

Équations de Navier Stokes Réduites pour les écoulements.

Applications en biomécanique

P.-Y. LAGRÉE

Lab. de Modélisation en Mécanique, UMR CNRS 7607, B 162,
Université Paris 6, 75252 Paris FRANCE
pyl@ccr.jussieu.fr

Introduction

But: mettre en œuvre des équations plus simples que Navier Stokes

Simulations temps réel/ traitement d'image

Introduction

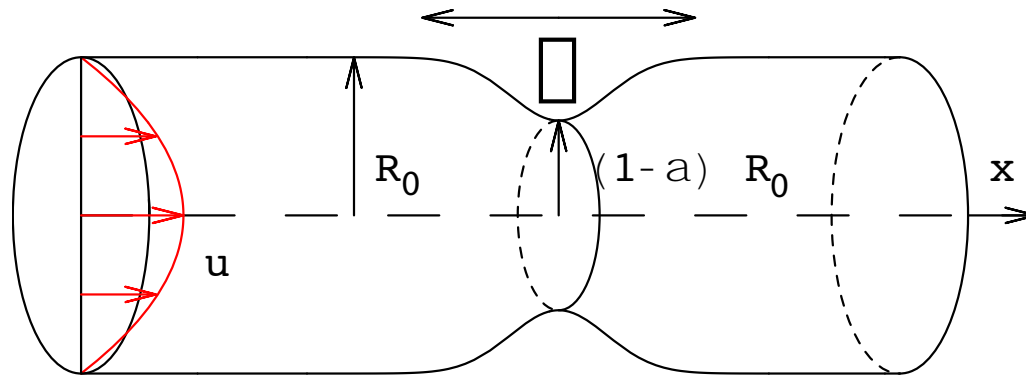
But: mettre en œuvre des équations plus simples que Navier Stokes

Simulations temps réel/ traitement d'image

Partant de Navier Stokes

- NS est simplifié en un jeu plus simple d'équations
 - comprenant les échelles pertinentes
 - les phénomènes les plus importants
- on simplifie encore plus par des équations intégrales 1D
- On compare ensuite dans certains cas les trois approches NS/ RNSP/ Intégral

RNSP Scales



En utilisant:

$$x^* = xR_0Re, \quad r^* = rR_0, \quad u^* = U_0u, \quad v^* = \frac{U_0}{Re}v, \quad t^* = t\frac{R_0}{U_0}Re,$$

$$p^* = p_0^* + \rho_0U_0^2p \quad \text{and} \quad \tau^* = \frac{\rho U_0^2}{Re}\tau$$

le système suivant d'équations différentielles est obtenu à partir de Navier Stokes, lorsque $Re \rightarrow \infty$:

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}u + \left(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right),\end{aligned}$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}u + \left(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}u + \left(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

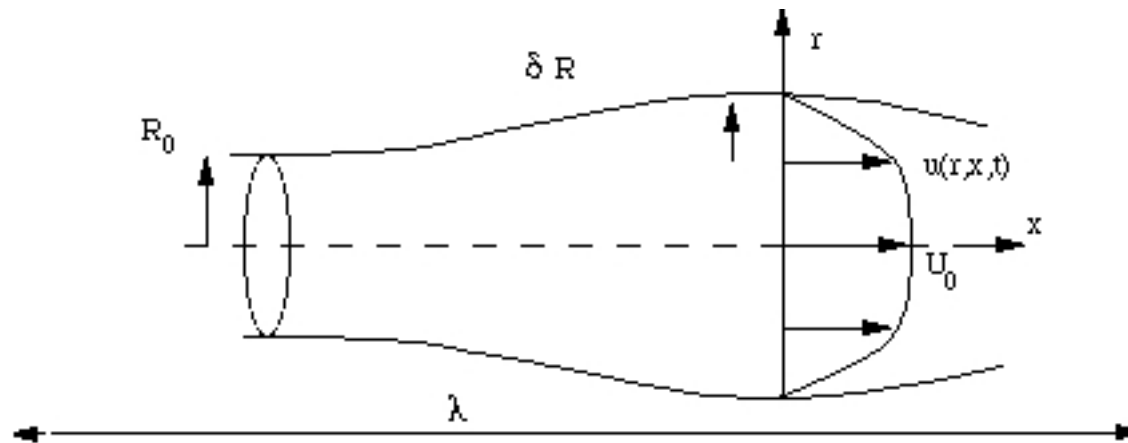
+ Les conditions aux limites.

3 Applications

- Application 1/3:
écoulement instationnaire dans un tuyau souple axi symétrique (artère)
comparaison RNSP/ Intégrale
- Application 2/3:
écoulement stationnaire dans un tuyau rigide axi symétrique (artère sténosée)
évaluation de la valeur de la contrainte maximale
- Application 3/3:
écoulement stationnaire dans un tuyau rigide 2D symétrique (modèle expérimental de glotte)
écoulement instationnaire dans un tuyau souple 2D symétrique (modèle numérique de glotte)

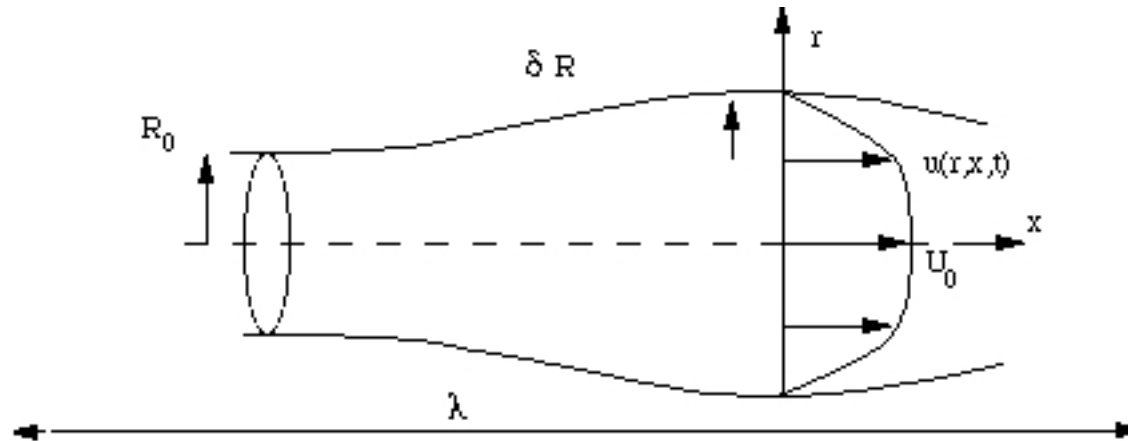
Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

Adimensionnement:



Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

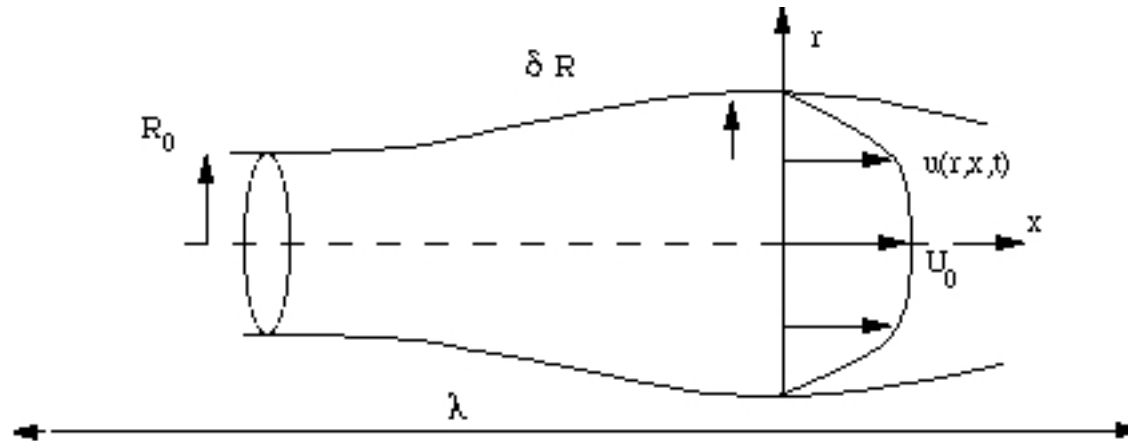
Adimensionnement:



Divergence de la vitesse: $\frac{U_0}{\lambda} \sim \frac{(\delta R/T)}{R_0}$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

Adimensionnement:

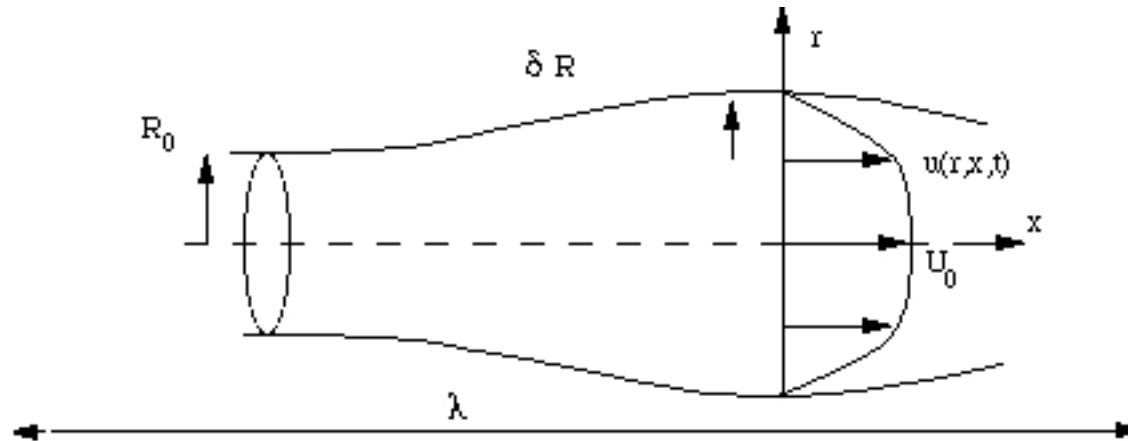


Divergence de la vitesse: $\frac{U_0}{\lambda} \sim \frac{(\delta R/T)}{R_0}$

Conservation de qt. mvt.: $\rho \frac{U_0}{T} \sim k \frac{\delta R}{\lambda}$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

Adimensionnement:



Divergence de la vitesse: $\frac{U_0}{\lambda} \sim \frac{(\delta R/T)}{R_0}$

Conservation de qt. mvt.: $\rho \frac{U_0}{T} \sim k \frac{\delta R}{\lambda}$ donc $\lambda = T \sqrt{((kR_0)/\rho)}$

Non linéarité $(\frac{U_0^2}{\lambda}) / (\frac{U_0}{T}) = \frac{\delta R}{R_0}$

Viscosité: $(\mu \frac{U_0}{R_0^2}) / (\rho \frac{U_0}{T}) = \nu \frac{T}{R_0^2}$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}u \right),$$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}u \right), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0},$$

$$\alpha = R_0 \sqrt{\frac{2\pi/T}{\nu}}$$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}u \right), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0},$$

$$\alpha = R_0 \sqrt{\frac{2\pi/T}{\nu}}$$

- élasticité de la paroi:

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}u \right), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0},$$

$$\alpha = R_0 \sqrt{\frac{2\pi/T}{\nu}}$$

- élasticité de la paroi: $p(x, t) = k(R(x, t) - R_0)$

Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(u \frac{\partial}{\partial x}u + v \frac{\partial}{\partial r}u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{r\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r}u \right), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0},$$

$$\alpha = R_0 \sqrt{\frac{2\pi/T}{\nu}}$$

- élasticité de la paroi: $p(x, t) = k(R(x, t) - R_0)$

+ Conditions aux limites: ici hyperboliques ($R(x_{in}, t)$ and $R(x_{out}, t)$) données.

