

**Rubrique :** M12 (Mécanique des fluides) / M18 (Biomécanique)

**Ecoulement dans un convergent axisymétrique :  
calcul de la contrainte de cisaillement pariétale maximale.**

**Flow in an axisymmetric convergent :  
evaluation of maximal wall shear stress.**

Sylvie Lorthois<sup>1</sup> et Pierre-Yves Lagrée<sup>2</sup>

(1) Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS 5502

Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse Cedex

Tél. : 05.61.28.58.75. ; Fax : 05.61.28.58.78 ; Mél : lorthois@imft.fr

A qui la correspondance doit être adressée.

(2) Laboratoire de Modélisation en Mécanique, UMR CNRS 7607

4, place Jussieu, 75252 Paris

## **RESUME**

La contrainte de cisaillement pariétale maximale (CCPM) dans le convergent d'une sténose est calculée par une méthode intégrale de couche limite interactive, en fonction des paramètres géométriques caractéristiques (degré de sténose et longueur), de la forme du profil de vitesse choisi en entrée et du nombre de Reynolds de l'écoulement, dans le cas simplifié où l'écoulement est axisymétrique et permanent. On montre que la CCPM est indépendante du profil initial. Une analyse heuristique, complétée par l'analyse de régression des résultats numériques, permet ensuite d'extraire la dépendance de la CCPM en fonction des autres paramètres, mesurables en pratique clinique. La relation obtenue généralise les résultats de la résolution des équations de Navier-Stokes existants dans la littérature pour des caractéristiques géométriques particulières.

**MOTS-CLES** : Sténose, Contrainte de Cisaillement Pariétale, Couche Limite Interactive

## **ABSTRACT**

The maximal wall shear stress (MWSS) in the convergent part of a stenosis is computed as a function of characteristic geometrical parameters (stenosis degree and length), of the entry velocity profile and of flow Reynolds number, by means of the Interactive Boundary-Layer (IBL) theory, in the simplified case where the flow is axisymmetric and stationary. The independence of the MWSS on the entry velocity profile is showed. A heuristic analysis, followed by regression analysis of the numerical results, allows drawing out the simple dependence of the MWSS on the other parameters, all measurable in clinical practice. The so obtained relationship extends the results found in the literature, achieved by resolution of Navier-Stokes equations for particular geometrical characteristics.

**KEYWORDS** : Stenosis, Wall shear stress, Interactive Boundary Layer

## Abridged English Version

### **Introduction**

In spite of an abundant literature about flow fields in arterial stenoses, few authors interested themselves in the evaluation of elevated wall shear stresses encountered in advanced occlusive lesions, although they are likely to play a role in the mechanism of thromboembolism and atherosclerotic plaques rupture. So far as we know, a simple method for the calculation of maximal wall shear stress (MWSS) in the convergent, from parameters measurable in clinical practice, doesn't exist. Our aim is therefore to establish the relationship between the geometrical characteristics of the convergent, the mean flow rate and the MWSS, in the simplified case where the vessel wall is axisymmetric and rigid and the flow is stationary. For that purpose, an integral Interactive Boundary-Layer (IBL) method is used. Even if Navier-Stokes solvers are now very accurate to compute WSS (at least in stenoses below 70%) [1,4], we believe that the asymptotic method provides a better understanding of the flow structure and of the relevant scales as well.

### **Formulation**

Blood is supposed to be a homogeneous, incompressible and Newtonian fluid. The radial position of the vessel wall (nondimensionalized by the initial radius  $r_0^*$ ) is given by :  $R(x) = -\delta x^4 + 2\delta x^2 + 1 - \delta$  , where  $x$  is the axial coordinate nondimensionalized by the convergent length  $L^*$ , and  $\delta$  is the stenosis degree (*i.e.* relative radius reduction at throat).

