse d'entrée une forme exponentielle :

$$U(y) = 1 - e^{-y/\delta} \quad (6)$$

Ainsi, la vitesse d'entrée passe exponentiellement d'une valeur nulle à une valeur uniforme dans le domaine, régularisant le paradoxe d'une vitesse non nulle au sol en s'approchant de la solution de Blasius. Cela permet de retrouver une condition d'adhérence au sol sur tout le domaine comme le montre la figure 9.



FIG. 9 – allure du champ de vitesse à proximité de l'entrée du domaine lorsque l'on impose une vitesse d'entrée variant exponentiellement en fonction de l'altitude

On n'a cependant pas éliminé le pic de frottement à l'entrée du domaine, qui subsiste entre autres parce que notre modèle de "vitesse exponentielle" en entrée ne reproduit pas exactement la solution du problème de Blasius.

1.3.2 Problèmes de recirculation

Un problème s'est posé dès que l'on a voulu simuler l'écoulement autour d'obstacles un peu "abrupts" : lorsque nous fixions la hauteur du triangle au-delà de 0.05, il apparaissait un tourbillon en aval de la bosse, qui était coupé par le segment de droite du domaine. Cette recirculation risquait de fausser la convergence du modèle, car en réalité loin après la dune, l'écoulement se fait "dans un seul sens", comme on avait pu le voir sur les modèles précédents (dunes peu élevées). Nous avons donc cherché à retrouver un écoulement "sain" de ce type au niveau de la frontière droite du domaine.

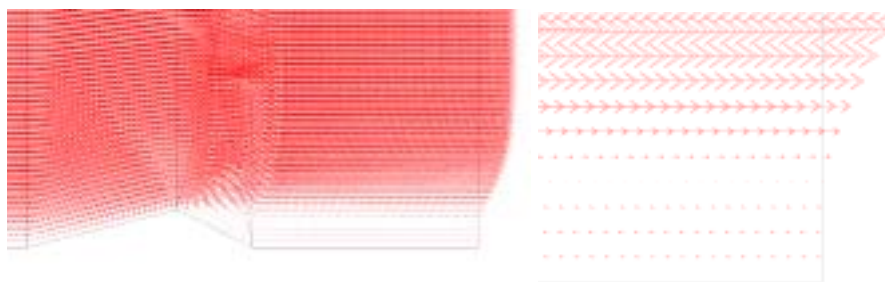


FIG. 10 – allure du champ de vitesse autour d'une dune de hauteur 0.05 et vue agrandie sur la zone de recirculation en aval de l'obstacle

Afin de préciser le moment où ce phénomène apparaissait, nous avons lancé plusieurs calculs sur des dunes de hauteur allant de 0.01 à 0.1, et nous avons mis en évidence l'apparition du phénomène pour des dunes de hauteur 0.05 (figure 11).

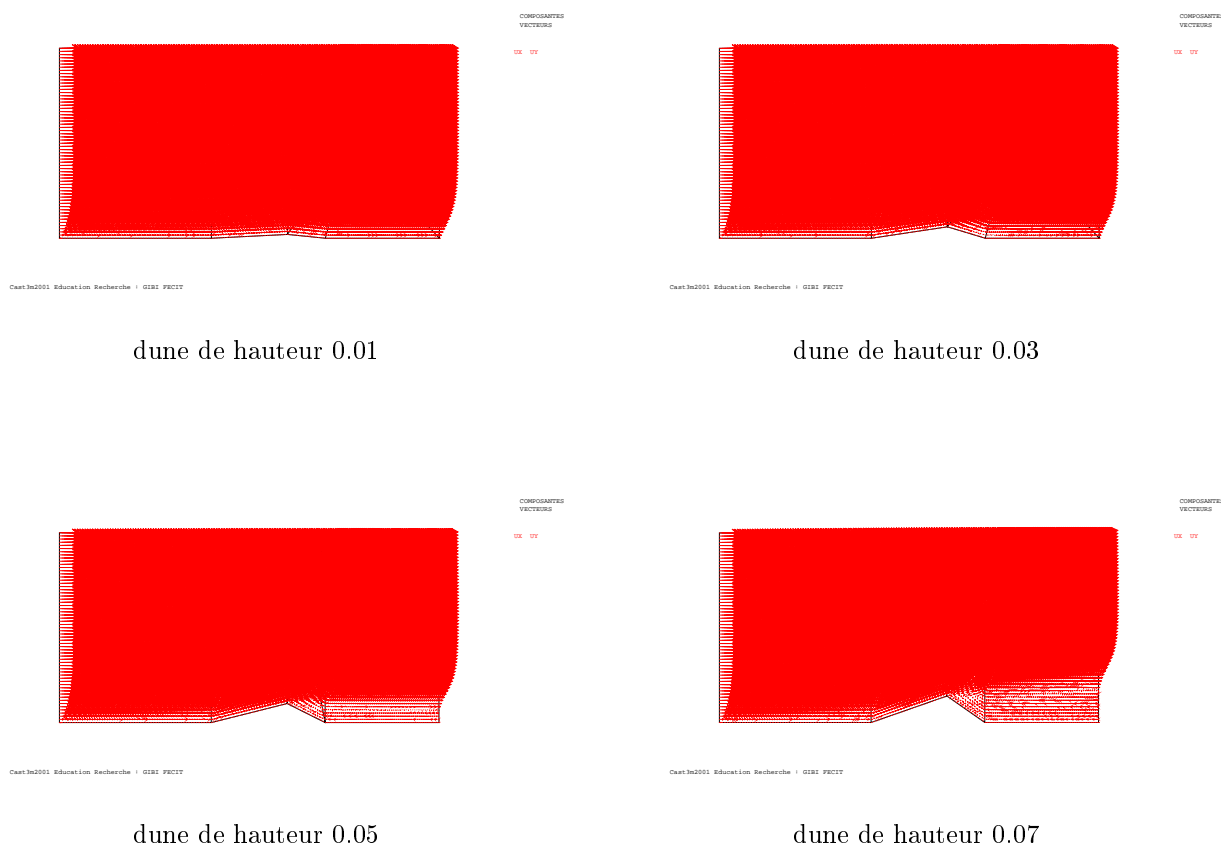


FIG. 11 – allure du champ de vitesse selon la hauteur de la dune : on voit apparaître un phénomène de "décollement" et de recirculation pour des dunes de hauteur supérieure à 0.05

Nous avons alors rallongé le domaine de calcul en aval des obstacles présentant une recirculation, ce qui nous a permis de constater que, en général, le tourbillon est moins étendu que ne le laissait prévoir la simulation sur un domaine "court" : il ne s'étend pas forcément jusqu'à la sortie du domaine, et souvent son centre de rotation est moins en aval que sur les simulations sur domaine "court" (figure 12).