Écoulement dans une artère élastique: relations intégrales

- relations intégrales: adaptées des relations de Von Kármán

L'idée consiste à intégrer transversalement les équation (par rapport à la variable réduite $\eta = r/R$) du centre du tuyau à la paroi ($0 \leq \eta \leq 1$).

- U_0 , la vitesse le long de l'axe,

- q une sorte de perte de flux de masse (δ_1),

- Γ une sorte de perte de flux de quantité de mouvement (δ_2):

$$U_0(x, t) = u(x, \eta = 0, t), \quad q = R^2(U_0 - 2 \int_0^1 u\eta d\eta) \quad \& \quad \Gamma = R^2(U_0^2 - 2 \int_0^1 u^2\eta d\eta).$$

Écoulement dans une artère élastique: relations intégrales

En intégrant l'équation de la masse:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x} (R^2 U_0 - q) = 0, \quad R = 1 + \varepsilon_2 h.$$

En intégrant l'équation de quantité de mouvement, grâce aux conditions aux limites:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma - U_0 \frac{\partial}{\partial x} q \right) = -2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \tau, \quad \tau = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

De la même équation évaluée sur l'axe de symétrie (en $\eta = 0$), on obtient une équation pour la vitesse le long de l'axe $U_0(x, t)$:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\tau_0}{R^2}, \quad \tau_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

Conditions aux limites: donnée de $(h(x_{in}, t)$ and $h(x_{out}, t))$.

Fermeture

Les deux équations précédentes introduisent la valeur du frottement en $\eta = 0$, sur l'axe: $((\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})|_{\eta=0})$ le frottement en $\eta = 1$, sur la paroi: $((\frac{\partial u}{\partial \eta})|_{\eta=1})$.

- de l'information a été perdue, nous avons besoin d'une relation de fermeture entre (Γ, τ, τ_0) et (q, R, U_0) .

- on doit imaginer des profils de vitesse et en déduire des relations liant Γ , τ et τ_0 et q , U_0 et R .

Fermeture: Womersley

- L'idée la plus simple consiste à utiliser les profils de la solution linéarisée donnée par Womersley (1955):

$$(j_r + ij_i) = \left(\frac{1 - \frac{J_0(i^{3/2}\alpha\eta)}{J_0(i^{3/2}\alpha)}}{1 - \frac{1}{J_0(i^{3/2}\alpha)}} \right) \cdot$$

- On suppose alors que la distribution de vitesse a la même dépendance en η . Cela veut dire que l'on suppose que le mode fondamental impose la structure radiale de l'écoulement.

Exemples profils animés :

$$\alpha = 3.2$$

$$\alpha = 10$$

Les coefficients de fermeture

- par intégration/ dérivation, on trouve:

$$\Gamma = \gamma_{qq} \frac{q^2}{R^2} + \gamma_{qu} q U_0 + \gamma_{uu} R^2 U_0^2, \quad \tau = \tau_q \frac{q}{R^2} + \tau_u U_0 \quad \tau_0 = \tau_{0q} \frac{q}{R^2} + \tau_{0u} U_0.$$

Les coefficients $((\gamma_{qq}, \gamma_{qu}, \gamma_{uu}), (\tau_q, \tau_u), (\tau_{0q}, \tau_{0u}))$ ne dépendent que de α .

Les coefficients de fermeture

- par intégration/ dérivation, on trouve:

$$\Gamma = \gamma_{qq} \frac{q^2}{R^2} + \gamma_{qu} q U_0 + \gamma_{uu} R^2 U_0^2, \quad \tau = \tau_q \frac{q}{R^2} + \tau_u U_0 \quad \tau_0 = \tau_{0q} \frac{q}{R^2} + \tau_{0u} U_0.$$

Les coefficients $((\gamma_{qq}, \gamma_{qu}, \gamma_{uu}), (\tau_q, \tau_u), (\tau_{0q}, \tau_{0u}))$ ne dépendent que de α .

$$\begin{aligned} \gamma_{uu} = & 1 - \int j_i^2 / (\int j_i)^2 - (2 \int j_r j_i) / \int j_i - \int j_r^2 + \\ & + (2 \int j_i^2 \int j_r) / (\int j_i)^2 + (2 \int j_i j_r \int j_r) / \int j_i - \\ & - (\int j_i^2 (\int j_r)^2) / (\int j_i), \end{aligned}$$

$$\tau_{0u} = \partial_{\eta}^2 j_{r\eta=0} + \partial_{\eta}^2 j_{i\eta=0} / \int j_i - (\partial_{\eta}^2 j_{i\eta=0} \int j_r) / \int j_i.$$

Remarques

- La différence principale avec d'autres relations intégrales est que dans notre approche on introduit une relation supplémentaire (c.f. l'aéronautique). Plutôt que q , Γ ou U_0 les auteurs utilisent Q , Q_2 et U_0 :

$$Q = \int_0^R 2\pi u r dr \quad Q/\pi = U_0 R^2 - q$$

$$Q_2 = \int_0^R 2\pi r u^2 dr \quad Q_2/\pi = U_0^2 R^2 - \Gamma$$

Remarques

Soustrayant la troisième de la seconde on obtient le "système classique":

$$2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q_2) = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \pi \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1}$$

Remarques

Soustrayant la troisième de la seconde on obtient le "système classique":

$$2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q_2) = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \pi \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1}$$

Le frottement pariétal ($\tau_1 = \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1}$) est souvent estimé par $\tau_1 = -\frac{8\pi}{\alpha^2} \frac{Q}{\pi R^3}$, qui n'est vrai que pour Poiseuille. Il est parfois remplacé par la relation instationnaire:

$$T_\tau \frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1 = -\frac{8}{\alpha^2} \left(Q + T_Q \frac{\partial Q}{\partial t} + \dots \right)$$

Remarques

Soustrayant la troisième de la seconde on obtient le "système classique" :

$$2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}(Q_2) = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \pi \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1}$$

Le frottement pariétal ($\tau_1 = \frac{2\pi}{\alpha^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1}$) est souvent estimé par $\tau_1 = -\frac{8\pi}{\alpha^2} \frac{Q}{\pi R^3}$, qui n'est vrai que pour Poiseuille. Il est parfois remplacé par la relation instationnaire:

$$T_\tau \frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1 = -\frac{8}{\alpha^2} \left(Q + T_Q \frac{\partial Q}{\partial t} + \dots \right)$$

- Nous ne prétendons pas que notre description est meilleure, mais pour une entrée sinusoidale à $\varepsilon_2 = 0$ nous retrouvons bien la solution linéaire de Womersley.

Nos profils sont réalistes car ils présentent un "overshoot" et un courant de retour près de la paroi.

- RNSP **Comparaison RNSP/ Intégral 1D/ pur Womersley**

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon_2(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi}{\alpha^2 r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

$$p(x, t) = k(R(x, t) - R_0)$$

- Intégral 1D

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x}(R^2U_0 - q) = 0, \quad R = 1 + \varepsilon_2h.$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon_2(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma - U_0\frac{\partial}{\partial x}q) = -2\frac{2\pi}{\alpha^2}\tau, \quad \tau = (\frac{\partial u}{\partial \eta})|_{\eta=1} - (\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})|_{\eta=0}.$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2U_0\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{2\pi}{\alpha^2}\frac{\tau_0}{R^2}, \quad \tau_0 = (\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})|_{\eta=0}.$$

$$p(x, t) = k(h(x, t))$$

- Womersley

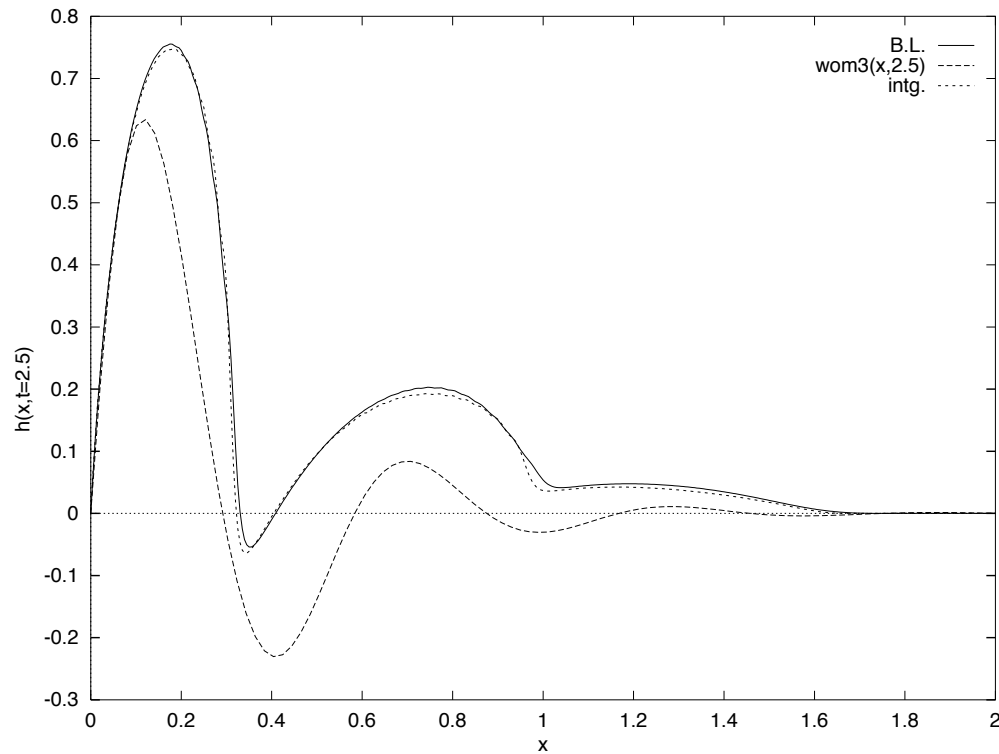
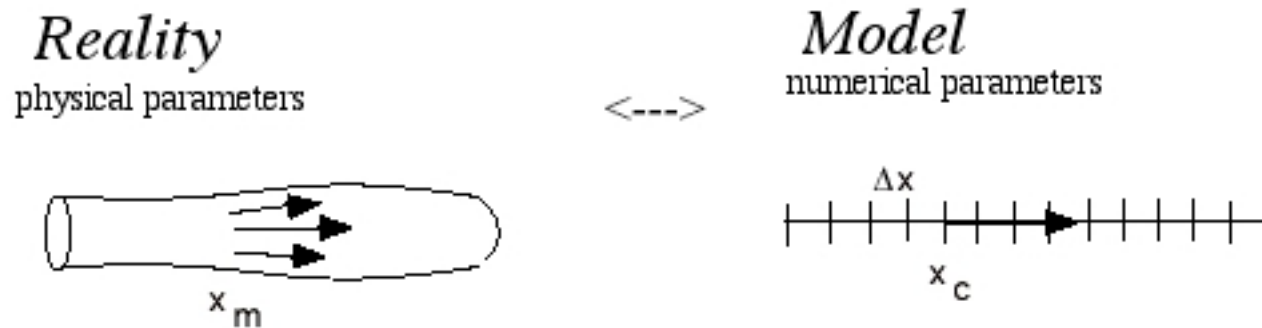


Figure 1: Le déplacement de la paroi au temps $t = 2.5$ ($h(x, t = 2.5)$) en fonction de x est tracé. Le tiré ($wom3(x,2.5)$) est la solution de Womersley de référence, le trait plein est le résultat de code de couche mince RNSP et les points (intg) sont le résultat de la solution intégrale ($\alpha = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ and $\varepsilon_2 = 0.2$).

