

# CHAPITRE 1

## Mécanique analytique

### 0 Introduction:

- Mécanique analytique branche de la mécanique classique. Inventé par Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) et William Rowan Hamilton (1805 - 1865).
- Méthode basée sur des principes variationnels, elle utilise les grandeurs scalaires que sont l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail de tout les efforts appliqués au système.
- ≠ dynamique Newtonienne qui donne l'équilibre dynamique des forces que doit suivre les points matériels d'un système dans un repère Cartésien à un instant  $t$ .
- On distingue le formalisme Lagrangien et Hamiltonien.

### Biblio:

- Mécanique analytique, notes de cours J.-M. Rainard, LKB, Sorbonne Université.
- S.M. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus books, 1994.

# I Formulation Lagrangienne :

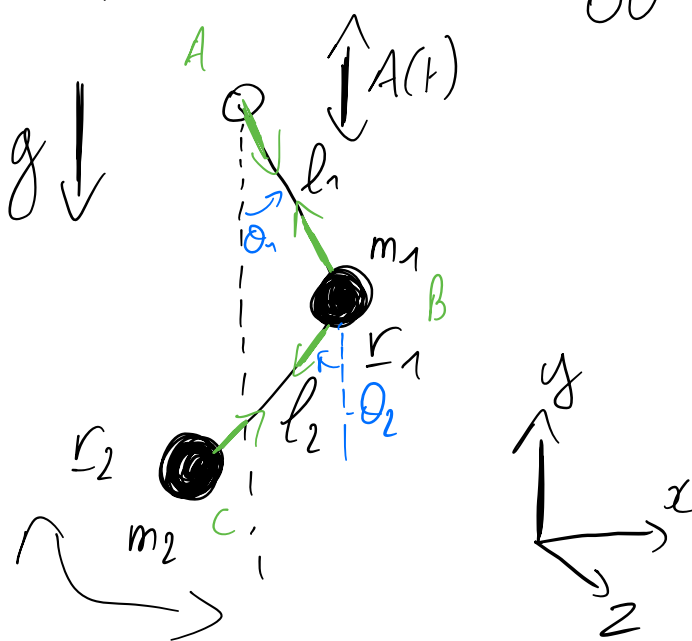
## 1.1 Description du système : coordonnées généralisées

On considère des systèmes composés de  $N$  particules matérielles repérées par l'indice  $\alpha$  qui varie de 1 à  $N$ .

Les masses, positions, vitesses et accélérations des particules seront dénotées respectivement :

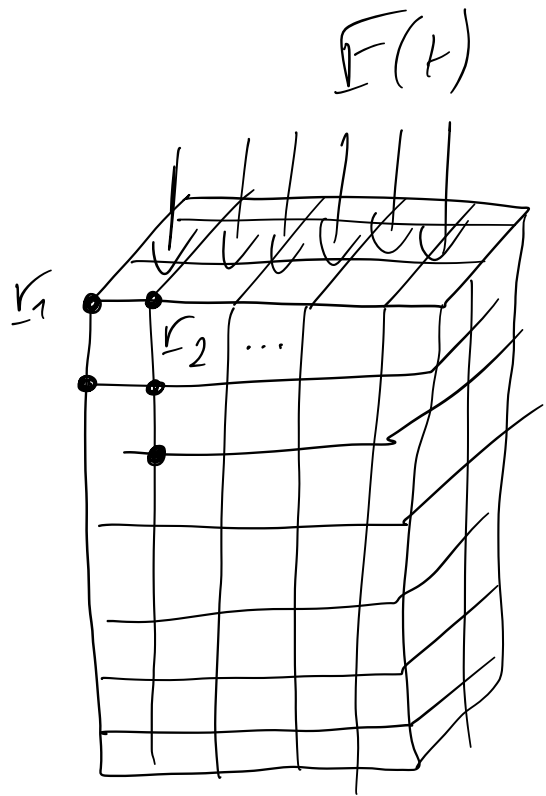
$$m_\alpha, \underline{r}_\alpha, \underline{v}_\alpha = \frac{d\underline{r}_\alpha}{dt} = \dot{\underline{r}}_\alpha, \underline{a}_\alpha = \dot{\underline{v}}_\alpha = \ddot{\underline{r}}_\alpha$$

Exemples :



