



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 231–235



Effet dispersif de la loi d'Exner menant à l'équation de Benjamin–Ono : ondulations d'un sol meuble

Exner's law dispersive effects leading to Benjamin–Ono equation: waves over an erodible bed

Pierre-Yves Lagrée^a, Kouamé Kan Jacques Kouakou^{a,b}, Émile Danho^b

^a Laboratoire de modélisation en mécanique, UMR CNRS 7607, B 162, Université Paris 6, 75252 Paris, France

^b Université de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire

Reçu le 12 novembre 2002 ; accepté après révision le 27 janvier 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

L'écoulement sur un sol meuble est envisagé avec une loi d'Exner liant une estimation du frottement pariétal au flux de matière meuble. L'évolution du fond est alors régie par l'équation linéaire de Benjamin–Ono dont nous exhibons une solution autosemblable approchée que nous comparons favorablement à des résolutions numériques. *Pour citer cet article : P.-Y. Lagrée et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The flow over an erodible bed is revisited supposing that the flux of sediments is proportional to the slip velocity of the potential flow. This gives a linear Benjamin–Ono equation which is numerically solved, this solution is favorably compared to a selfsimilar approached solution. *To cite this article: P.-Y. Lagrée et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Sols ; Érosion ; Sédimentation ; Loi d'Exner ; Benjamin–Ono

Keywords: Soils; Erosion; Sedimentation; Exner law; Benjamin–Ono

Abridged English version

Bearing in mind applications to the morphogenesis of fields of dunes or ripples in environmental flows (Balmforth and Provenzale [1], Yang [2]) we over simplify all the phenomena to focus only on the dispersive effect: i.e., the breaking of a bump into waves. We will show that this dispersion is induced by a perfect fluid effect.

Adresse e-mail : pyl@ccr.jussieu.fr (P.-Y. Lagrée).

Those flows are very complicated because full Navier–Stokes equations have to be solved on a boundary $f(x, t)$ changing with time, a transport model has to be introduced to link the flow (of air or water) to the flux of material (sediments or sand) q so that a conservation law (1) holds for the soil.

Here we oversimplify either the flow either the mass transport. The most simple solution of the flow over a bump is given by the small perturbation theory for a perfect fluid ($Re = \infty$) leading to the Hilbert integral (2) for the slip velocity (Germain [3]). We next revisit the Exner law. This law tells us that the flux q of sediments is a function of the skin friction near the bottom, complicated nonlinear laws have been settled; but, here, in this simple description, this flux is taken proportional to the slip velocity (up to this point we follow exactly Yang [2], p. 63, in this same book a complete review of all experimental sediment transport functions is done). Finally we obtain a linear Benjamin–Ono equation (3) for the bottom evolution (to be noticed that the same equation may be obtained if we suppose a Stokes flow ($Re = 0$) over the linearized bump!).

This linear Benjamin–Ono equation (3) has then been solved for long times and large domains using finite differences (the nonlinear Benjamin–Ono equation equation has been solved to test the numerical procedure). The short time behaviour, on Fig. 2, is completely different of what was assumed by Exner (as quoted by Yang [2], p. 64 and reproduced on Fig. 1). Indeed, on this figure the dune looks like a breaking water wave, in fact on Fig. 2 we observe the dispersion induced by the flow generating a wave train. This wave train fills all the $x > 0$ space as time increases, but the amplitude diminishes. Furthermore, we construct a self-similar solution (4) of Eq. (3): the oscillatory behaviour of the numerical solution on Fig. 3 allows us to estimate the integral as a second order derivative times i . The approached self-similar differential equation is (5), one solution is $\phi(\eta) = \exp(i(\eta/2)^2)$. For large t all computations, starting from a initial bump, collapse on the same curve: $t^{1/2} f(x, t)$ is function of $\eta = x/t^{1/2}$; this curve is well described by $\cos(1 + (\eta/2)^2)$ as we see on Fig. 3 (the computed curve has been rescaled).

To sum up, the flow over a bump is taken in the perfect fluid linearised framework, the flux of sediments is taken proportional to the fluid slip velocity; the conservation law is solved and a self similar approached solution of the linear Benjamin–Ono equation is exhibited $f(x, t) = (1/\sqrt{t}) \cos(1 + ((x/2\sqrt{t}))^2)$, it is close to the numerical solution. Nonlinear terms and an instability mechanism have been introduced by Kroy et al. [5] or Andreotti et al. [6], those ingredients are then necessary to impose a constant dune shape.