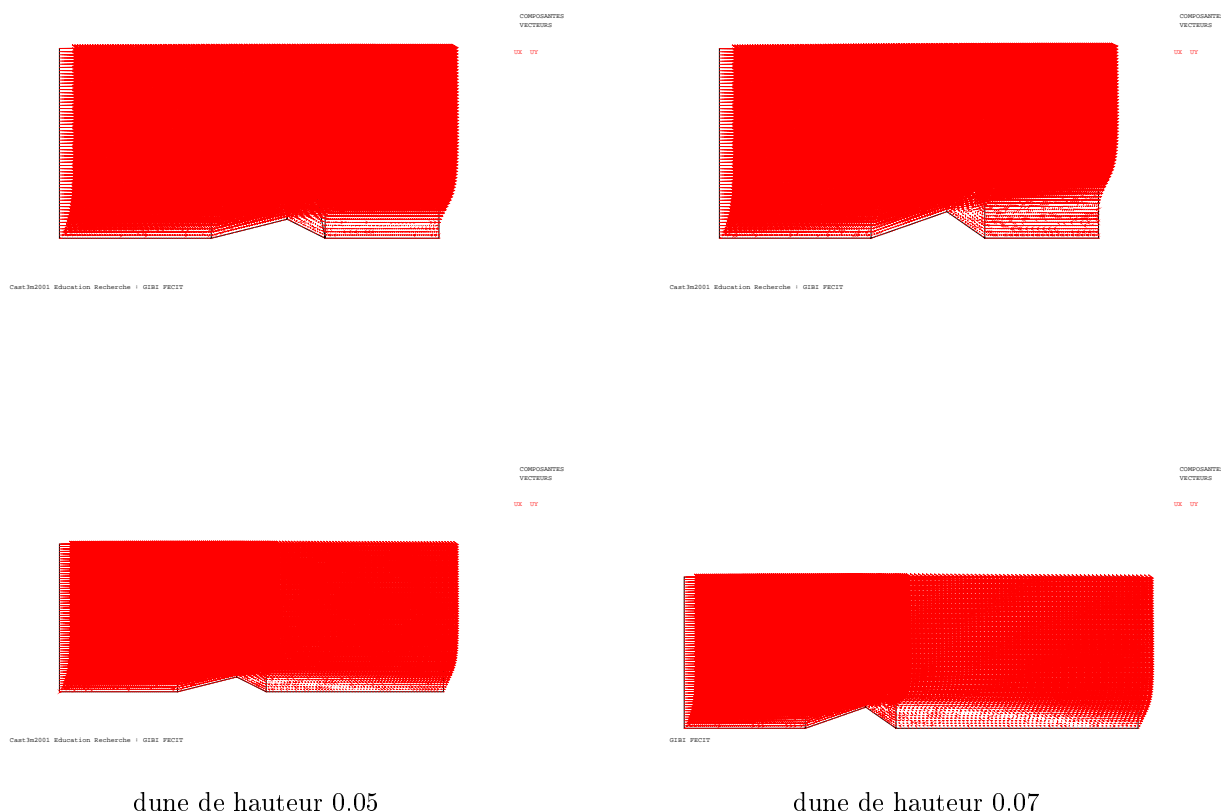


FIG. 12 – étendue comparée des tourbillons obtenus sur domaine "court" ou "long" pour des dunes de hauteur 0.05 et 0.07

Nous soupçonnons le code de calcul d'être à l'origine de ce phénomène : lors des premières itérations un tourbillon se forme, s'étend jusqu'à "percuter" la frontière de sortie. Une fois cette frontière "accrochée" par la singularité, le tourbillon ne se rétracte pas vers la taille attendue pour une simulation correcte. En éloignant cette frontière, on empêche le tourbillon de l'atteindre dans le premières itérations : il peut alors se rétracter jusqu'à une taille réaliste.

2 Simulation de l'évolution d'une dune

Nous avons utilisé un code en C afin de calculer l'évolution d'une dune soumise à l'érosion du vent. Nous présenterons dans cette section, outre la structure du programme, les difficultés posées par la simulation numérique. Toutefois nous commencerons par justifier l'utilisation de formules approchées pour calculer le frottement pariétal, en les comparant aux résultats obtenus par les calculs précédents de l'écoulement grâce à Castem. En effet, les temps de calcul sous Castem avec les machines disponibles étant de l'ordre de la dizaine de minutes, il était invraisemblable d'utiliser une démarche relançant le calcul du frottement τ avec Castem à chaque pas de temps après déformation de la dune : nous avons donc employé des formules explicites mais approchées donnant vitesse et frottement à la surface de la dune.

2.1 Formules approchées de la mécanique des fluides

Nous utiliserons dans le programme permettant de simuler l'évolution de la dune deux approximations des équations de la mécanique des fluides, l'une pour estimer la vitesse à proximité de la paroi, et l'autre pour évaluer le frottement pariétal.

2.1.1 Expression approchée de la vitesse du fluide

La théorie linéarisée des petites perturbations du fluide parfait nous donne la perturbation de vitesse associée à la présence de la petite bosse d'épaisseur $\epsilon f(x)$ dans l'écoulement.

Cette étude est réalisée dans le cours de Patrick Huerre [2].

On considère que l'effet d'épaisseur peut être représenté par une distribution continue de sources ponctuelles d'intensité linéique $q(x)$. Le potentiel complexe élémentaire associé à la source ponctuelle d'intensité $q(x')dx'$ placée au point $(x', 0)$ s'écrit :

$$df(z) = \frac{q(x')}{2\pi} \log(z - x') dx' \quad (7)$$

On recherche donc une solution de potentiel complexe :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(x') \log(z - x') dx' \quad (8)$$

La vitesse correspondante s'écrit sous la forme :

$$u_p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{(x-x')q(x')}{(x-x')^2+y^2} dx' \quad (9)$$

Il vient :

$$u_p(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(x')}{x-x'} dx' \quad (10)$$

La condition d'imperméabilité donne :

$$q(x) = 2U_\infty \frac{df}{dx} \quad (11)$$

On obtient ainsi finalement l'expression de la perturbation de vitesse horizontale créée par la bosse :

$$u_p(x, 0) = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^L \frac{1}{x-x'} \frac{df}{dx}(x') dx' \quad (12)$$

La vitesse horizontale dans la couche limite est donc de la forme :

$$u = U_\infty \left(1 + \epsilon \frac{1}{\pi} \int_0^L \frac{1}{x-x'} \frac{df}{dx}(x') dx' \right) \quad (13)$$

On dispose ainsi d'une approximation aisément programmable et calculable donnant la vitesse d'un fluide parfait contournant un obstacle peu marqué.