Méthode inverse

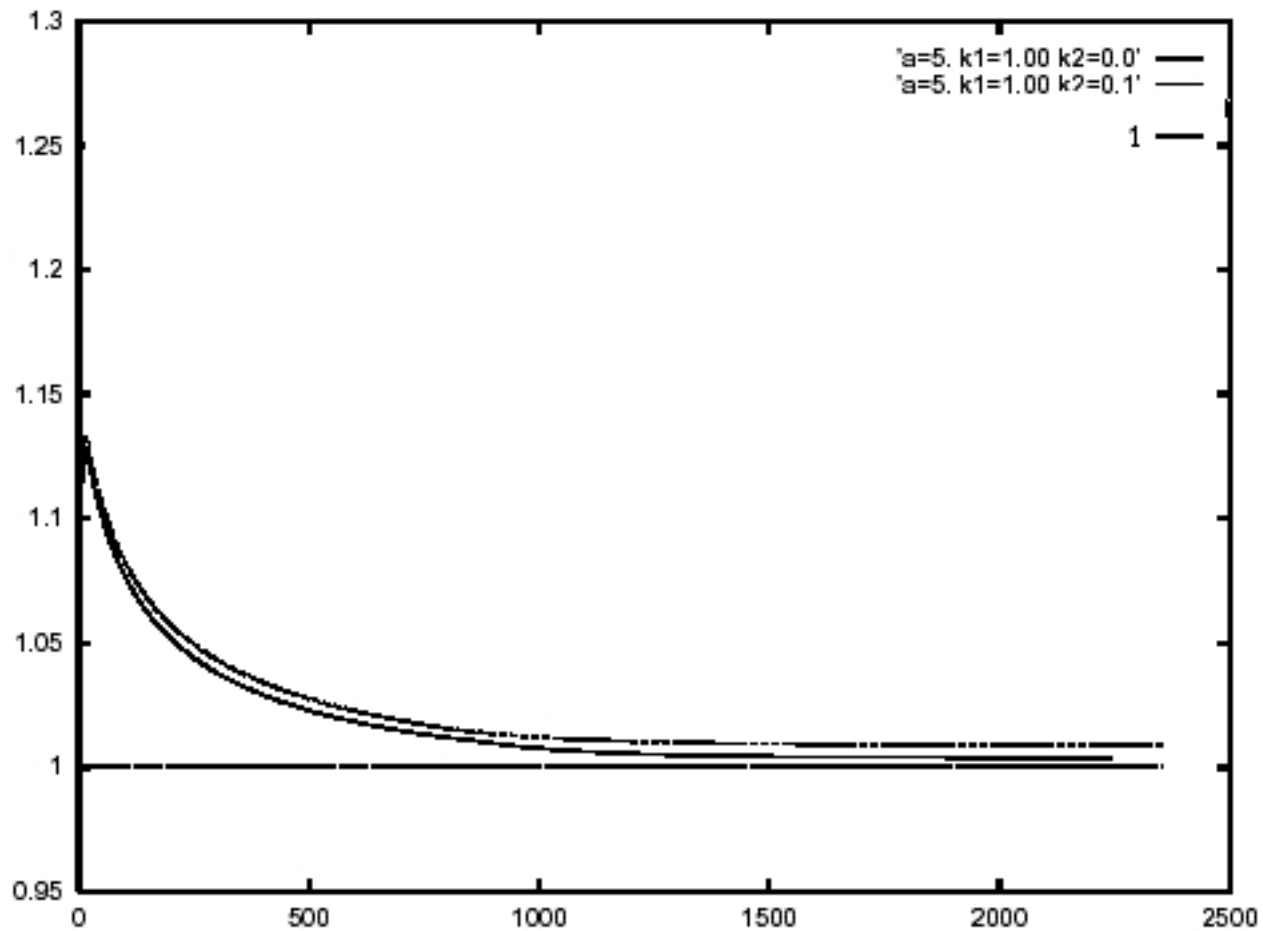
En utilisant les équations RNSP comme données synthétiques on cherche à retrouver les paramètres par une méthode inverse (rétropropagation...)

Settle a non invasive method to estimate wall elasticity



Minimisation entre la "mesure" et le calcul 1D en un point.

Méthode inverse



Exemple de résolution: historique des itérations pour retrouver la valeur visée $k = 1$.

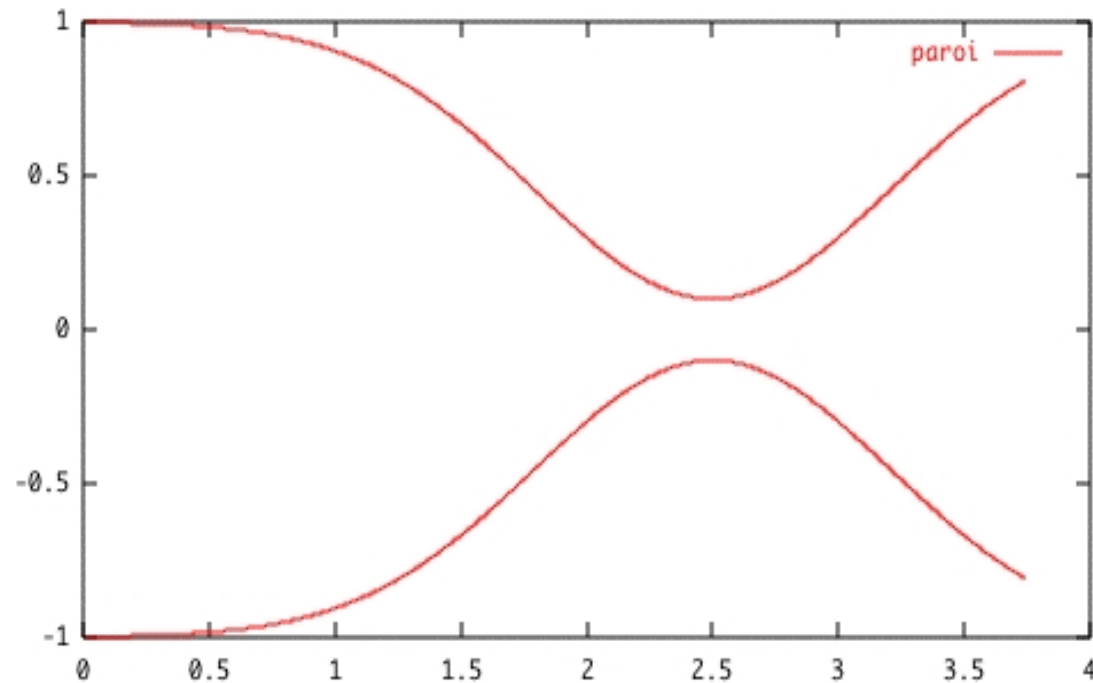
Application 1/3: Ecoulement dans une artère élastique: Conclusion

- On a une bonne description RNSP/ équations intégrales
- Les tests ont été effectués en direct et en inverse
- ...

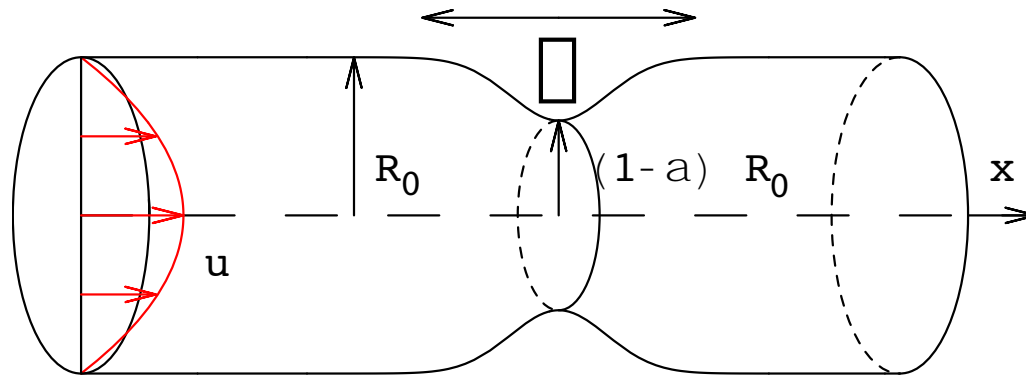
Application 2/3: Ecoulement dans une artère sténosée

collaboration: S. Lorthois IMFT

(F. Cassot & M.-P. Vergnes, INSERM, + B. de Bruin RuG)



RNSP Scales



En utilisant:

$$x^* = xR_0Re, \quad r^* = rR_0, \quad u^* = U_0u, \quad v^* = \frac{U_0}{Re}v, \quad t^* = t\frac{R_0}{U_0}Re,$$

$$p^* = p_0^* + \rho_0U_0^2p \quad \text{and} \quad \tau^* = \frac{\rho U_0^2}{Re}\tau$$

le système suivant d'équations différentielles est obtenu à partir de Navier Stokes, lorsque $Re \rightarrow \infty$:

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv = 0,$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u),\end{aligned}$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

+ Les conditions aux limites.

RNSP: Reduced Navier Stokes/ Prandtl System

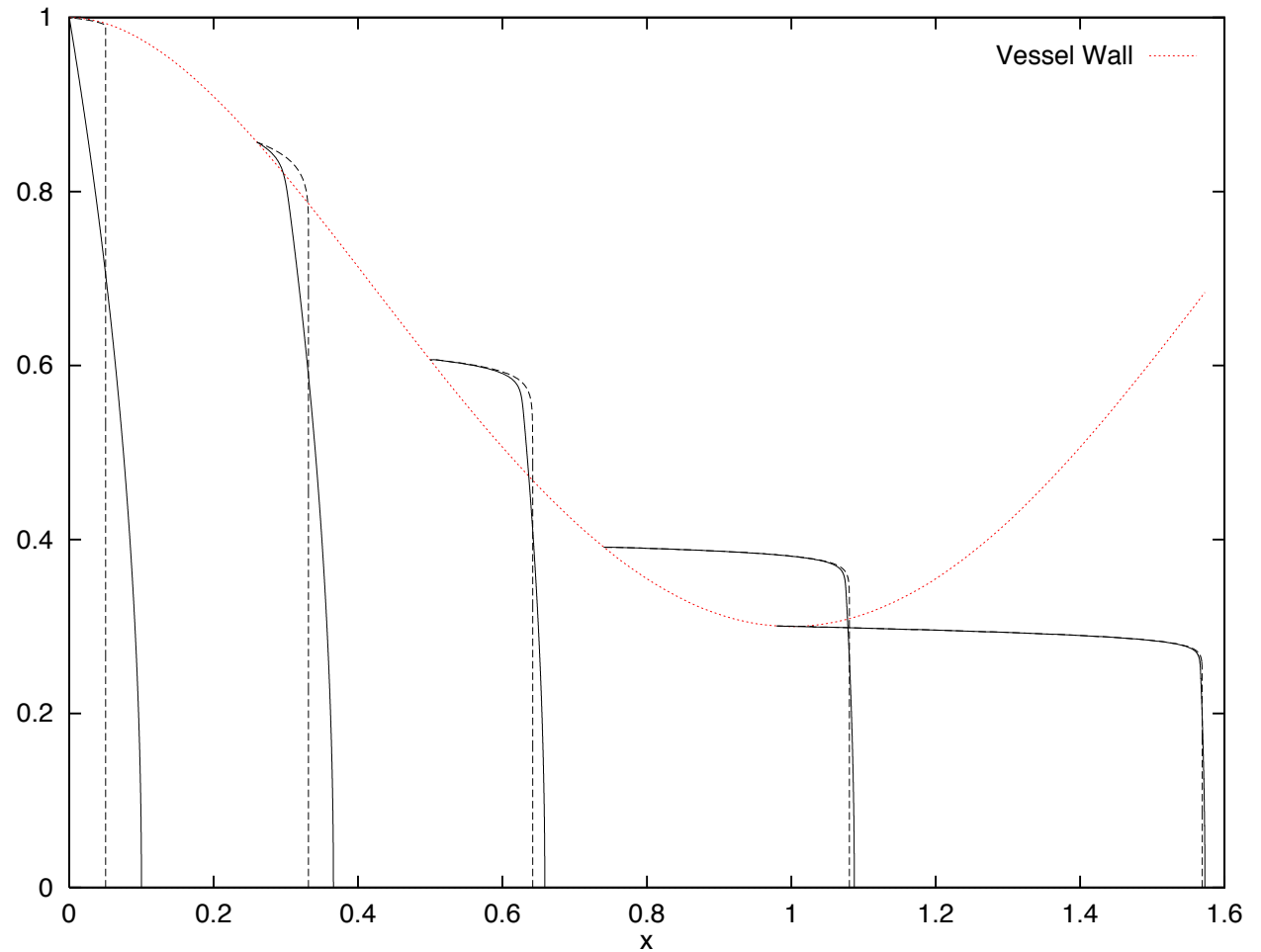
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\partial r}rv &= 0, \\ (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r}.\end{aligned}$$