1. Introduction

Ayant en vue une compréhension schématique des phénomènes naturels de formation de dunes ou de rides sur un sol meuble (de sable ou de sédiments) plongé dans un écoulement (que ce soit de l'air ou de l'eau), nous nous proposons de réexaminer une conséquence de la loi fondamentale utilisée pour prédire le flux de matériaux à la surface du sol en fonction de la vitesse de l'écoulement près de la paroi.

Ces problèmes d'érosion/sédimentation sont particulièrement complexes (Balmforth et Provenzale [1]) puisque non seulement il faut résoudre des équations de Navier–Stokes pour le fluide avec des équations de transport pour les sédiments, mais en plus il faut tenir compte de l'évolution du profil du sol (de manière tout à fait impropre nous le désignons par le terme « dune », en effet nos hypothèses sont excessivement restrictives). Bien entendu ce profil que nous noterons $f(x, t)$ gouverne l'écoulement par le jeu des conditions aux limites sur cette paroi, mais cette paroi évolue elle même car, de par l'écoulement, des particules du sol sont arrachées et vont se redéposer éventuellement plus loin : un flux de matière noté q est créé. L'ensemble modifie (à une échelle de temps supposée très longue par rapport au temps du fluide) la forme de la paroi de par une loi de conservation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (1)$$

Tout le problème réside dans la relation entre q et l'écoulement. Il est intuitif de penser qu'aux endroits où le fluide est accéléré la matière peut être arrachée et donc que q y est important. Ces phénomènes se produisant près de la paroi, q dépend du frottement pariétal.

2. D’Exner à Benjamin–Ono

La démarche initiale d’Exner en 1925 (citée par exemple dans Yang [2], p. 63) consiste à écrire que q est proportionnel au frottement pariétal qui lui même est grossièrement proportionnel à la vitesse près du sol. Cette vitesse est estimée en supposant en première approximation un écoulement de fluide parfait au dessus de la paroi. La résolution de l’équation de Laplace en incompressible linéarisé en ayant adimensionné les équations nous donne classiquement (hypothèse des petites perturbations, Germain [3]) : $u = 1 + H(f)$ avec

$$H(f) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f'}{x - \xi} d\xi \tag{2}$$

L’intégrale est prise en partie finie, f' est $\partial_x f$. L’équation finale adimensionnée d’évolution du fond meuble est donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f'}{x - \xi} d\xi \tag{3}$$

On y reconnaît l’équation de Benjamin–Ono linéaire (Benjamin [4]), l’adimensionnement y a été fait de manière implicite.

Etant admis que le frottement pariétal entraînait les particules de la paroi, on peut présenter ici une autre loi explicite liant le frottement et la forme de la paroi. Lorsque l’écoulement arrivant sur la dune est un écoulement cisailé pur ($u = y, v = 0$) dans le cas infiniment visqueux, il faut résoudre les équations de Stokes ($0 = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$). La perturbation de frottement pariétal à la paroi (par linéarisation des conditions aux limites) est exactement $\tau = 2H(f)$. Dans le cadre de nos hypothèses restrictives, la relation liant le frottement pariétal à la forme du fond est donc exactement la même (au facteur 2 près) à $Re = 0$ (dans un écoulement cisailé) et $Re = \infty$ (dans un écoulement uniforme) !

3. Résolution numérique

L’équation complète de Benjamin–Ono contient au membre de droite un terme supplémentaire $4f \partial f / \partial x$. Pour vérifier notre résolution numérique (par différences finies, le terme de dérivée de l’intégrale étant discrétisé par une différence finie décentrée à trois points (3 – 4 + 1), explicite en temps) nous avons ajouté ce terme non linéaire et vérifié qu’effectivement notre schéma donnait comme solution le soliton $1/(1 + x^2)$ qui se propage vers la gauche. L’équation est résolue numériquement ensuite dans le cas linéaire. Un exemple de simulation pour des temps courts est présenté sur la Fig. 2. On constate que le dessin original d’Exner (issu de Yang [2]) tombe complètement en défaut, la dune (dans ce cadre simplifié) ne se comporte pas comme une vague qui déferle (Fig. 1) mais au contraire