2.1.2 Approximation de Karman

Pour établir l'approximation dite de Karman, donnant le frottement pariétal, on doit partir des équations de couche limite avec gradient de pression (équations de Prandtl), qui s'écrivent, d'après [3] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (14)$$

avec les conditions limites suivantes : en $y = 0$ $u = 0, v = 0$ et en $y = \infty$ $u = U_\infty(x, t)$.

Ceci est valable pour tout profil sans angle saillant, ce qui n'est pas le cas de notre dune triangulaire. On garde néanmoins ce modèle en acceptant quelques accrocs au niveau des changements de pente, accrocs bien observables sur les courbes.

En intégrant sur la hauteur de la couche limite, après manipulations et adimensionnalisation, on aboutit à l'équation de Von Karman :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_1}{H} \right) = \delta_1 \left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{du_e}{dx} + \frac{f_2 H}{\delta_1 u_e} \quad (15)$$

où toutes les variables utilisées sont sans dimension.

On dispose ainsi d'une seconde formule approchée donnant cette fois-ci le frottement pariétal.

2.2 Validation des formules approchées

Une question essentielle est celle de la validité du calcul approché de von Karman. Le frottement obtenu par cette méthode est-il comparable à celui obtenu par le calcul précis de Castem ? Si ce n'était pas le cas, l'utilisation du programme fourni pour calculer l'évolution de la dune n'aurait aucun sens.

Nous avons examiné cela sur une dune de hauteur 0.03, la méthode de von Karman n'étant valable que pour de petites bosses, c'est à dire pour des hauteurs inférieures à 0.1.

On a représenté, superposés, le profil de la dune, le frottement calculé par le programme en C qui contient la méthode de von Karman ($\frac{du}{dy}$) et le frottement obtenu par un calcul avec Castem. (figure 13)

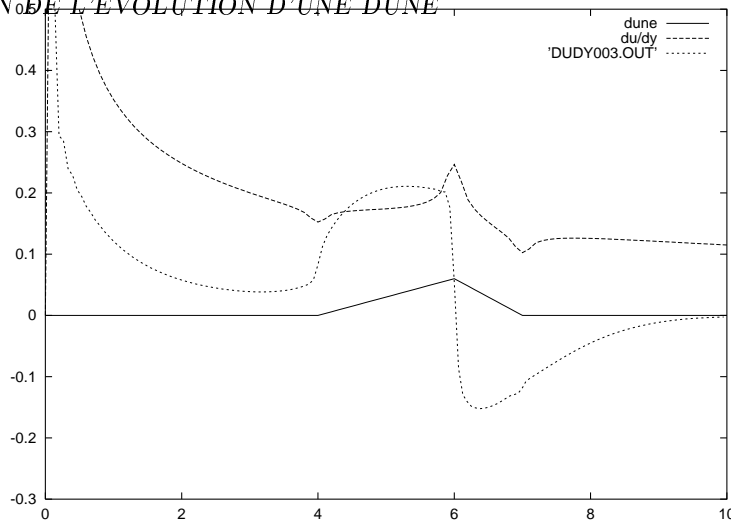


FIG. 13 – comparaison entre le frottement calculé par Castem et celui donné par la formule de Von Karmaan

La différence de forme entre les 2 courbes de frottement frappe de prime abord. Le frottement issu du calcul de von Karman est quasiment constant sur toute la partie antérieure de la dune. Le pic observé au niveau du sommet de la dune est important mais fort probablement exagéré par des erreurs de calcul dûes au fait que le calcul de von Karman n'est pas valable quand le profil possède des ruptures de pente. En ces deux aspects, cette courbe diffère notablement de l'autre, qui montre, elle, une augmentation du frottement au pied de la dune et une légère baisse vers le sommet de celle-ci. Le milieu de la dune est tout de même soumis à un frottement à peu près constant.

Par contre, les deux courbes reflètent le même phénomène de chute du frottement passé le sommet de la dune. Cette chute est forte et le frottement passe en-dessous de sa valeur dans le cas d'une plaque plane. Néanmoins, il faut concéder que la partie arrière de la dune ne compte guère dans notre modèle d'évolution.

Quantitativement, le résultat est rassurant. Si l'aspect des deux courbes diffère au niveau des ruptures de pente principalement, les valeurs du frottement obtenues dans les deux cas sont très proches. La différence entre les deux est au maximum de 10% .

Ainsi, les deux courbes sont globalement semblables, sauf pour le pic obtenu par le calcul de von Karman au sommet de la dune. En tenant compte du fait que ce pic doit être exagéré par de artéfacts de calcul inhérents à la méthode pour ce profil de dune précis et aussi que, avec d'autres dunes semblables nous obtenons par le calcul Castem des courbes de frottement présentant un fort pic juste avant le sommet de la dune, nous considérons comme acceptable le calcul approché du frottement fourni par la méthode de von Karman. Nous allons donc dorénavant nous intéresser au programme en C qui utilise cette méthode pour faire évoluer la dune au cours du temps et aux résultats qu'il fournit pour différentes modélisations.

2.3 Structure de l'algorithme

Le programme appelle plusieurs sous-programmes ou procédures :

- un autre programme appelé `hilbokx.c` qui permet de calculer la transformée de Hilbert $\int \frac{f'}{x-\xi} dx$ de f' .
- une fonction appelée `karman` qui estime le frottement à la surface de la dune grâce à la formule approchée de Karmaan

L'algorithme fonctionne de la manière suivante :

- une forme de dune est donnée et les valeurs de la vitesse, la pression, le débit et le frottement sont initialisées
- une boucle en temps est alors lancée
- le programme calcule la pente en chaque point
- en appelant le programme `hilbokX`, qui calcule la transformée de Hilbert, on obtient la pression p
- les variations de u sont déduites de celles de p
- l'appel de la procédure `karman` permet d'obtenir la relation entre u et τ . Ainsi, on a finalement une relation entre τ et f' .
- ensuite, le programme lit la relation liant q à u que l'on lui a fourni. Différents cas étudiés sont présentés dans la troisième partie de ce rapport.
- finalement, le programme calcule la forme de la dune au pas de temps d'après la formule : $f^{n+1} = f^n + \Delta t \left(-\frac{\partial q^n}{\partial x} \right)$
- la boucle en temps est fermée et le processus recommence avec une dune légèrement modifiée comme point de départ

Ce programme nous a été fourni par P.Y. Lagrée, adapté au cas d'une bosse exponentielle et avec le relation $q = u$. Nous l'avons modifié pour pouvoir réaliser une étude plus complète du problème et tester différents modèles d'évolution.