The use of the IBL theory is based on the hypothesis that the boundary-layer at the vessel wall interacts strongly with a potential core of perfect fluid, through the global conservation of flow (see [2], for example). We denote by  $s^*$  and  $n^*$  the curvilinear coordinates associated with the vessel wall. The asymptotic dimensionless variables  $s$ ,  $n$ ,  $u$ ,  $v$ , and  $u_e$  are determined

by  $s = s^*/(\theta r_0^*)$ ,  $n = \sqrt{Re_0} n^*/(\sqrt{\theta} r_0^*)$ ,  $u = u^*/\bar{u}_0^*$ ,  $v = \sqrt{Re_0} v^*/(\sqrt{\theta} \bar{u}_0^*)$ , and  $u_e = u_e^*/\bar{u}_0^*$ , where  $u^*$ ,  $v^*$ , and  $u_e^*$  are respectively the velocity components parallel and normal to the wall, and the velocity at the edge of the boundary-layer (and in the whole potential core), and  $Re_0$  is the Reynolds number based upon the mean inlet velocity ( $\bar{u}_0^*$ ) and the initial radius, and  $\theta = L^*/r_0^*$ . The displacement thicknesses of the boundary-layer are given by Eq. (1), and the dimensionless forms of the Von-Kármán equation [3], and of the flow conservation, written in Mangler coordinates ( $X$  and  $Y$ ) [3] are given by the set of ordinary differential equations (2). In these equations,  $U$  and  $V$  are the velocity components in the  $X$  and  $Y$  directions,  $U_e = u_e$ ,  $\Delta_1 = R\delta_1$ ,  $H$  is the shape factor and  $f_2$  the friction coefficient. To solve this set for  $\Delta_1$  and  $U_e$ , we suppose that locally, the velocity profile may be approximated by one of the Falkner-Skan family [3]. Hence, the role of the pressure gradient in the potential core (represented by  $\Lambda_1$ , see Eq. (3)) and the no-slip condition at the wall are taken into account. The approximate closing laws are given in Eq. (3).

The wall shear stress (nondimensionalized by the inlet Poiseuille stress) is then given by Eq. (4).

The inlet conditions, *i.e.*  $Re_0$  (or  $\bar{u}_0^*$ ) and  $\Delta_{1_0} = k\sqrt{Re_0/\theta}$  (or  $\delta_{1_0}^* = k r_0^*$ ), are necessary to achieve the description of this problem, and are discussed later.

*Equivalent problem :*

We define an equivalent Reynolds number by  $Re_{eq} = Re_0/\theta$ . We show that the initial problem determined by  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $Re_0$  and  $k$  is similar to the problem determined by  $\delta$ ,  $\theta=1$ ,  $Re_{eq}$  and  $k$ . Therefore, an increase of the convergent length is analogue to a proportional reduction of the initial Reynolds number. In the following,  $\theta$  is implicitly 1, and the equivalent problem is studied.

### Inlet condition influence : entry length

The existence of a potential core, hypothesized in the IBL theory, implies that the displacement thickness  $\delta_1^*$  is always smaller than the third of the stenosis radius. Thus, the classical assumption of a fully developed parabolic flow (where  $k=1/3$ ) at the inlet of the convergent [1,4] is not consistent with our methodology. In order to avoid this contradiction, [5] hypothesized a flat profile (*i.e.*  $k=0$ ). Actually, the boundary-layer grows from the artery origin, and its thickness is unknown at the inlet of the constriction (*i.e.*  $0 < k < 1/3$ ). That is why the dependence of the evolution of  $\Delta_1$  et  $U_e$  in the convergent on  $k$  was studied. Whatever the initial value of  $k$ , incipient velocity profiles flatten and curves  $\Delta_1(x)$  and  $U_e(x)$  obtained for the whole  $k$  values become superposed in the down part of the convergent. In the same manner,  $\tau_p(x)$  becomes independent of  $k$  after a certain distance from entry, denoted  $L_e$ .  $L_e$  increases with  $Re_{eq}$  and decreases with  $\delta$  (cf. Fig. 1). MWSS is therefore independent of inlet displacement thickness and hence, of the velocity profile assumed at the entry, justifying the use of the IBL theory.