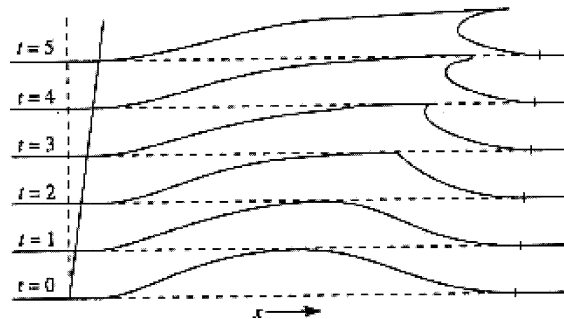


Fig. 1. Evolution probable d’une dune sous l’action de l’écoulement d’un fluide dessin reproduit de Yang [2], p. 64.

Fig. 1. Probable evolution of a dune as indicated by Exner and reproduced from Yang [2], p. 64.

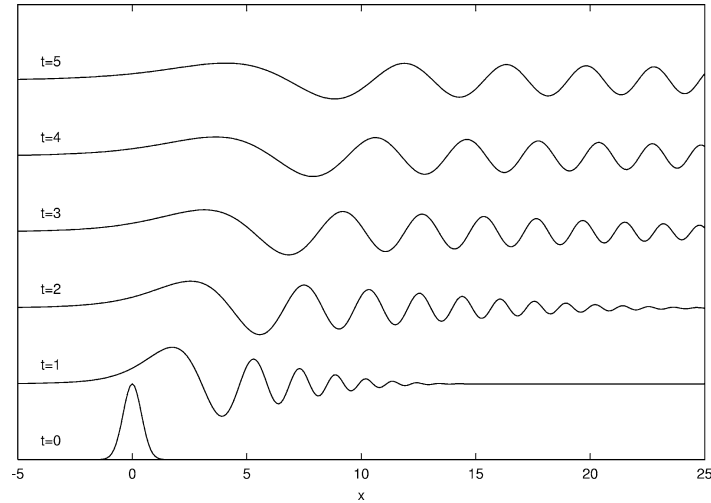


Fig. 2. Exemple calculé numériquement à partir de l'équation de Benjamin-Ono linéaire d'évolution en fonction du temps d'une dune initiale en un train d'ondes, le domaine de calcul est supérieur à celui représenté.

Fig. 2. One example of numerical simulation of the linear Benjamin-Ono equation: an initial bump is dispersed in waves (computation domain is far larger than $x = 25$).

qui se disperse (ressemblant de loin à la solution dispersive d'Airy de KdV, mais se propageant en sens inverse). Une bosse initiale est détruite et se transforme en un train d'ondes dont l'amplitude s'amenuise dans le temps.

4. Comportement asymptotique

Pour vérifier la solution numérique on cherche une description asymptotique de l'expression de ϕ . Une première remarque simple est que la variable $\eta = xt^{-1/2}$ est variable de similitude et que la solution autosemblable d'intégrale constante donnée (ce qui revient à fixer la masse) est de la forme :

$$f(x, t) = t^{-1/2} \phi(xt^{-1/2}) \quad (4)$$

Nous inspirant de la solution numérique qui présente des oscillations et sachant que la dérivée de l'intégrale (2) pour un mode de Fourier $\exp(-ikx)$ est dans l'espace de Fourier $-i|k|k \exp(-ikx)$, cela nous permet d'approximer le membre de droite à une dérivée seconde multipliée par i , Éq. (3) pour les variables de similitude est à donc peu près :

$$-\frac{1}{2}(\phi(\eta) + \eta\phi'(\eta)) \simeq i\phi''(\eta) \quad (5)$$

Cette équation a une solution exacte $\phi(\eta) = \exp(i(\eta/2)^2)$ (elle est le pendant de la solution dispersive d'Airy de KdV dont la variable de similitude est $xt^{-1/3}$). Sur la Fig. 3 on trace donc la solution numérique $t^{1/2}f(x, t)$ en fonction de $xt^{-1/2}$, on constate que pour des temps suffisamment longs les courbes collapent sur une même courbe (différentes dunes initiales mènent effectivement à cette même courbe finale, modulo une remise à l'échelle pour ajuster l'amplitude). La solution approchée est aussi tracée (elle est déphasée de e^1 pour faire coïncider les courbes : $\cos(1 + (\eta/2)^2)$).