La forme de la bosse ainsi que les valeurs de la vitesse, du débit et de la pression sont stockées à chaque pas de temps dans un fichier. Nous utilisons ensuite ces données avec le programme `Gnuplot` pour tracer les courbes et pouvoir visualiser leur évolution.

Le listing du programme est fourni en annexe.

2.4 Choix de la méthode de discrétisation

Tout d'abord, il est à noter que les conditions initiales imposées sur la vitesse, la pression, le débit et le frottement ne jouent absolument aucun rôle dans la simulation. Seule la forme de la dune est importante. En effet, à partir de celle-ci le programme `hilbokX.c` calcule la pression p et en déduit ensuite toutes les autres variables intéressantes. La dune que nous avons adoptée est la même que pour le calcul `Castem`, c'est à dire triangulaire.

Intéressons-nous maintenant à l'influence du pas de temps sur la simulation.

Le programme nous a été fourni avec un pas de temps $\Delta t = 0.001$. Avec ce choix, nous n'avons jamais rencontré de divergences dans les calculs, aussi loin que nous ayons poussé ceux-ci (au maximum $t \approx 15.000$).

Une tentative avec un pas de temps plus faible, $\Delta t = 0.0001$, nous donne exactement les mêmes résultats mais bien sûr dans un temps beaucoup plus long.

Voici par exemple la forme de la dune et du frottement à $t = 0.01$.

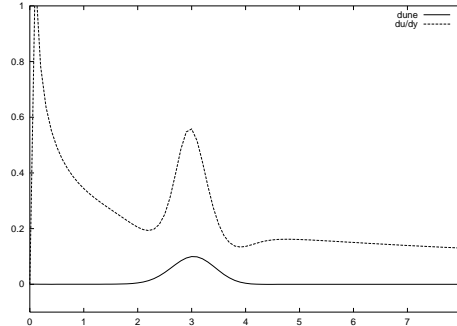


FIG. 14 – $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 10^{-4}$, $t=0.01$

Le passage à un pas de temps plus élevé fausse les calculs. Pour $\Delta t = 0.01$, à $t = 0.2$ on observe déjà un phénomène de divergence en aval de la dune. Le sol se creuse en effet artificiellement et on voit apparaître des ondelettes parasites qui s'accroissent si on pousse plus loin le calcul.

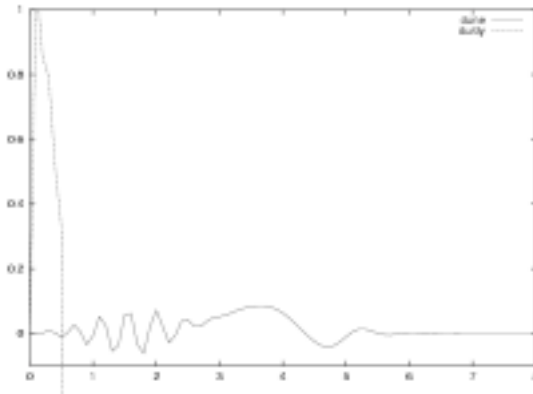


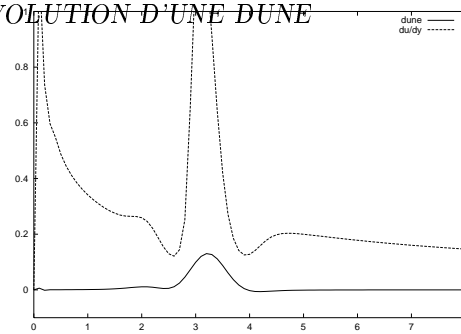
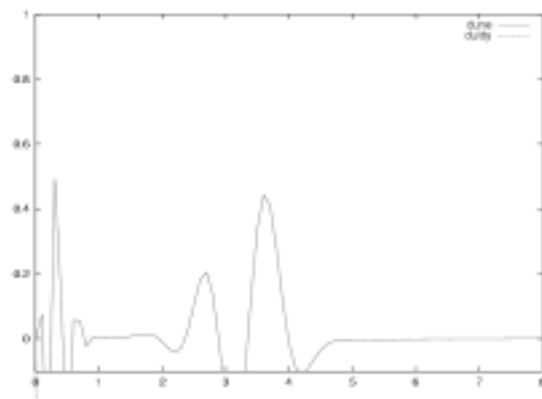
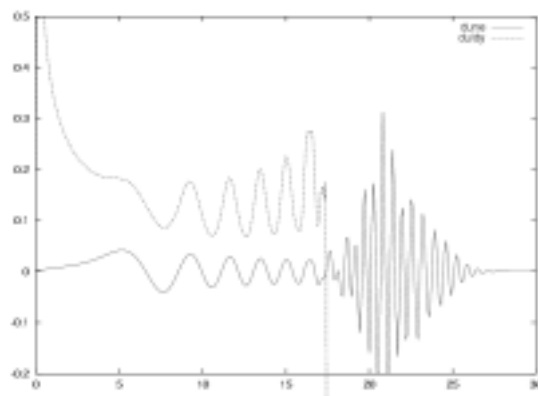
FIG. 15 – $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 10^{-2}$, $t=0.2$

Pour $\Delta t = 0.1$, assez étrangement, à $t = 0.2$, la forme de la dune ainsi que celle du frottement est encore assez juste. Les valeurs du frottement sont par contre très élevées. Cet accord un peu inattendu avec l'évolution correcte de la dune doit être dû au fait qu'à ce moment-là, seules deux itérations ont été achevées et que les erreurs de calcul n'ont pas encore eu le temps de se propager. On note quand même la formation d'une légère bosse au pied de la dune, prémice des défauts qui vont par la suite véritablement se révéler.

Au temps $t = 0.4$, c'est à dire deux itérations plus tard, les erreurs de calcul se sont propagées et on observe le développement de modes parasites.

Nous avons alors examiné ce qui se produit pour une valeur intermédiaire du pas de temps, soit $\Delta t = 0.005$. Le résultat est bon jusqu'à environ $t = 1.0$ où des oscillations parasites apparaissent en amont de la bosse et se propagent ensuite rapidement.