- symétrie axiale ($\partial_r u = 0$ et $v = 0$ en $r = 0$),
- adhérence à la paroi ($u = v = 0$ en $r = 1 - f(x)$),
- profils d'entrée ($u(0, r)$ et $v(0, r)$) donnés
- pas de condition de sortie en $x_{out} = \frac{x_{out}^*}{R_0 Re}$
- streamwise marching (résolution en suivant l'écoulement)
même lorsqu'il y a séparation .

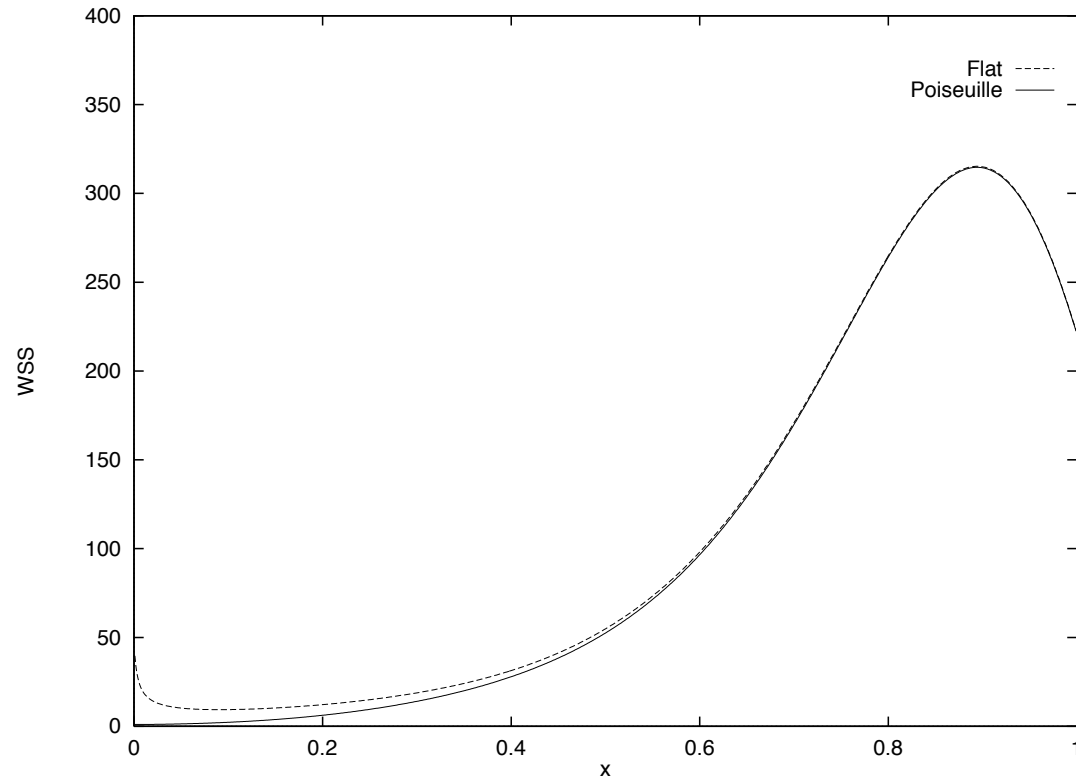
Evolution du profil de vitesse le long du convergent dans une sténose à 70% ($Re = 500$) ;

— trait plein:
Poiseuille en entrée

- - - - trait pointillé:
profil plat en entrée



Frottement pariétal – Wall Shear Stress

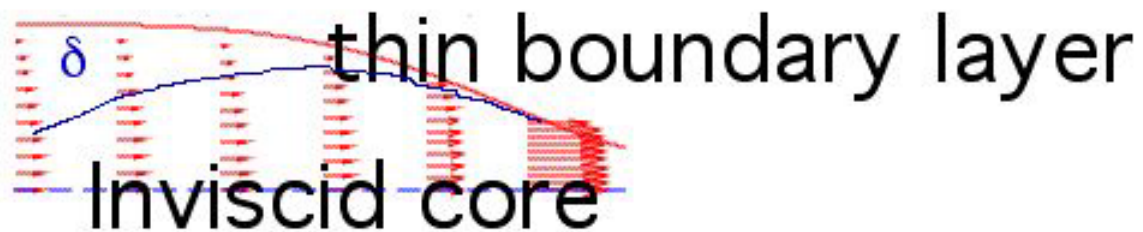
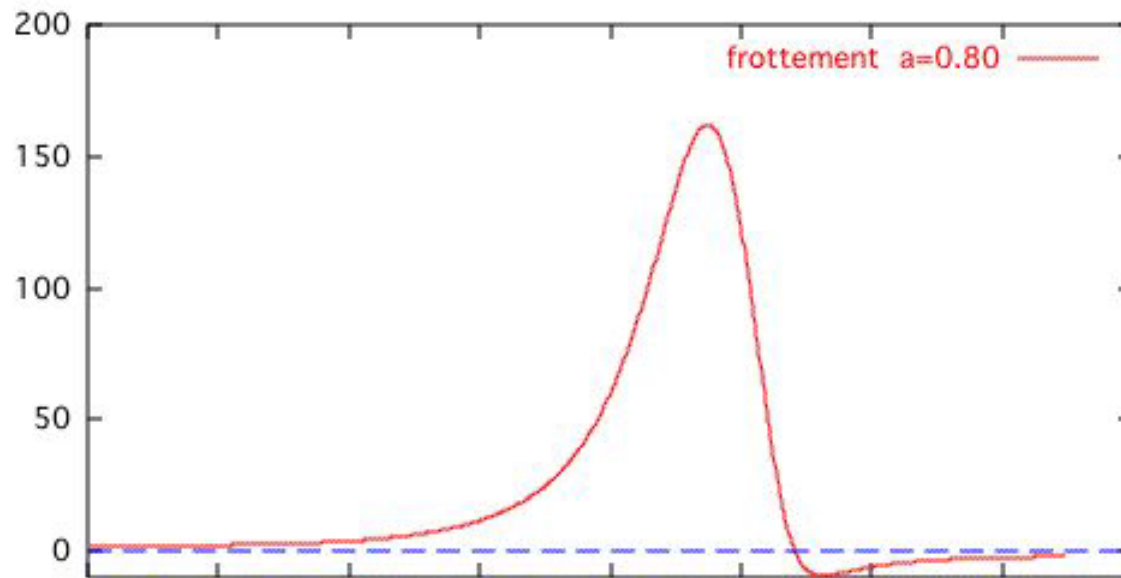


Evolution de la distribution de WSS le long du convergent (sténose de 70% $Re = 500$);
— trait plein: Poiseuille en entrée, - - - - trait pointillé: profil plat

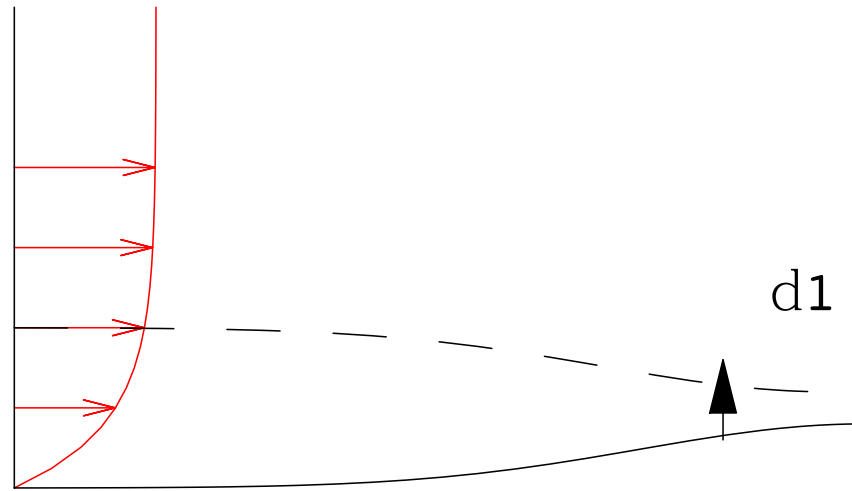
Exemple de résolution numérique

Valeurs variées du degré de sténose: *animation*

Couche Limite / Fluide Parfait

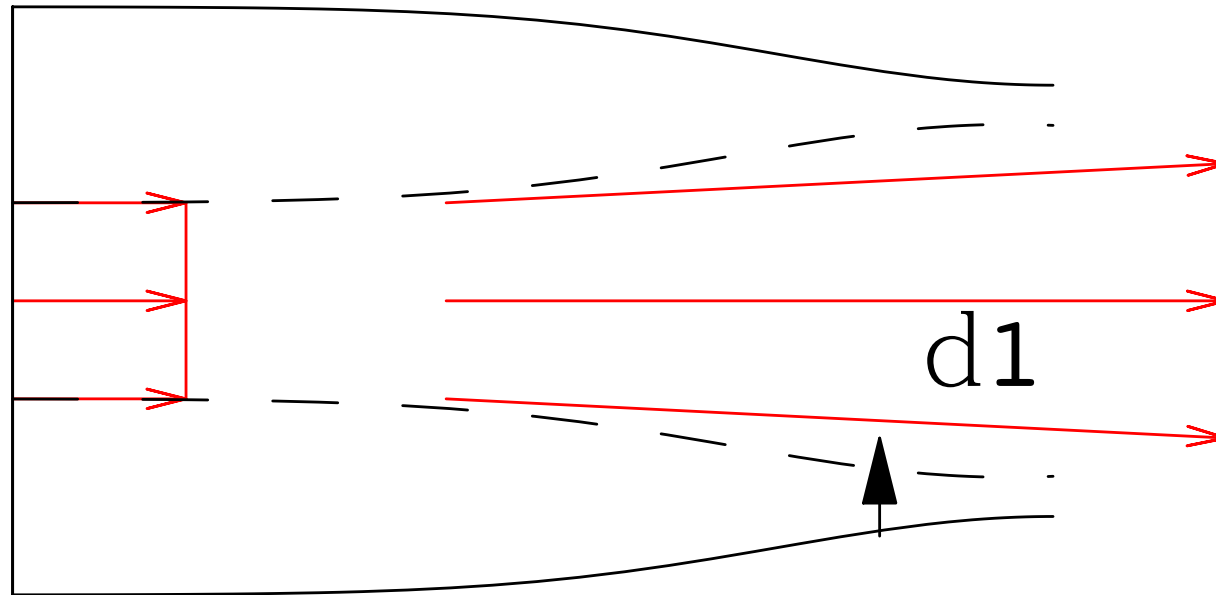


Boundary Layer/ Perfect Fluid



La Couche Limite est générée près de la paroi
 δ_1 l'épaisseur de déplacement.