### MWSS dependence on stenosis degree and Reynolds number

First, a heuristic analysis of the boundary-layer integral equations leads to Eq. (5), where  $\kappa$  is a real constant. In order to corroborate this relationship, regression analysis of the numerical results is performed. The first step is the study of the dependence of MWSS on  $\sqrt{Re_{eq}}$  for a given stenosis degree. As expected, this dependence is linear, *i.e.*  $MWSS = a\sqrt{Re_{eq}} + b$ . The relationship between the so obtained  $a$  and  $b$  parameters and the corresponding  $\delta$  values (Fig 2) is then investigated. The interpolation function chosen is  $\kappa / (1 - \delta)^\xi$  where  $K$  and  $\xi$  are positive real constants. Results are displayed in Table (1). Finally, the relationship between MWSS, stenosis degree and equivalent Reynolds number is given by Eq. (6).

## **Conclusion**

Numerical results of [1] were explained and extended to a larger range of stenosis degrees (in particular for severe ones), with a simpler methodology and a great gain in computing time. Comparisons with a more complete boundary layer solver which catches separated flow (equations solved at imposed displacement and semi inverse coupling [2]) shows that the direct integral method is enough accurate. Furthermore, the difference with Navier-Stokes solvers [1,4] is less than 8.5%. The main interest of the so obtained scaling law (Eq. (6)) is that all the parameters needed are measurable in clinical practice, allowing a simple and much more accurate evaluation of MWSS than the classical Poiseuille law. This could be of greatest concern for studying the role of elevated shear stresses in advanced occlusive lesions, particularly on plaque ulceration, rupture and thromboembolism.

## 1. Introduction

Malgré une abondante littérature concernant l'étude des écoulements dans les sténoses artérielles, peu d'auteurs se sont intéressés à l'évaluation des contraintes de cisaillement élevées rencontrées dans les lésions obstructives sévères. Ces contraintes jouent pourtant vraisemblablement un rôle important dans les mécanismes thrombo-emboliques et de rupture de plaque. A notre connaissance, il n'existe pas de méthode simple qui permette le calcul de la contrainte de cisaillement pariétale maximale (CCPM) dans le convergent, à partir des paramètres mesurables en pratique clinique. Notre objectif est donc d'établir les relations entre les caractéristiques géométriques du convergent, le débit moyen de l'écoulement et la CCPM, dans le cas simplifié où la paroi est axisymétrique, rigide et l'écoulement permanent (comme [1,4] on peut estimer que le taux d'instantanéité de l'écoulement est "assez" faible pour que cette approximation soit valable). Pour cela, une méthode intégrale de couche limite interactive (IBL) est utilisée. En effet, même si la résolution numérique des équations de Navier-Stokes est maintenant parfaitement possible dans des sténoses modérées [1,4], elle semble toujours problématique dans le cas des sténoses sévères (supérieures à 70% en diamètre). De plus, le recours aux méthodes simplifiées permet d'extraire les mécanismes et les échelles fondamentaux et de trouver les paramètres sans dimensions pertinents. Leur simplicité permet de faire des calculs rapides et d'étudier ainsi les tendances induites par la variation des paramètres.

## 2. Formulation

Le sang est supposé homogène, newtonien de viscosité cinématique  $\nu$ , incompressible de densité  $\rho$  uniforme. Le convergent de la sténose est considéré comme axisymétrique, la

position radiale  $R$  de la paroi (adimensionnée par le rayon initial  $r_0^*$ ) étant donnée par  $R(x) = -\delta x^4 + 2\delta x^2 + 1 - \delta$ , où  $x$  est la coordonnée axiale adimensionnée par la longueur du convergent  $L^*$ , et  $\delta$  est le degré de sténose (*i.e.* réduction relative du rayon au col).

L'écoulement est résolu par une méthode IBL intégrale, fondée sur l'hypothèse d'une interaction forte entre la couche limite qui se développe sur la paroi et un noyau potentiel (donc irrotationnel) de fluide parfait, couplés par la conservation totale du débit (voir [2]). On note  $s^*$  et  $n^*$  les coordonnées curvilignes associées à la paroi.