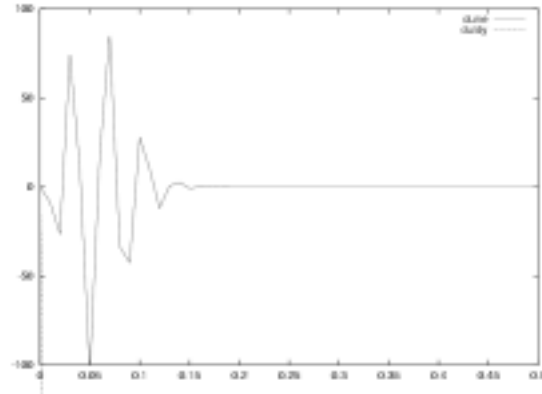
Toutes ces observations nous conduisent à supposer qu'il existe un pas de temps critique au-dessus duquel le calcul de l'évolution de la dune diverge.

FIG. 16 - $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 10^{-1}$, $t=0.2$ FIG. 17 - $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 10^{-1}$, $t=0.4$ FIG. 18 - $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 5 \cdot 10^{-3}$, $t=1.4$

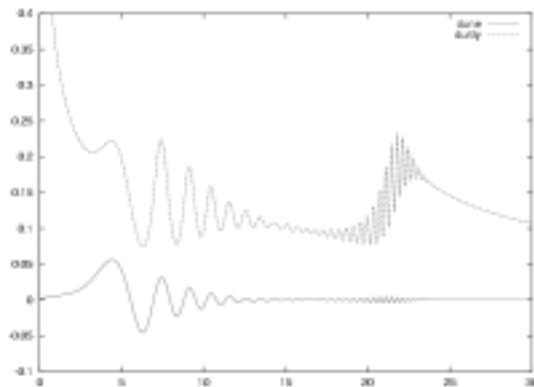
En ce qui concerne le pas d'espace, la simulation ne donne aucune oscillation inattendue pour $\Delta x = 0.1$.

Pour $\Delta x = 0.01$, des modes parasites surgissent près de l'origine après les toutes premières itérations. Ces erreurs s'amplifient très rapidement, comme le montre la figure suivante où l'on peut voir la forme de la dune dans ce cas précis pour $t = 0.007$.

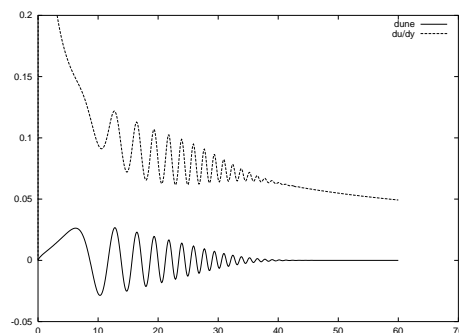
L'étude du cas intermédiaire s'est révélée intéressante. Un pas d'espace $\Delta x = 0.05$ conduit en effet à un début d'évolution de la dune tout à fait conforme au cas normal.

FIG. 19 – $\delta x = 10^{-2}$, $\delta t = 10^{-3}$, $t=0.007$

Néanmoins, petit à petit apparaissent loin à l'amont de la dune des oscillations qui vont aller en s'amplifiant.

FIG. 20 – $\delta x = 5 \cdot 10^{-2}$, $\delta t = 10^{-3}$, $t=0.708$

Ces modes parasites ne se développent semble-t-il jamais dans le cas $\Delta x = 0.1$, comme le montre un calcul poussé jusqu'à $t = 3.4$.

FIG. 21 – $\delta x = 10^{-1}$, $\delta t = 10^{-3}$, $t=3.4$

Les cas $\Delta x > 0.1$ sont difficilement exploitables, les courbes étant déformées car le pas d'espace est trop proche de l'ordre de grandeur de la taille de la dune. Nous

ne présentons donc aucune étude de ces cas.

De tout cela on déduit la probable existence d'un pas d'espace critique en-dessous duquel des modes parasites apparaissent dans la simulation.

Dernière interrogation : existe-il une relation liant les pas d'espace et de temps critiques, c'est à dire l'un peut-il être exprimé en fonction de l'autre ?

Plusieurs simulations ont été effectuées, certaines donnant l'impression que non et d'autres laissant penser qu'une telle relation existe bel et bien. Ainsi, le calcul a été lancé avec $\Delta x = 0.08$ et $\Delta t = 0.005$ et l'on constate que l'évolution est différente de celle dans le cas $\Delta x = 0.1$ et $\Delta t = 0.005$. En effet, des modes parasites apparaissent assez rapidement en aval de la dune et pour le temps $t = 0.20$ la forme de la dune est la suivante :

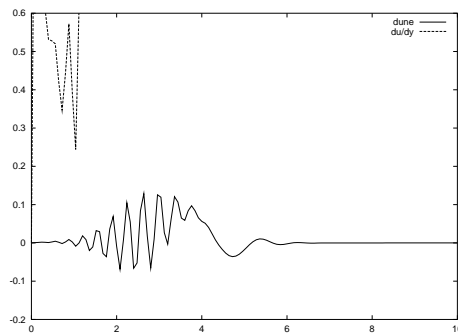


FIG. 22 – $\delta x = 8.10^{-2}$, $\delta t = 5.10^{-3}$, $t=0.2$

Les valeurs des paramètres de discrétisation utilisés pour la simulation numérique ont donc une importance considérable sur la validité de la simulation et la justesse des résultats obtenus. Nous avons pu, grâce à l'étude précédente, déterminer expérimentalement quelques grandes règles concernant les valeurs à donner à ces paramètres. Néanmoins, nous n'avons pas réussi à analyser ces mécanismes de manière précise en en faisant une étude théorique.

Il aurait fallu pour cela étudier la stabilité et la convergence de notre schéma de discrétisation du problème exact :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (16)$$

que l'on discrétise de la manière suivante :

$$f^{n+1}[i] = f^n[i] - \Delta t \frac{(3q[i] - 4q[i-1] + q[i-2]))}{2\Delta x} \quad (17)$$

Mais nous avons volontairement choisi d'orienter notre travail sur l'évolution de la dune en nous en remettant au code fourni, sans pouvoir, faute de temps, nous plonger plus avant sur les problèmes de convergence liés à la méthode de discrétisation.

3 Résultats des expériences numériques

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus en simulant l'érosion duaire grâce à différents modèles, que nous avons injectés dans le programme en C décrit précédemment.

3.1 Modèles "classiques" d'arrachement

3.1.1 Modèle d'Exner - 1925

Exner a proposé en 1925 un modèle d'arrachement du sable très simple : le sable est emporté proportionnellement à la vitesse du vent à proximité de la surface de la dune, c'est à dire à la vitesse du vent que l'on pourrait calculer à la surface de la dune dans le cas d'un fluide parfait, sans viscosité et donc en l'absence de couche limite. Ainsi, les grains de sable en surface sont systématiquement arrachés par le vent, quel que soit sa force, mais, pourrait-on dire, avec une probabilité proportionnelle à la vitesse du vent. Ce modèle bien que très simple permet de faire avancer une dune comme le montre la figure 23.