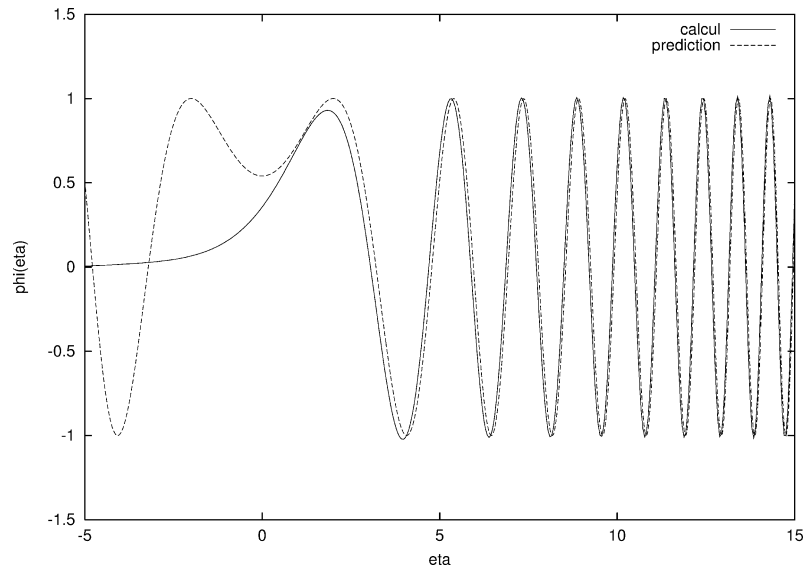


Fig. 3. Tracé de la solution autosemblable calculée (« calcul » : superposition de plusieurs $t^{1/2}f(x, t)$ en fonction de $xt^{-1/2}$ pour différents t grands) et de la solution autosemblable approchée (« prediction » $\cos(1 + (\eta/2)^2)$); le domaine de calcul est plus important pour éviter les effets de bord et de propagation du front.

Fig. 3. Plot of the self similar computed solution ('calcul': superposition of several $t^{1/2}f(x, t)$ as function of $xt^{-1/2}$ for large t), the curve denoted 'prediction' is $\cos(1 + (\eta/2)^2)$; the computation domain is very large in order to avoid the effect of the right boundary and the propagation of the front.

5. Discussion

Il existe une littérature récente sur ces phénomènes et notamment sur l'écoulement sur des dunes éoliennes impliquant l'intégrale de Hilbert (2) dans la résolution (Sauermaun et al. [5], Andreotti et al. [6]). Notre but était ici de simplifier au maximum l'écoulement du fluide et de ne caractériser que la dispersion induite par (2) compte tenu d'une version simplifiée de la loi d'Exner. Partant d'une dune initiale quelconque il se crée donc un train d'ondes évanescents. Nous avons calculé une solution autosemblable de l'équation de Benjamin-Ono linéaire décrivant ce phénomène et trouvé une approximation pour les temps longs et les x/\sqrt{t} grands de cette solution sous la forme de $f(x, t) = (1/\sqrt{t}) \cos(1 + ((x/(2\sqrt{t})))^2)$.

Remerciement

This work was supported by ACI "Jeunes chercheurs" no. 2314.

Références

- [1] N.J. Balmforth, A. Provenzale, Geomorphological Fluid Mechanics, in: Lecture Notes in Phys., Vol. 582, Springer, 2001.
- [2] C.T. Yang, Sediment Transport: Theory & Practice, McGraw-Hill Education Europe, 1995.
- [3] P. Germain, Mécanique, Tome II, Ellipses, 1986.
- [4] T.B. Benjamin, Internal waves of permanent form in fluids of great depth, J. Fluid Mech. 29 (3) (1967) 559–592.
- [5] G. Sauermaun, K. Kroy, H.J. Herrmann, Continuum saltation model for sand dunes, Phys. Rev. E 64 (2001) 031305.
- [6] B. Andreotti, P. Claudin, S. Douady, Selection of dune shapes and velocities. Part 2: A two-dimensional modelling, Eur. Phys. J. B 28 (2002) 341–352.