Les variables adimensionnelles asymptotiques  $s$ ,  $n$ ,  $u$ ,  $v$ , et  $u_e$  sont définies par  $s = s^*/(\theta r_0^*)$ ,  $n = \sqrt{Re_0} n^*/(\sqrt{\theta} r_0^*)$ ,  $u = u^*/\bar{u}_0^*$ ,  $v = \sqrt{Re_0} v^*/(\sqrt{\theta} \bar{u}_0^*)$ , et  $u_e = u_e^*/\bar{u}_0^*$ , où  $u^*$ ,  $v^*$ , et  $u_e^*$  sont respectivement les composantes parallèles et normales de la vitesse et la vitesse extérieure à la couche limite,  $Re_0$  est le nombre de Reynolds basé sur  $\bar{u}_0^*$ , vitesse moyenne à l'entrée (*i.e.* en  $x=-1$ ) et le rayon initial, et  $\theta$  est le rapport entre la longueur du convergent et le rayon initial. Les épaisseurs de déplacement de la couche limite sont définies par :

$$\delta_1^* = \frac{\sqrt{\theta} r_0^* \delta_1}{\sqrt{Re_0}}, \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dn. \quad (1)$$

Si la courbure de la paroi est faible, les versions adimensionnelles de l'équation de Von-Kármán (*i.e.* équation intégrale de quantité de mouvement pour la couche limite [3]) et de la conservation du débit, écrites en coordonnées de Mangler ( $X$  et  $Y$ ) [3] sont respectivement :

$$\frac{d}{dX} \left( \frac{\Delta_1}{H} \right) + \left( 1 + \frac{2}{H} \right) \Delta_1 \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dX} = \frac{f_2 H}{\Delta_1 U_e} \quad \text{et} \quad U_e \left( R - \frac{\Delta_1}{R} \sqrt{\frac{\theta}{Re_0}} \right)^2 = 1, \quad (2)$$

où  $U$  et  $V$  sont les composantes de la vitesse suivant les directions  $X$  et  $Y$ ,  $U_e = u_e$ ,  $\Delta_1 = R\delta_1$ ,  $H$  est le facteur de forme et  $f_2$  le coefficient de frottement.

Le système d'équations différentielles ordinaires (2), d'inconnues  $\Delta_1$  et  $U_e$ , est fermé en supposant que le profil de vitesse peut être approximé localement par un des profils de Falkner-Skan [3]. Le rôle du gradient de pression dans l'écoulement potentiel (représenté par



$\Lambda_1$ , voir Eq. (3)) et la condition de non-glissement à la paroi sont ainsi pris en compte. Les lois de fermeture approximatives, déduites par intégration numérique de l'équation d'autosimilarité, sont :

$$\Lambda_1 = \Delta_1^2 \frac{dU_e}{dX}, \quad H = \begin{cases} 2,5905 e^{-0,3709 \Lambda_1} & \Lambda_1 < 0,6 \\ 2,0735 & \Lambda_1 \geq 0,6 \end{cases}, \quad f_2 = 0,939 \left( \frac{4}{H^2} - \frac{1}{H} \right). \quad (3)$$

La contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_p$  (adimensionnée par la valeur de la contrainte de Poiseuille à l'entrée), s'écrit alors :

$$\tau_p = \frac{1}{4} f_2 H \frac{U_e R}{\Delta_1} \sqrt{Re_0} \quad (4)$$

La description complète du problème nécessite la donnée des conditions à l'entrée du convergent, soit  $Re_0$  (ou  $\overline{u_0^*}$ ) et  $\Delta_{1_0} = k \sqrt{Re_0 / \theta}$  (ou  $\delta_{1_0}^* = k \overline{u_0^*}$ ), qui sera discutée ultérieurement (§ 3).