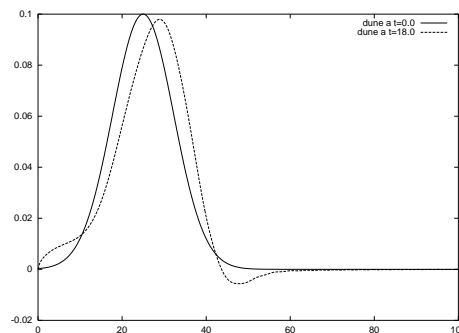


FIG. 23 – évolution d'une dune selon le modèle d'Exner

On observe également que la dune se déforme, se creusant sur sa face aval (partie droite de la figure) et s'aplatissant sur sa face amont.

Cependant, ce modèle ne nous a pas satisfait, car comme le montre la figure 21, il engendre nombre de petites dunes en amont de l'obstacle initial, qui se disperse et s'écrase. Or, le modèle ne tient pas compte du fait que, en-dessous d'une certaine vitesse de vent, aucun grain de sable n'est arraché car aucun ne peut s'extraire de la place qu'il occupe au milieu de ses voisins. Nous avons émis l'hypothèse que là était la source de nos problèmes.

En outre, supposer que l'arrachement est subordonné uniquement à la valeur de la vitesse du vent à proximité de la paroi n'est pas réaliste : cela serait vrai pour des grains déjà arrachés, donc dans un domaine où l'écoulement est uniforme à l'échelle du grain. Alors le vent exercerait effectivement sur les grains une force de traînée dépendant essentiellement de sa vitesse autour des grains. Mais ici, le vent n'a de prise que sur une face des grains ou, s'il a prise sur tout un grain, sa vitesse varie fortement d'une face à l'autre du grain. On ne peut donc pas négliger le *gradient* du vent autour du grain, que nous allons prendre en compte par la suite.

3.1.2 Arrachement proportionnel au frottement à la paroi

Avec Castem, nous avons prouvé la validité de la formule de Karman pour le frottement pariétal. C'est ce frottement qui est la base du second modèle que nous avons employé, dans lequel les grains sont arrachés à la dune sous l'effet du fort gradient de vitesse dans la couche limite. Ce modèle tient compte en outre du fait que, lorsque le vent est trop faible, aucun grain de sable n'est arraché. On écrit en

effet que le flux de matière est proportionnel au gradient de la vitesse (frottement τ) au-delà d'un certain seuil en-dessous duquel il est nul :

$$q = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < \tau_s \\ \tau - \tau_s & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

Nous nous sommes heurtés à de nombreux problèmes concernant ce modèle, car il divergeait très facilement : une partie du "sol" numérique se mettait à osciller de façon de plus en plus violente au fil des itérations, et la dune ne bougeait pas (figure 24). Nous n'avons donc pas réussi à obtenir de résultat pertinent avec ce modèle.

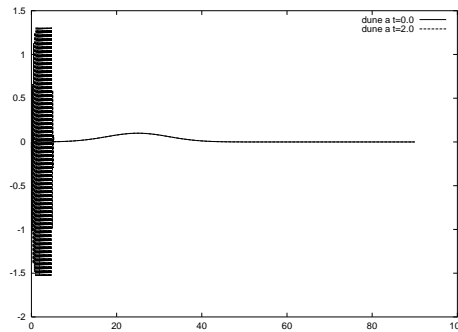


FIG. 24 – Oscillations dues au modèles " $q = \tau$ "

3.2 Raffinements des modèles d'arrachement

3.2.1 Influence de la gravité

Nous avons eu l'idée d'introduire dans le modèle un terme de gravité, dans le but de se rapprocher de la situation réelle ainsi que "d'amortir" les oscillations du modèle $q = \tau$.

La principale justification de cette démarche vient de ce que les grains de sables emportés doivent ensuite suivre l'écoulement, et sont donc amenés soit à "monter" la dune, soit à la "descendre". Ainsi, suivant la pente de la dune, les grains auront plus ou moins de difficultés à poursuivre leur chemin : parmi les grains qui auront été arrachés, une certaine proportion retombe sur la dune.

En outre, lorsque les grains sont entraînés "dans le sens de la pente", ils sont plus facilement arrachés car dès qu'ils s'élèvent un peu de la paroi ils sont emportés par l'écoulement, alors que dans le "sens de la montée", le vent qui les soulève les plaque aussitôt sur l'obstacle.

Nous avons donc ajouté au flux du modèle $q = \tau$ un terme linéaire en f' , négatif lorsque $f' > 0$ afin de tenir compte de la "difficulté à gravir la pente", et positif lorsque $f' < 0$ afin de tenir compte de la facilité d'arrachement des grains de ce côté de l'obstacle. L'équation régissant l'évolution de f s'est donc transformée en une équation de la forme de 19

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (19)$$

Une telle équation a cependant tendance à fournir des solutions "s'écrasant" avec le temps : il faut donc éviter de pondérer le terme de gravité par un coefficient trop

élevé sous peine de voir les solutions numériques tendre rapidement vers la solution $f = \text{constante}$, qui n'est pas intéressante.

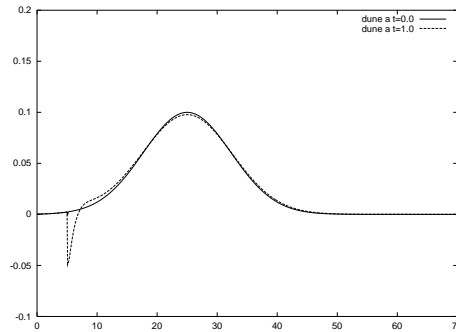


FIG. 25 – Déformation d'une dune selon le modèle " $q = \tau$ " avec influence de la gravité

Au cours de nos essais de simulation, nous n'avons pas observé de progression de la dune avec ce modèle, peut-être à cause du choix du modèle de base " $q = \tau$ ". En revanche, nous avons bien observé un léger affaissement de la dune ainsi qu'un "creusement" du sol juste après la zone proche de l'entrée du domaine, que nous avons déclarée "impossible à éroder" pour supprimer les problèmes de conditions à l'entrée (figure 25).

3.3 Modèle à plusieurs dunes

3.3.1 Modèle d'Exner

Constatant que les modèles à une seule dune n'étaient guère convaincants et qu'ils tendaient tous à créer plusieurs dunes en partant d'une seule, nous avons programmé quelques simulations sur un "paquet de dunes", afin de voir si ces dunes n'avanceraient pas dans nos modèles.