Double pendule  
plan  $N=2$

OU



Méthode éléments Finis  
 $N \sim 10^8$

Approche locale Newtonienne, à l'instant t:

$$[N] \quad m_\alpha \underline{a}_\alpha = \underline{F}_\alpha \quad (\text{Forces sur chaque pt matériel})$$

$\underline{F}_\alpha$  peuvent dépendre de la configuration du système ( $\underline{r}_\alpha$  ou  $\underline{v}_\alpha$ ).  
Elles sont données par des lois fondamentales (e.g.  $\underline{F}_\alpha = m_\alpha \underline{g}$ )  
ou phénoménologiques (e.g.  $\underline{F}_{v_\alpha} = -c \underline{v}_\alpha$ )

Double pendule:  $\begin{cases} m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_1 \\ m_2 \underline{a}_2 = \underline{F}_2 \end{cases}$  (poids, tensions des fils, réaction du support)  
+ conditions initiales  $\Rightarrow \underline{r}_1(t), \underline{r}_2(t)$ .

⚠ Parfois compliqué

Mécanique analytique:

Coordonnées généralisées: coordonnées indépendantes qui ne seront soumises à aucune contrainte.

Coordonnées arbitraires (c-à-d degrés de liberté) qui doivent déterminer de façon univoque l'état mécanique ou configuration du système.

Double pendule plan:  
Newton: 4 paramètres cinématiques  $r_{1x}, r_{1y}, r_{2x}, r_{2y}$

Fils constants



$$l_1 = \sqrt{(r_{1x} - r_{Ax})^2 + (r_{1y} - r_{Ay})^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(r_{2x} - r_{Ax})^2 + (r_{2y} - r_{Ay})^2}$$

2 coordonnées généralisées  $q_1$  et  $q_2$   
(+ simple  $q_1 = \theta_1$  et  $q_2 = \theta_2$ )



Relations holonomes:

$p$  liaisons entre simple coordonnées cartésiennes:  $f_j(\underline{r}_\alpha, t) = 0$   
 $j = 1 \text{ à } p$

Nombre de

ddl's

$$: n = 2N - p$$

(ou  $3N$  au lieu de  $2N$ )

$$\Rightarrow \underline{r}_\alpha = g(q_i, t)$$

Si  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ , contrainte rhéonome.

Si  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , contrainte scléronome.

Si pas sous la forme  $f(\underline{r}_\alpha, t) = 0$ , contrainte non holonome.

exemple:  $h_j(\underline{v}_\alpha) = 0$

Cinématique en analytique:

$n$  coordonnées généralisées  $q_i$  indépendantes

Si contraintes  $g(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \Rightarrow$  Multiplicateurs de Lagrange.

## 1.2 Principe de moindre action: (principe d'Hamilton):

### 1.2.1 Énoncé du principe variationnel:

On postule qu'il existe une fonctionnelle  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ , dite fonction de Lagrange ou Lagrangien, homogène à une énergie, qui est telle que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad [J.s]$$

soit **extrémale** pour la trajectoire effectivement suivie par le système de  $t_1$  à  $t_2$  entre  $q_i(t_1)$  et  $q_i(t_2)$ , valeurs initiales et finales des coordonnées généralisées.