Les fermetures (3) ont été vérifiées sur quelques cas typiques par comparaison avec un code en différences finies qui résout les équations complètes de couche limite à déplacement imposé et l'interaction avec le fluide parfait par couplage "semi-inverse" [2]. Ce dernier code permet de capturer le décollement en aval du col, contrairement à la version intégrale directe (on pourrait la modifier mais au prix d'un notable ralentissement en temps de calcul).

*Problème équivalent :*

Dans le système (2), seule l'équation de conservation du débit fait intervenir le paramètre  $\theta$ , qui divise  $Re_0$ . On définit donc un nombre de Reynolds équivalent  $Re_{eq} = Re_0 / \theta$ . Le problème initial défini par  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $Re_0$  et  $k$  est semblable au problème défini par  $\delta$ ,  $\theta=1$ ,  $Re_{eq}$  et  $k$ . En effet, dans les deux cas, la valeur de  $\Delta_{1_0}$  est identique. Par conséquent, une augmentation de la longueur du convergent est similaire à une réduction proportionnelle du nombre de Reynolds initial. Dorénavant, la valeur de  $\theta$  est implicitement fixée à 1, et on étudie le problème équivalent.

### 3. Influence de la condition d'entrée : Longueur d'entrée

La description du problème par la théorie IBL nécessite l'existence d'un noyau potentiel. L'épaisseur  $\delta_j^*$  doit donc toujours être strictement inférieure au tiers du rayon de la sténose, en contradiction avec l'hypothèse classique d'un profil de vitesse parabolique à l'entrée du convergent [1,4]. Pour s'affranchir de cette contradiction, [5] fait l'hypothèse d'un profil plat (soit  $k=0$ ). En réalité, la couche limite croît depuis l'origine de l'artère, et son épaisseur est inconnue à l'entrée de la sténose (*i.e.*  $0 < k < 1/3$ ). C'est pourquoi l'influence de  $k$  sur l'évolution de  $\Delta_1$  et  $U_e$  en fonction de  $x$  a été étudiée, pour  $Re_{eq}$  compris entre 20 et 1000, et  $\delta$  entre 0,3 et 0,9. Dans tous les cas, l'accélération est telle que les profils imposés en entrée s'aplatissent et que les courbes  $\Delta_1(x)$  et  $U_e(x)$  obtenues pour les différentes valeurs de  $k$  se superposent dans la partie aval du convergent. De même, à partir d'une certaine distance de l'entrée, notée  $L_e$ ,  $\tau_p(x)$

est indépendant de  $k$  (*i.e.*  $\left| \frac{\tau_p(x;k=0,01) - \tau_p(x;k=0,3)}{\tau_p(x;k=0,01) + \tau_p(x;k=0,3)} \right| < 0,25\%$ ).  $L_e$  croît avec  $Re_{eq}$  et

décroît avec  $\delta$  (Fig. 1). La CCPM, obtenue très légèrement en amont du col du convergent, est donc indépendante de  $k$  (*i.e.* du profil de vitesse choisi en entrée), ce qui justifie l'hypothèse de l'existence d'un noyau de fluide parfait et donc l'utilisation de la méthode IBL.

### 4. Influence du degré de sténose et du nombre de Reynolds équivalent

*Analyse heuristique* : La position axiale de la CCPM étant légèrement en amont du col de la sténose, nous réécrivons  $\tau_p(x)$  (Eq. (4)) en utilisant les ordres de grandeur des paramètres au col. On y a  $x=1$  et  $R=1-\delta$ . De par la forte accélération de l'écoulement, les paramètres  $f_2$  et  $H$  y sont constants. La vitesse  $U_e$  est développée au premier ordre ( $\frac{\Delta_1}{R\sqrt{Re_{eq}}} \ll R$ ) en

$U_e \approx \frac{1}{R^2} \left( 1 + 2 \frac{\Delta_1}{R^2 \sqrt{Re_{eq}}} \right)$ . L'écriture de l'hypothèse classique de couche limite [3], *i.e.*

$\delta_1^* = x^* / \sqrt{Re_{x^*}}$ , où  $Re_{x^*}$  est le nombre de Reynolds local basé sur  $x^*$  et  $u_e^*(x^*)$ , conduit à

$\Delta_1(\text{co}) \approx R_{\text{co}} / \sqrt{U_e}$ . En remplaçant dans l'Eq. (4), il vient :

$$\text{CCPM} \approx \frac{\kappa}{(1-\delta)^3} \left( \sqrt{Re_{eq}} + 3 \right), \quad (5)$$

où  $\kappa$  est une constante.