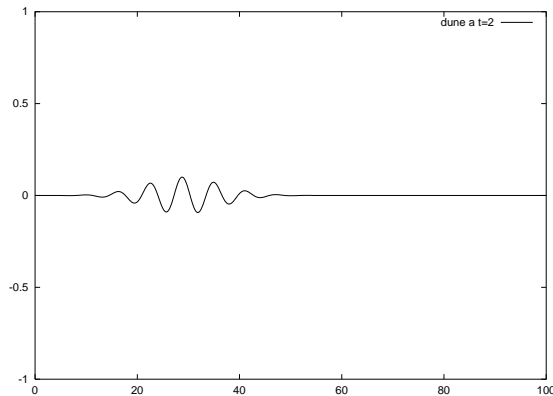


FIG. 26 – paquet gaussien de dunes

La première tentative fut un échec : nous avons programmé un "tapis de dunes", avec des dunes sinusoïdales réparties sur tout le domaine de calcul, mais nous observons des problèmes de divergence à l'entrée du domaine. Nous avons donc lancé les

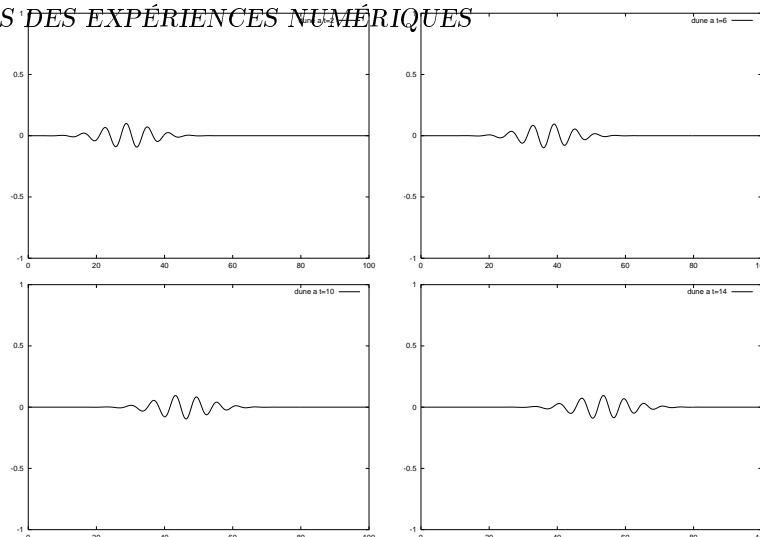


FIG. 27 – évolution d'un paquet de dunes selon le modèle d'Exner

calculs suivants sur un paquet gaussien de dunes, où l'on retrouvait les conditions aux limites de "terrain plat" (figure 26).

Il s'est vite avéré que le paquet de dunes avançait beaucoup mieux qu'une dune seule, au moins avec le modèle simple d'Exner : nous avons observé que le paquet se propageait avec peu de dispersion et de déformation sur une distance de l'ordre de son étalement initial (figure 27).

3.3.2 Modèle " $q = \tau$ "

En revanche, le modèle $q = \tau$ n'a toujours pas révélé de mouvement dunaire, en conservant ses problèmes à l'entrée du domaine où un "trou" s'est rapidement creusé. Mais lorsque l'on a ajouté l'influence de la pente, les dunes du paquet se sont déformées pour prendre une forme dissymétrique, tout en s'affaissant. La pente "au vent" était plus abrupte que la pente sous le vent (figure 28), comme sur les amoncellements représentés figure 1.

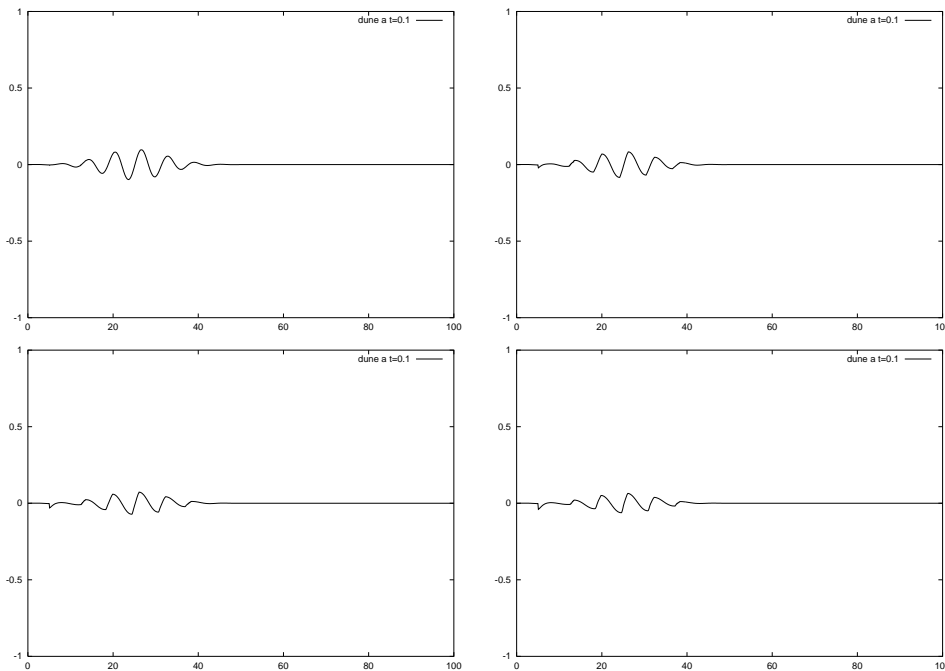


FIG. 28 – affaissement d'un paquet de dunes selon le modèle $q = \tau$ avec terme de pente

CONCLUSION

Nous avons présenté une première approche du problème de l'évolution d'une dune de sable soumise à un écoulement d'air. Nous nous sommes rendu compte que, pour réaliser une étude vraiment approfondie de ce sujet, de nombreuses heures supplémentaires de travail seraient nécessaires.

Nous avons été satisfaits des résultats obtenus grâce à Castem, et nous n'estimons pas que de grands progrès puissent être faits dans cette voie (calcul du frottement pariétal à partir d'un code de mécanique des fluides) pour le problème de l'érosion des dunes. Un regret néanmoins, le fait d'avoir utilisé ce logiciel comme une boîte noire, n'ayant pas eu le temps de nous pencher sur le code de calcul qu'il met en oeuvre. Cela pourrait peut-être permettre de soigner la modélisation en ce qui concerne les conditions limites notamment.