Couche Limite / Fluide Parfait



δ_1 l'épaisseur de déplacement se comporte comme une nouvelle paroi!!!!
→ Interacting Boundary Layer (IBL) [Couche limite Interactive]

RNSP/ IBL

Après adimensionnement:

$r = R(\bar{x}) - (\lambda/Re)^{-1/2}\bar{y}$, $u = \bar{u}$, $v = (\lambda/Re)^{1/2}\bar{v}$ et $x - x_b = (\lambda/Re)\bar{x}$, $p = \bar{p}$, où x_b est la position de la sténose, les équations RNSP(x) donnent le problème final IBL (interacting Boundary Layer):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} = 0$$
$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}} \right) = \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{s}} + \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}}$$

avec: $\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0$, $\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0$, $\bar{u}(\bar{x}, \infty) = u_e$, où $\bar{\delta}_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{\bar{u}}{u_e}) d\bar{n}$, et

$$\bar{u}_e = \frac{1}{(R^2 - 2((\lambda/Re)^{-1/2})\bar{\delta}_1)}.$$

IBL intégral: équation 1D

$$\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\bar{\delta}_1}{H}\right) = \bar{\delta}_1\left(1 + \frac{2}{H}\right)\frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} + \frac{f_2 H}{\bar{\delta}_1 \bar{u}_e},$$
$$\bar{u}_e = \frac{1}{(R^2 - 2(\lambda/Re)^{-1/2}\bar{\delta}_1)}.$$

Pour résoudre ce problème une relation de fermeture liant H et f_2 à la vitesse et à l'épaisseur de déplacement doit être trouvée:

On définit $\Lambda_1 = \bar{\delta}_1^2 \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}}$,

le système est fermé par la résolution des profils de Falkner Skan:

si $\Lambda_1 < 0.6$ alors $H = 2.5905 \exp(-0.37098\Lambda_1)$, sinon $H = 2.074$.

De H, f_2 est calculé par $f_2 = 1.05(-H^{-1} + 4H^{-2})$.

exemples de profils

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux)

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$

- accélération: couche limite $\delta_1 \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{Re_\lambda}}$,

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$

- accélération: couche limite $\delta_1 \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{Re_\lambda}}$, avec $Re_\lambda = \frac{\lambda U_0}{(1-\alpha)^2 \nu} = \frac{Re \lambda}{(1-\alpha)^2}$

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$
- accélération: couche limite $\delta_1 \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{Re_\lambda}}$, avec $Re_\lambda = \frac{\lambda U_0}{(1-\alpha)^2 \nu} = \frac{Re \lambda}{(1-\alpha)^2}$
- WSS = (variation de vitesse)/(épaisseur de couche limite)

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$
- accélération: couche limite $\delta_1 \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{Re_\lambda}}$, avec $Re_\lambda = \frac{\lambda U_0}{(1-\alpha)^2 \nu} = \frac{Re \lambda}{(1-\alpha)^2}$
- WSS = (variation de vitesse)/(épaisseur de couche limite) = $\frac{(Re/\lambda)^{1/2}}{(1-\alpha)^3}$

IBL intégral: Equation simplifiée pour le frottement (Shear Stress)

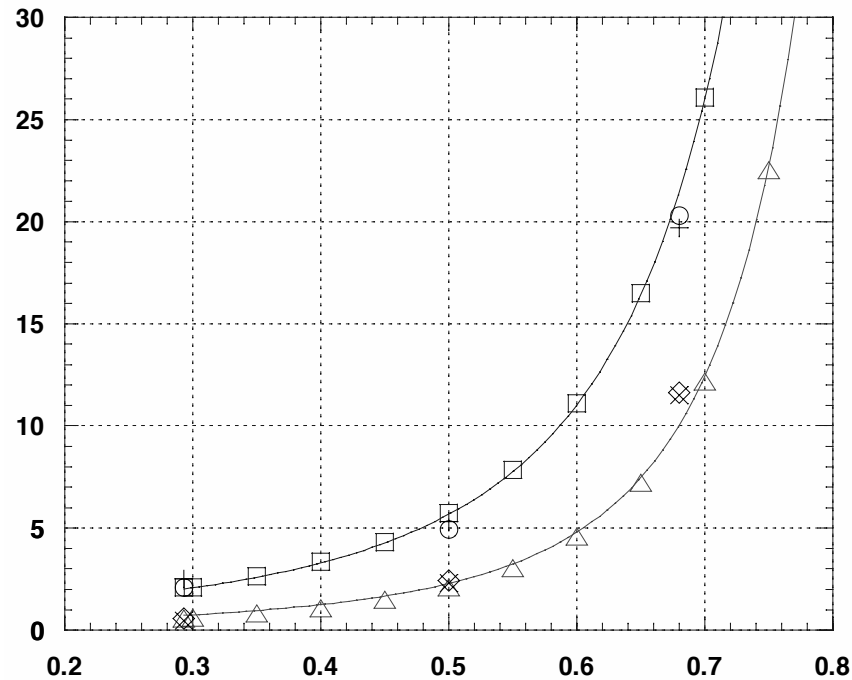
- variation de la vitesse (conservation du flux) $U_0 \rightarrow U_0/(1 - \alpha - \delta_1)^2$
- accélération: couche limite $\delta_1 \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{Re_\lambda}}$, avec $Re_\lambda = \frac{\lambda U_0}{(1-\alpha)^2 \nu} = \frac{Re \lambda}{(1-\alpha)^2}$
- WSS = (variation de vitesse)/(épaisseur de couche limite) = $\frac{(Re/\lambda)^{1/2}}{(1-\alpha)^3}$

Une formule simple peut être déduite:

$$WSS = \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) / \left(\mu \frac{4U_0}{R} \right) \sim .22 \frac{((Re/\lambda)^{1/2} + 3)}{(1 - \alpha)^3}$$

Le nombre de Reynolds pertinent n'est plus $Re = U_0 R_0 / \nu$ mais Re_λ et $(Re/\lambda)^{1/2}$ est l'inverse de l'épaisseur relative de couche limite

IBL intégral: Comparaison avec Navier Stokes (Siegel et al. 1994)



$$WSS = aRe^{1/2} + b$$

Coefficient a et b du maximum de WSS.

lignes avec triangle \triangle et "carré" : coefficient a et b obtenus en utilisant la méthode IBL;

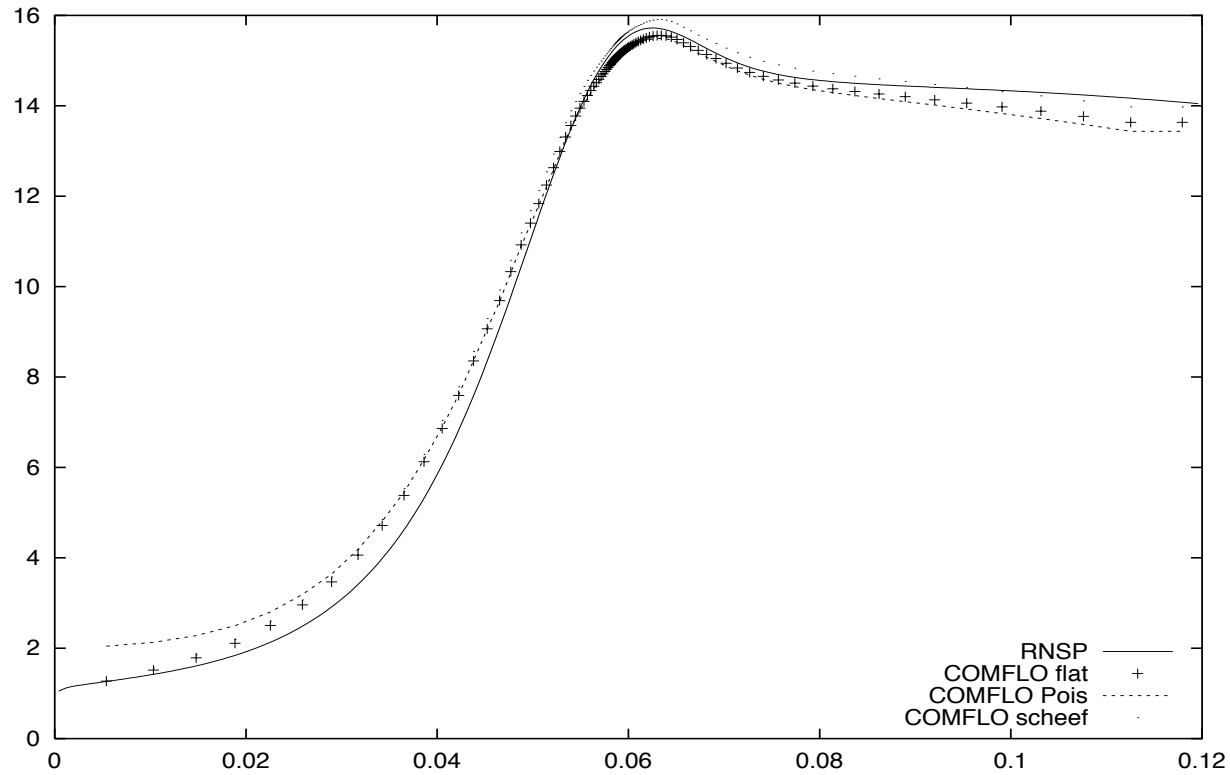
\diamond : coefficient a obtenu par Siegel pour $\lambda = 3$;

\times : coefficient a obtenu par Siegel pour $\lambda = 6$;

\circ : coefficient b obtenu par Siegel pour $\lambda = 3$;

$+$: coefficient b obtenu par Siegel pour $\lambda = 6$.

Test de l'asymétrie du profil d'entrée



The velocities in the middle for Comflo and RNS.

Comflo uses here 50X50X100 points. Dimensionless scales!

Application 2/3: Ecoulement dans une artère sténosée: Conclusion

- On a une bonne description RNSP/ équations intégrales/ Navier Stokes
- On a une solution ANALYTIQUE donnant la valeur du frottement parital
- Manips in vitro à l'INSERM Toulouse
- ...

Application 3/3: Écoulement dans la glotte

collaboration E. Berger (LMM/ENSTA), M. Deverge (TUE), C. Vilain (ICP)
& A. Hirschberg (TUE) + B. de Bruin (RuG)

idem en 2D !!!