*Analyse de régression* : dans le but "d'affiner" la relation (5), les résultats numériques du calcul de la CCPM sont exploités. La première étape est l'étude de l'influence de  $\sqrt{Re_{eq}}$  à degré de sténose fixé. Pour chaque valeur de  $\delta$  comprise entre 0,3 et 0,9, l'analyse de régression portant sur 100 valeurs de  $Re_{eq}$  comprises entre 20 et 1000 (méthode des moindres carrés) montre que cette dépendance est linéaire, *i.e.*  $\text{CCPM} = a\sqrt{Re_{eq}} + b$ . Le coefficient de corrélation obtenu est dans tous les cas supérieur ou égal à 0,9999. La dépendance entre les paramètres  $a$  et  $b$  ainsi obtenus et les valeurs correspondantes de  $\delta$  (Fig. 2) est ensuite recherchée. La fonction d'interpolation choisie d'après l'équation (5) est  $\kappa / (1-\delta)^\xi$  où  $K$  et  $\xi$  sont des réels positifs. Les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés sont présentés Table (1).

Finalement, la relation liant la CCPM, le degré de sténose et le nombre de Reynolds équivalent est :

$$\text{CCPM}(\delta, Re_{eq}) = \frac{0,231}{(1-\delta)^{3,311}} \sqrt{Re_{eq}} + \frac{0,718}{(1-\delta)^{2,982}}, \quad Re_{eq} = \frac{Re_0}{\theta}. \quad (6)$$

## 5. Discussion et conclusion

Le domaine de validité de la relation (6) est limité par l'hypothèse de l'existence du noyau potentiel, qui n'est plus valable pour les faibles valeurs de  $Re_{eq}$ . En effet, dans ce cas, la couche limite se développe très rapidement depuis l'entrée, et envahit la totalité de la section avant le passage au col de la sténose. Le nombre de Reynolds équivalent minimal au-dessus duquel le noyau potentiel existe dans tout le convergent décroît avec le degré de sténose, passant de 5 à 1 pour des sténoses de 30 à 90%. Pour les valeurs élevées de  $Re_{eq}$ , la longueur d'entrée approche la longueur du convergent, et la CCPM devient dépendante de la condition d'entrée. Le nombre de Reynolds équivalent maximal pour lequel la relation (6) est valide croît avec le degré de sténose, passant de 500 à plus de 2000 pour des sténoses de 30 à 90% (Fig. 1).

Malgré ces limitations, l'utilisation de la théorie de la couche limite a permis d'expliquer la dépendance simple de la CCPM en fonction des paramètres géométriques et du nombre de Reynolds. Les résultats de Siegel et al. [1], qui ont résolu les équations de Navier-Stokes complètes, ont pu être justifiés et étendus à une gamme plus large de degrés de sténose (en particulier pour les sténoses sévères), grâce à une méthodologie beaucoup plus simple, et un gain important en temps de calcul. Dans les sténoses modérées de caractéristiques identiques, l'écart maximal entre les CCPM issus des calculs complets [1,4] et de la méthode intégrale est de moins de 8,5%. La réduction du temps de calcul a, en outre, permis une généralisation des résultats de [1] concernant la CCPM, qui sont inclus dans la relation (6).

L'intérêt principal de la relation (6) est que tous les paramètres nécessaires au calcul de la CCPM sont mesurables en pratique clinique, en permettant une évaluation simple, et beaucoup plus précise que l'utilisation de la loi de Poiseuille. La connaissance de la CCPM paraît être d'un intérêt majeur dans l'étude du rôle des contraintes de cisaillement élevées

dans les mécanismes thrombo-emboliques et de rupture de plaques athéromateuses des lésions obstructives sévères.