Les améliorations que l'on pourrait apporter à la deuxième partie de ce projet, le code en C donnant l'évolution de la dune, sont plus nombreuses. La première étude à mener serait celle, théorique, de la discrétisation de l'équation d'évolution de la dune. Nous pourrions ainsi nous intéresser à la stabilité du schéma et à la pertinence des calculs de manière beaucoup plus précise que par l'étude expérimentale que nous avons réalisée.

Ensuite, il s'agirait de réussir à obtenir un résultat acceptable avec la modélisation $q = \tau$, qui ne fonctionne pour l'instant pas, sans que nous sachions véritablement pourquoi, et qui devrait donner une solution d'évolution beaucoup plus proche de la réalité que le simple cas d'Exner. Il existe après de nombreux autres raffinements prometteurs à apporter au modèle. Il faudrait essayer d'introduire le phénomène

d'avalanche qui se produit sur les dunes quand la pente dépasse un certain seuil. L'expression du débit demande aussi à être affinée, en tenant compte par exemple non seulement de τ mais aussi de u : une fois les grains de sable arrachés du sol et sortis de la couche limite, ils sont entraînés par l'écoulement selon une loi qui devrait dépendre de u plutôt que de τ . La turbulence, omise dans cette étude, devrait aussi être introduite dans une analyse plus fine du phénomène. On a enfin enregistré ces dernières années de grandes avancées dans la compréhension des trois principaux modes de déplacement des grains de sable définis par Bagnold dans les années 40 : leur suspension dans la couche visqueuse, qui les entraîne avec elle, la *saltation* de certains grains et enfin la *reptation* de particules percutées par les grains mus par saltation. Un "bon" modèle devrait tenir compte de ces trois phénomènes.

Enfin, nous avons constaté que l'étude d'une dune solitaire n'était peut-être pas une bonne façon d'aborder le problème, car plusieurs de nos modèles nous ont montré qu'une telle dune avait tendance à se diviser en plusieurs petites dunes. Par ailleurs, en étudiant l'avancée d'un paquet de dunes, nous avons constaté un début de diffusion ; peut-être serait-il intéressant de poursuivre l'étude de cette diffusion, ainsi que d'entamer l'étude de l'amplification de petites perturbations sur un sol plat, afin de mettre en évidence une convergence de ces deux phénomènes vers un système de dunes de la taille caractéristique des dunes naturelles, parcouru de vaguelettes comme le sont ces mêmes dunes.

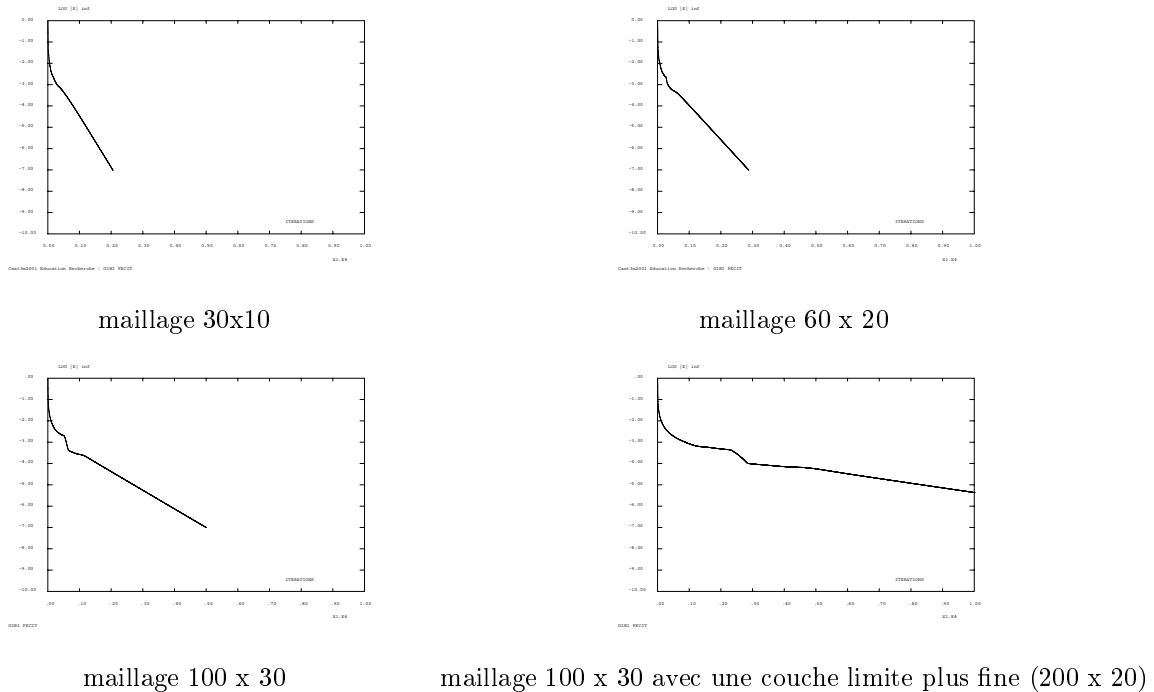


FIG. 29 – écart maximum entre deux itérations successives en fonction du numéro de l'itération (en échelle logarithmique)

A annexes

La vitesse de convergence de nos calculs en Castem était fortement liée à la finesse du maillage employé : ceux-ci demandaient plus de 10000 itérations pour converger dans le cas du maillage le plus serré.

Voici le stade le plus avancé que nous ayons obtenu de déformation d'un paquet de dunes selon le modèle $q = \tau$ avec terme de gravité : on constate bien que la pente "au vent" est plus abrupte que la pente sous le vent.

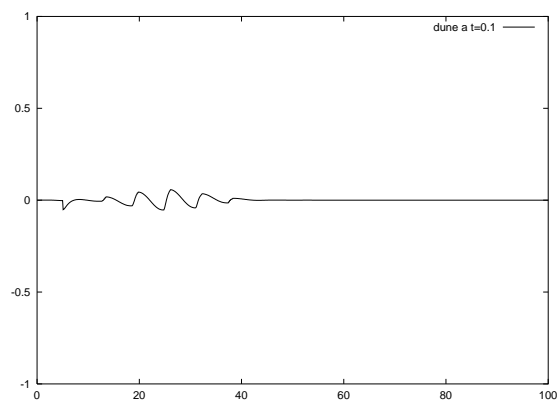


FIG. 30 – paquet de dunes déformé selon le modèle $q = \tau$ avec terme de pente

Références

- [1] ANDREOTI & CLAUDIN, Selection of dune shapes and velocities, The European Physical Journal, jan 08, 2002
- [2] HUERRE P., Cours de mécanique des fluides, Ecole polytechnique, édition 98
- [3] SCHLICHTING, Boundary layer theory, Mc Graw Hill, 1979