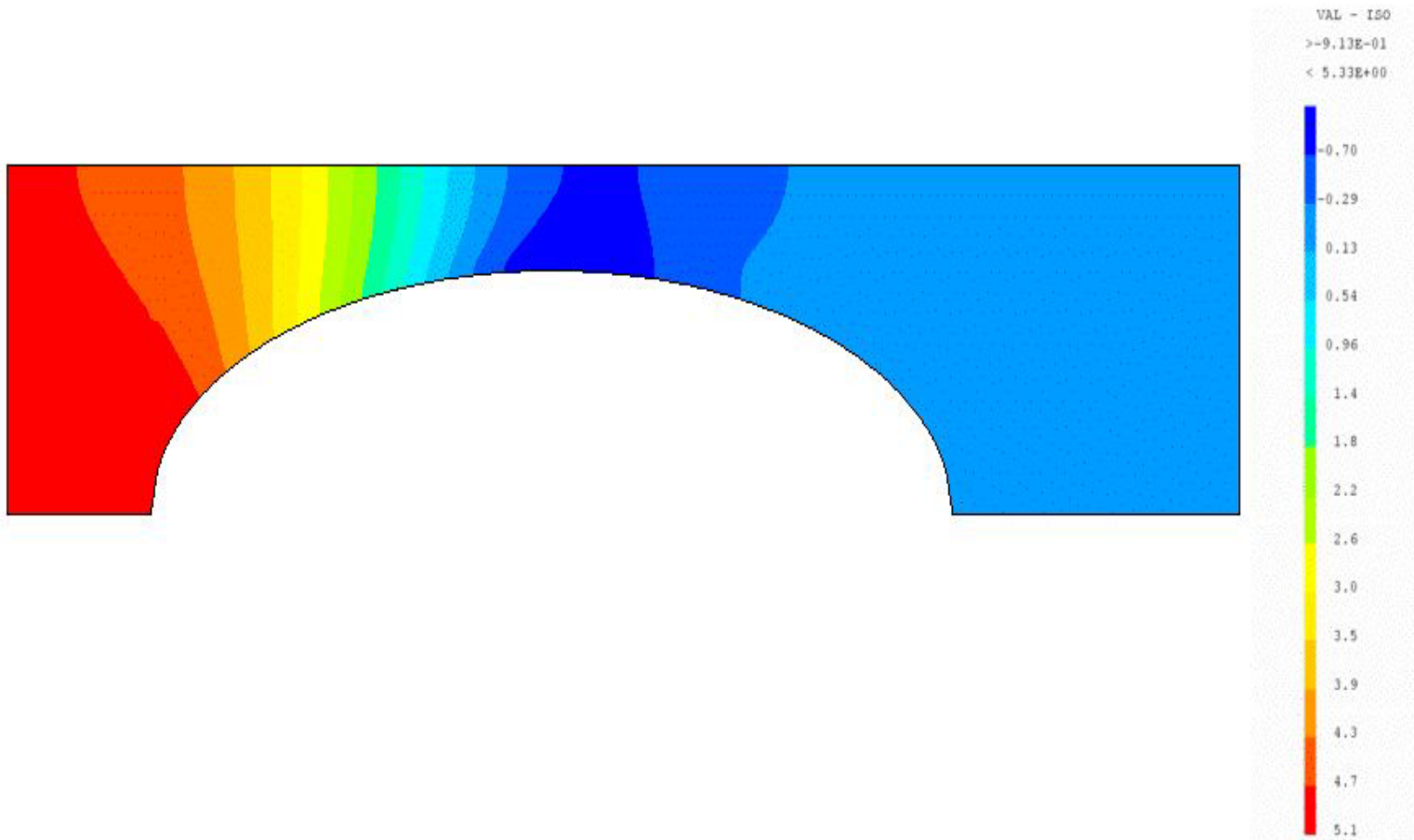
$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0, \quad (1)$$

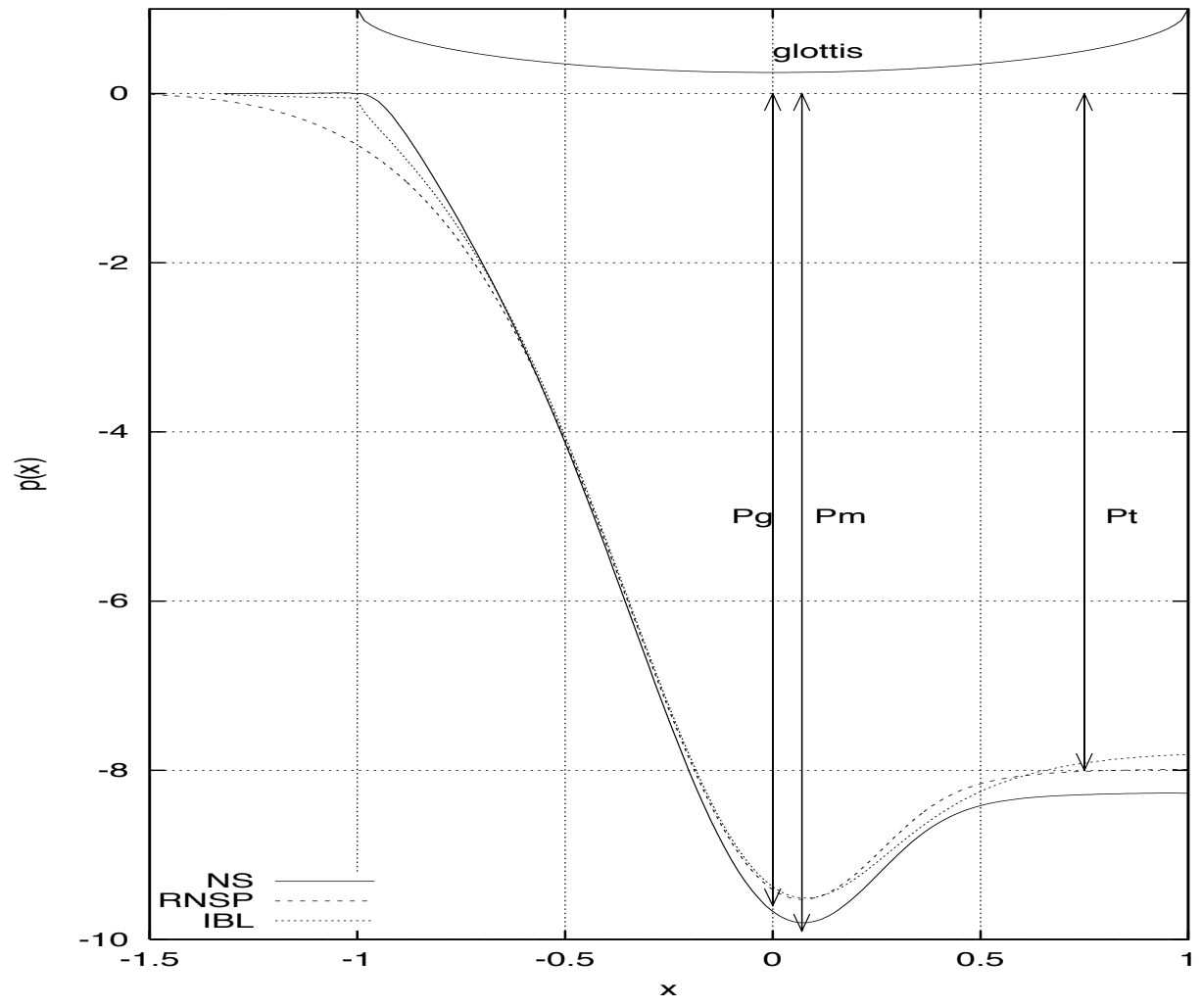
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right) + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u, \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial y}p. \quad (2)$$

Dans un premier temps $\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right) = 0$

Application 3/3: Écoulement dans la glotte, $(\frac{\partial}{\partial t}u) = 0$

Cast3m2001 Education Recherche : PRESSION





Application 3/3: Écoulement dans la glotte

- "distribution" de pression quasi invariante:

$$K_e = P_t/P_m \text{ à peu près constant } K_e \simeq 0.82$$

$$K_g = P_g/P_m \text{ à peu près constant } K_g \simeq 0.97.$$

Application 3/3: Écoulement dans la glotte

- "distribution" de pression quasi invariante:

$$K_e = P_t/P_m \text{ à peu près constant } K_e \simeq 0.82$$

$$K_g = P_g/P_m \text{ à peu près constant } K_g \simeq 0.97.$$

- En écrivant la loi de Bernoulli on a le saut de pression:

$$P_m \simeq -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 - \alpha - \delta_{1c})^2} - 1 \right).$$

Application 3/3: Écoulement dans la glotte

- "distribution" de pression quasi invariante:

$$K_e = P_t/P_m \text{ à peu près constant } K_e \simeq 0.82$$

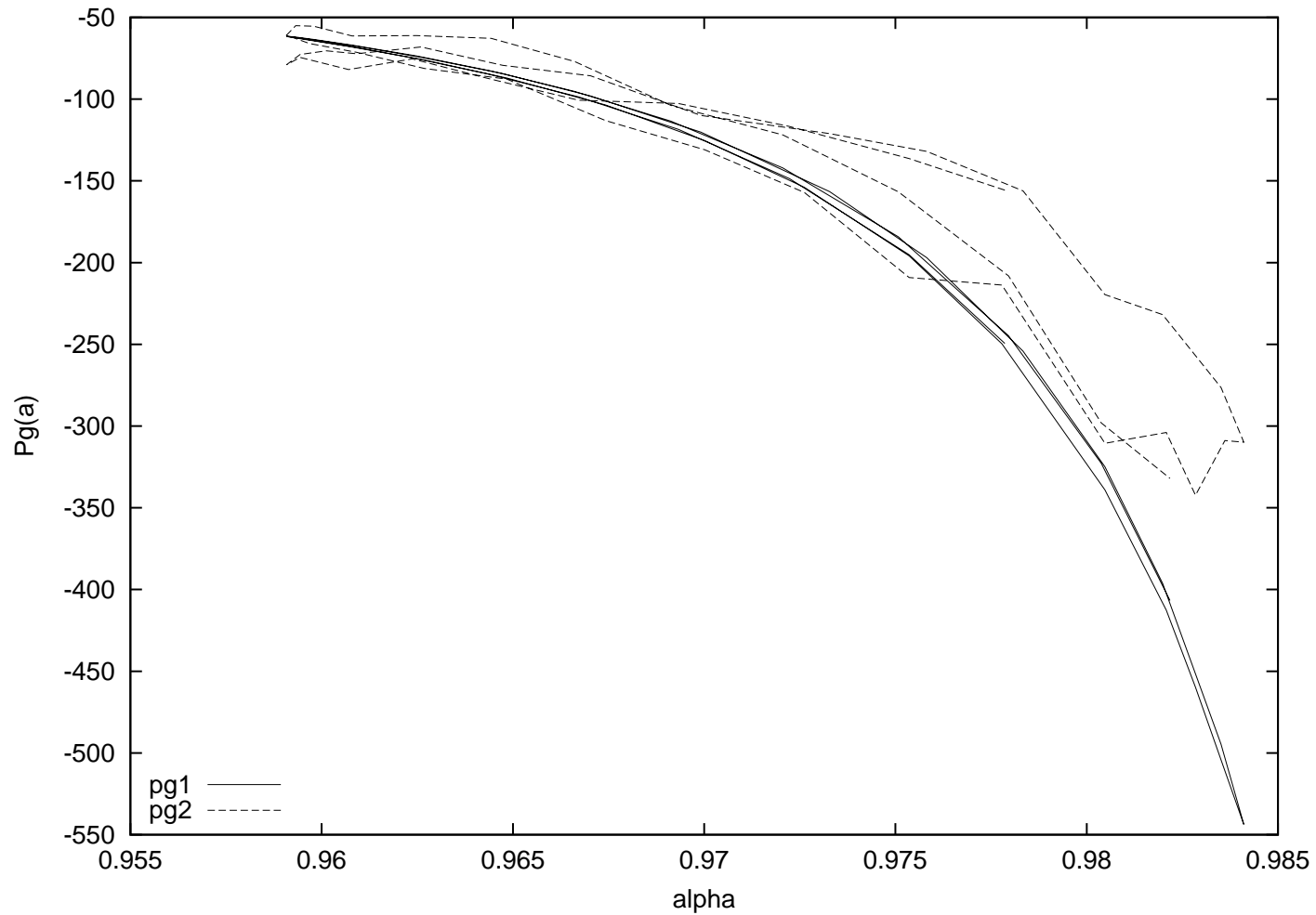
$$K_g = P_g/P_m \text{ à peu près constant } K_g \simeq 0.97.$$