## LEGENDE DES FIGURES ET TABLES

Figure 1 :

*Longueur d'entrée adimensionnelle en fonction du nombre de Reynolds équivalent, pour différentes valeurs du degré de sténose.*

*Nondimensional entry length as a function of equivalent Reynolds number, for different values of the stenosis degree.*

Figure 2 :

*Coefficients  $a$  et  $b$  (voir §4) en fonction du degré de sténose. Points : résultats de l'analyse de régression portant sur  $Re_{eq}$  à degré de sténose donné. Courbes : résultats de l'analyse de régression finale portant sur le degré de sténose.*

*$a$  and  $b$  coefficients (see §4) as a function of stenosis degree. Points : results of regression analysis upon  $Re_{eq}$  for a given stenosis degree.*

*Curves : results of final regression analysis upon stenosis degree.*

Table 1 :

*Paramètres  $K$  et  $\xi$  (voir §4) et coefficients de régression.*

*$K$  and  $\xi$  parameters (see §4) and regression coefficients.*

**Remerciements :** Nous remercions F. Cassot pour les relectures du manuscrit. Ce travail a été réalisé en partie dans le cadre du contrat INSERM 4M101C.

## REFERENCES

- [1] Siegel J.M., Markou C.P., Ku D.N., Hanson S.R., A scaling law for wall shear stress through an arterial stenosis. *ASME J. Biomech. Engng.* 116 (1994) 446-451.
- [2] Le Balleur J.C., Couplage visqueux non-visqueux : Méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques. *La recherche Aérospatiale.* 1978-2 (1978) 67-76, *Eng Trans ESA TT-496.*
- [3] Cousteix J., *Couche limite laminaire.* Cepadues-Editions, Toulouse, 1988.
- [4] Huang H., Modi V.J., Seymour B.R., Fluid mechanics of stenosed arteries. *Int. J. Engng. Sc.* 33 (1995) 815-828.
- [5] Back L.H, Crawford D.W., Wall shear stress estimates in coronary artery constrictions. *ASME J. Biomech. Engng.* 114 (1992) 515-520.

Figure 1 :

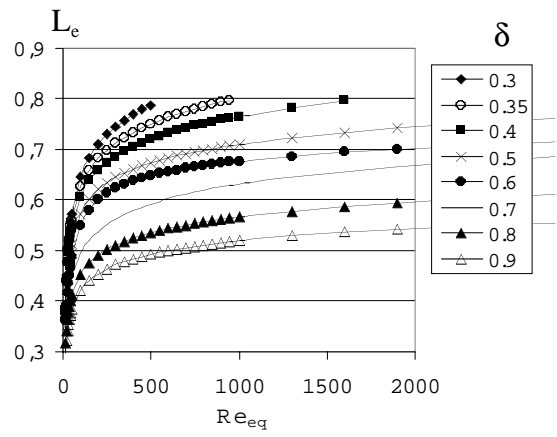
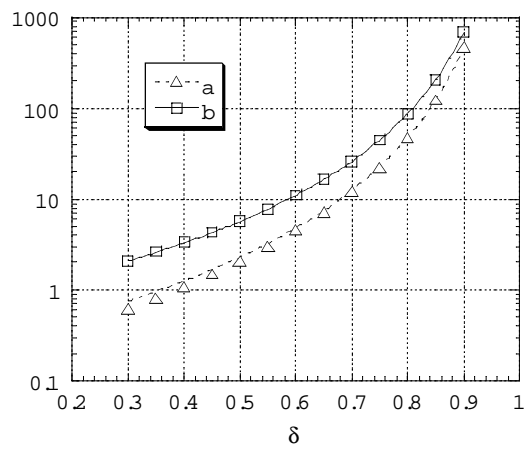


Figure 2 :





**Table 1. :**

	$K$	$\xi$	$\chi$ square	Coefficient de corrélation
$a$	0,231	3,311	0,523	1,000
$b$	0,718	2,982	0,066	1,000