- En écrivant la loi de Bernoulli on a le saut de pression:

$$P_m \simeq -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 - \alpha - \delta_{1c})^2} - 1 \right).$$

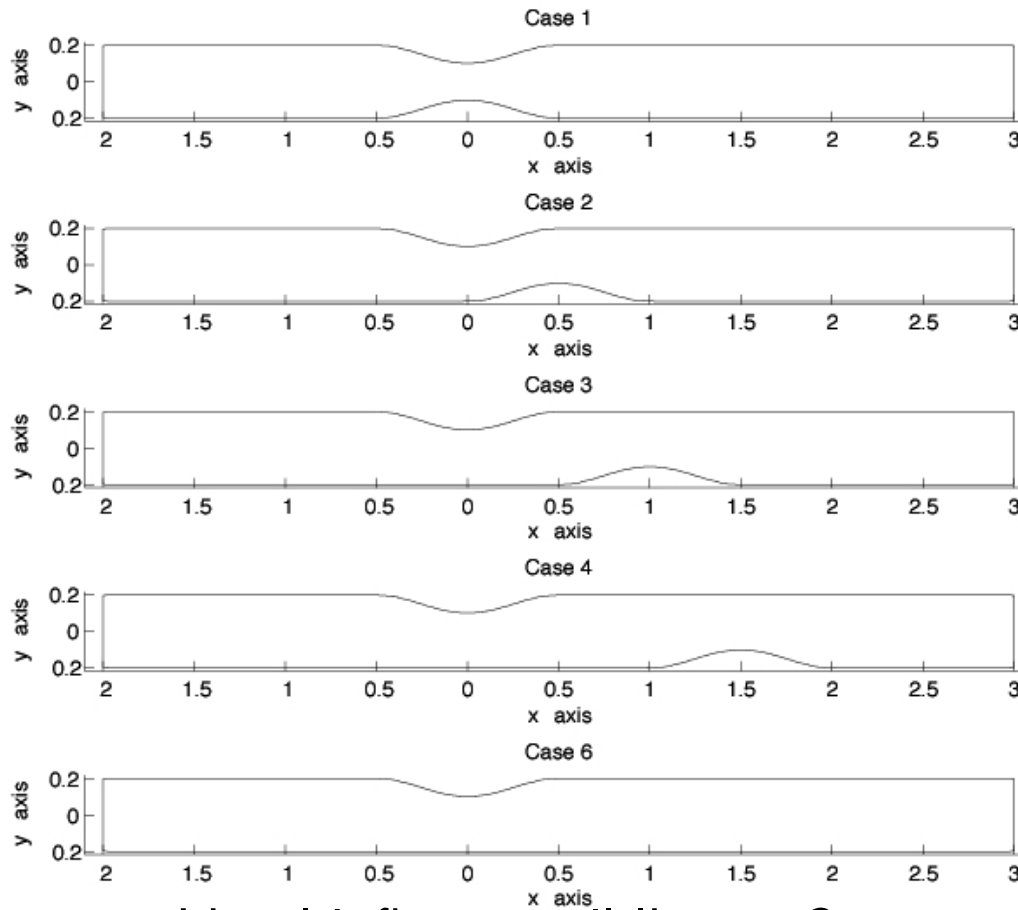
- avec $\delta_{1c} \simeq (1 - \alpha)(Re)^{-1/2}$

Expériences



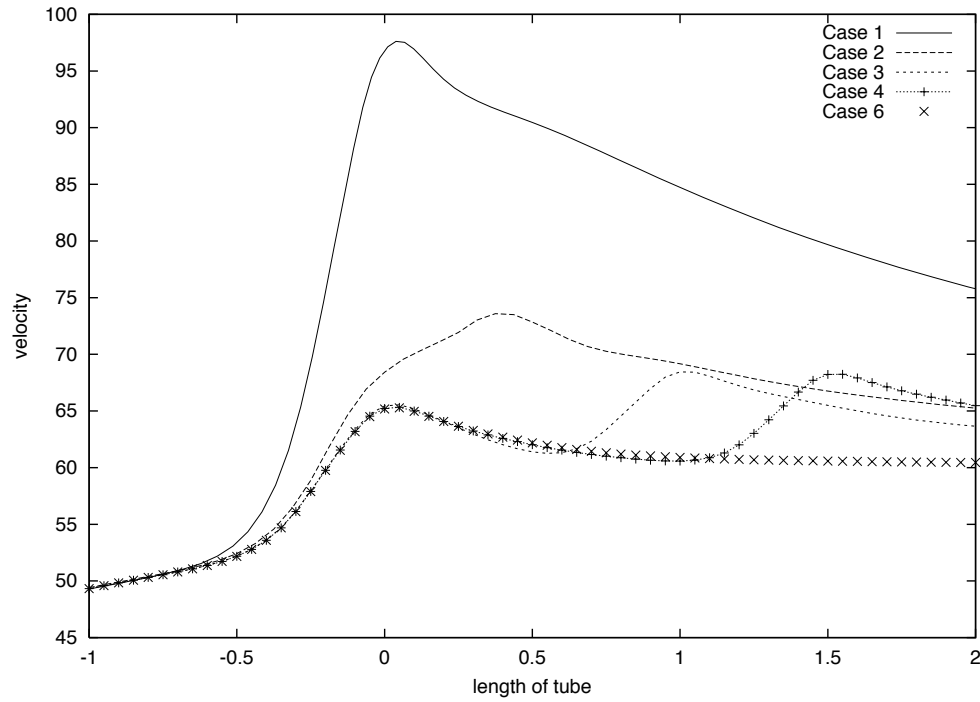
"pg1" : $(-0.17P_t^*/\rho U_0^2)$, "pg2" $(P_g^*/\rho U_0^2)$ (P_t^* e P_g^* pressions expérimentales)

Test de l' "upstream influence" (Re=200)



L'aval influence-t-il l'amont?

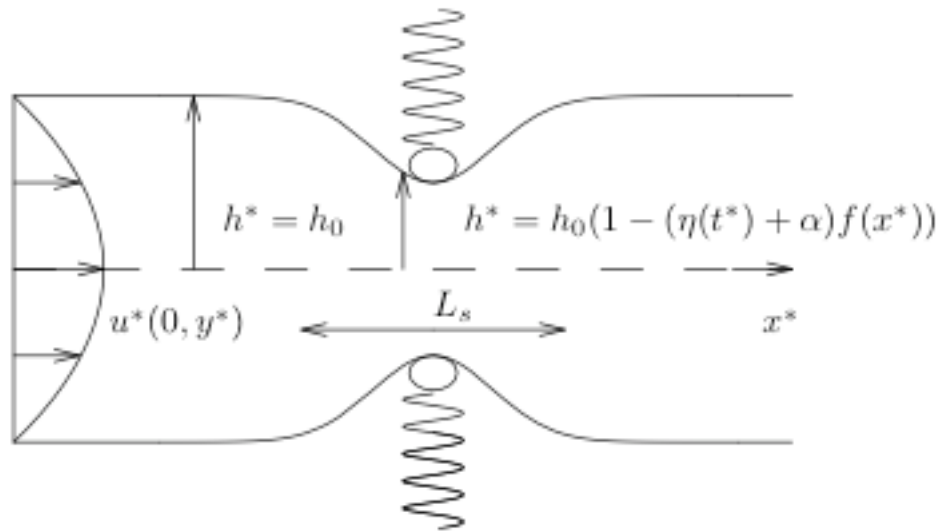
Test de l'influence Aval/Amont (Re=200)



The velocity in the middle of the tube for stenosis 1, 2, 3, 4 and 6.
Dimensions in *cm*

L'aval n'influence pas l'amont!

Couplage à une paroi souple de masse non nulle



On se donne un rétrécissement dans le canal: $h(x, t) = (1 - (\alpha + \eta(t)))f(x)$

On va en déduire la force exercée par le fluide sur la paroi:

$$F(t) = - \int (p(x, -h(x)) - p_0(x)) dx$$

pression $p_0(x)$ sans perturbation ($\eta = 0$, stationnaire, $\alpha \neq 0$)

Couplage à une paroi souple de masse non nulle

η serait le premier mode de vibration de la structure

$F(t)$ est la projection de la pression sur ce mode

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\eta(t) = -P_d P(\eta(t), \frac{d\eta(t)}{dt}, t)$$

condition initiale: $\eta(t=0)$ et $\frac{d\eta(t=0)}{dt} = 0$.

Couplage à une paroi souple de masse non nulle

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\eta(t) = -P_d P\left(\eta(t), \frac{d\eta(t)}{dt}, t\right)$$

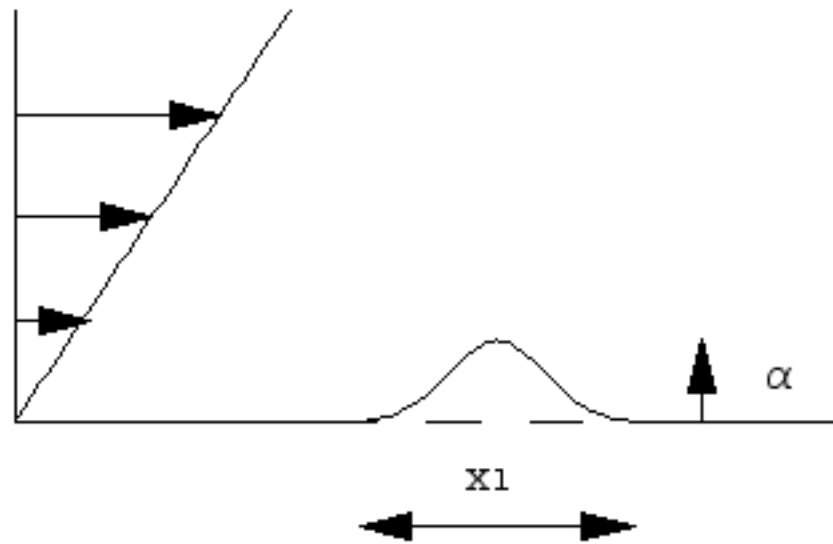
Si η est petit, on va montrer que P a deux contributions (π_1 et π_2 paramètres positifs):

$$P\left(\eta(t), \frac{d\eta(t)}{dt}, t\right) \simeq -\pi_1\eta(t) - \pi_2\frac{d\eta(t)}{dt}$$

π_1 décroît l'élasticité

π_2 crée une atténuation négative

Solution analytique à faible hauteur de bosse dans un écoulement de Poiseuille



La solution est une perturbation de la solution de base:

$$u = y, v = 0$$

Solution analytique à faible hauteur de bosse dans un écoulement de Poiseuille

Dans le cadre de la théorie de la Triple Couche (Double Couche!), on trouve la perturbation de pression:

$$p = TF^{-1}[TF[y_w](i\alpha)^{-1/3} Ai'(-i^{1/3}\omega\alpha^{-1/3}) / \int_{-i^{1/3}\omega\alpha^{-1/3}}^{\infty} Ai(z)dz]$$

Si ω tend vers zero:

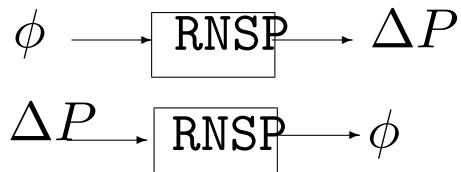
$$p = -TF^{-1}[(i\alpha)^{-1/3}(-3Ai'(0))TF[y_w]] - \\ -TF^{-1}[-9Ai(0)Ai'(0)](-i\omega TF[y_w]) / (i\alpha) + \dots$$

A flux fixé, il y a toujours oscillation

Chute de Pression imposée

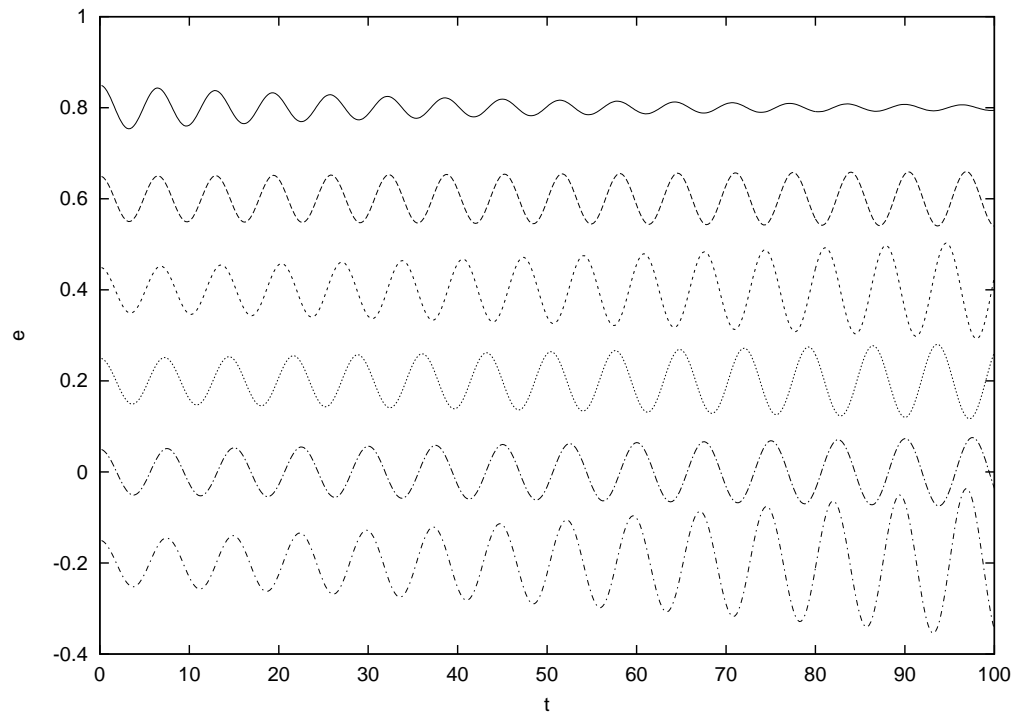
On ne se donne plus le premier profil de vitesse,
mais au contraire on se donne la chute de pression,

on doit donc trouver quel était le flux à l'entrée $\phi(t)$



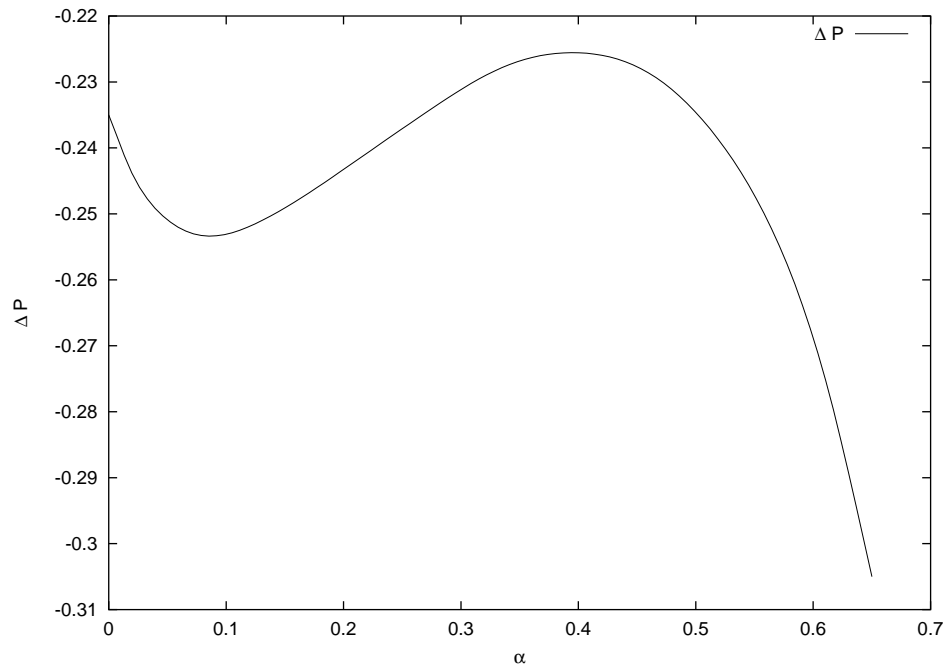
A chute de pression donnée, on peut avoir les deux comportements.

Chute de Pression imposée



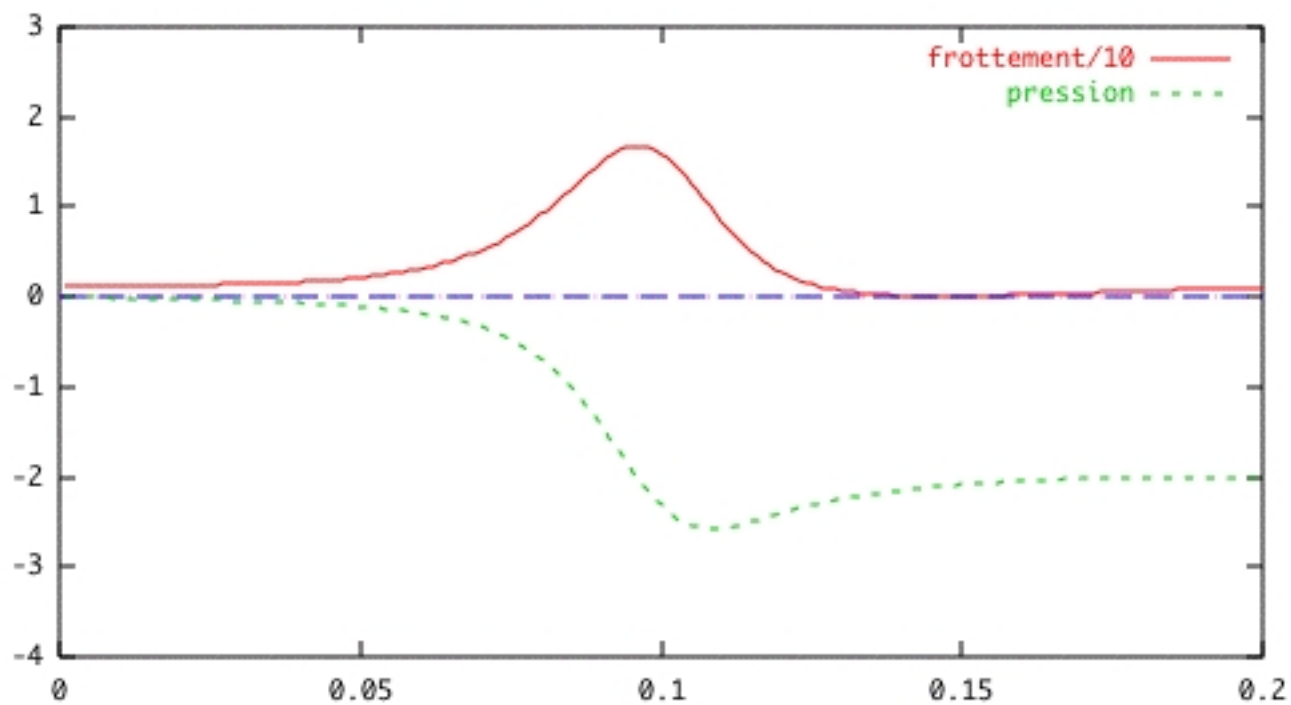
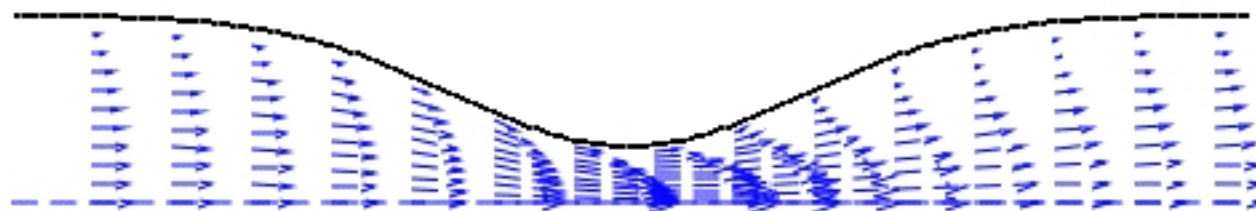
One example of the oscillation of the wall $\eta(t) + \alpha$ of the mass/ spring system as a function of time, various values of α are -0.2 (aneurism), 0.0 (flat wall), 0.2 , 0.4 , 0.6 and 0.8 from bottom to top ($\omega_0 = 1$, $S = 1$, $P_d = 10$, $\alpha = 0.8$, $\eta_0 = 0.05$, $\Delta P = -0.3$, $x_s = 0.1$, $l_s = 0.2$, $x_{in} = 0.0$ and $x_{out} = 0.3$).

Chute de Pression imposée



Valeur critique de ΔP , fonction du degré de sténose α ($\omega_0 = 1$, $S = 1$, $P_d = 10$, $\eta_0 = 0.05$, $l_s = 0.2$, $x_s = l_s/2$, $x_{in} = 0.0$ et $x_{out} = 3l_s/2$).

Chute de Pression imposée



exemple d' auto oscillation

Application 3/3: Écoulement dans la glotte: Conclusion

- poursuivre...
- cas non symétrique
- manip à Grenoble

Conclusion

Conclusion

Partant de Navier Stokes

- un jeu simple d'équations: RNSP

Conclusion

Partant de Navier Stokes

- un jeu simple d'équations: RNSP
- un jeu encore plus simple d'équations: équations Intégrales INTG

Conclusion

Partant de Navier Stokes

- un jeu simple d'équations: RNSP
- un jeu encore plus simple d'équations: équations Intégrales INTG
- comparaisons croisée dans certains cas

Conclusion

Partant de Navier Stokes

- un jeu simple d'équations: RNSP
- un jeu encore plus simple d'équations: équations Intégrales INTG
- comparaisons croisée dans certains cas

méthode inverse RNSP/INTG évaluation du frottement pariétal NS/RNSP/INTG
évaluation du saut de pression NS/RNSP/INTG

conditions aux limites...

bien adapté pour le temps réel/ simulations/ visualisations...