C'est un principe variationnel  
entre  $q_i(t_1)$  et  $q_i(t_2)$

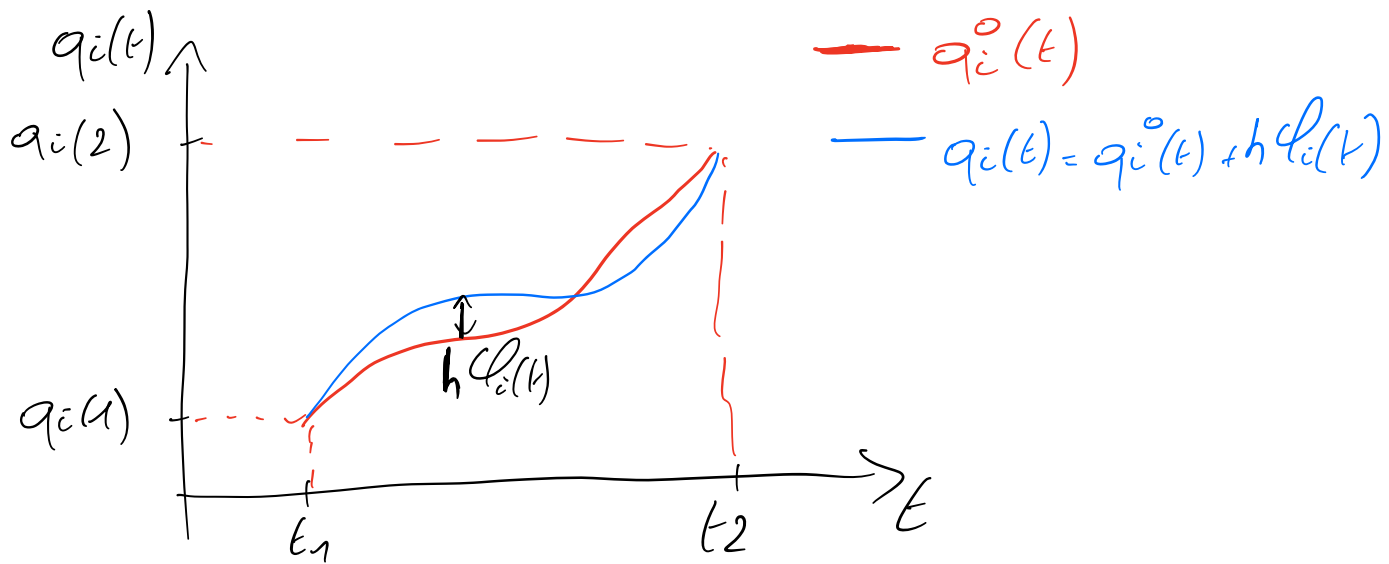
$\Leftrightarrow$  équation diff d'ordre 2  
avec conditions initiales  
 $q_i(t_1)$  et  $\dot{q}_i(t_1)$ .

### 1.2.2 Équations d'Euler-Lagrange:

Soit deux trajectoires possibles entre  $q(1)$  et  $q(2)$ :

$\dot{q}_i(t)$ : la trajectoire effectivement suivie (solution)

$q_i(t) = \dot{q}_i(t) + h\phi_i(t)$ : trajectoire variée infiniment proche (candidats)  
avec  $h \in \mathbb{R}$



Les solutions candidates doivent être **admissibles**, c-à-d **vérifier les conditions aux limites** :

$$q_i^o(t_1) = q_i(t_1) \text{ et } q_i^o(t_2) = q_i(t_2) \Rightarrow \phi_i(t_1) = \phi_i(t_2) = 0$$

\* Calcul des variations :

La trajectoire  $q_i^o(t)$  rend la fonctionnelle  $S$  extrémale, ou stationnaire, si la dérivée directionnelle de l'action  $S$  en  $q_i^o(t)$  dans la direction  $\phi_i(t)$  est nulle.

( $\Leftrightarrow$ )

$S'(q_i^o)(\phi_i) = 0$  pour tout  $\phi_i$  cinématiquement admissible à zéro ( $\phi_i(t)$  réguliers et  $\phi_i(t_1) = \phi_i(t_2) = 0$ )

$S'(q_i^o)(\phi_i) = 0 \quad \forall \phi_i \in \mathcal{L}_a^0$  avec  $\mathcal{L}_a^0 = \left\{ \phi_i \text{ réguliers} \right.$   
 $\left. \text{tel que } \phi_i(t_1) = \phi_i(t_2) = 0 \right\}$

# Recette de la dérivée directionnelle :

$h \in \mathbb{R}$

On pose la fonction perturbée :  $q_i(t) = q_i^0(t) + h \phi_i(t)$

1. Écrire  $S(q_i(t)) = S(q_i^0(t) + h \phi_i(t))$

2. Calculer  $\frac{dS(q_i^0 + h \phi_i)}{dh}$

3. Évaluer pour  $h \rightarrow 0$ , c-à-d qd  $q_i(t) = q_i^0(t)$

\* Application à l'action d'un système :

$q_i(t) = q_i^0(t) + h \phi_i(t)$

$$S'(q_i(t))(\phi_i(t)) = \left. \frac{d}{dh} S(q_i^0 + h \phi_i) \right|_{h \rightarrow 0}$$

1.  $S(q_i(t)) = S(q_i^0 + h \phi_i) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i^0 + h \phi_i, \dot{q}_i^0 + h \dot{\phi}_i) dt$

2.  $\frac{d}{dh} S(q_i(t)) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} dt$

*Derivées de  $q_i$  et  $\dot{q}_i$  par rapport à  $h$*

3.  $\left. \frac{d}{dh} S(q_i^0(t)) \right|_{h \rightarrow 0} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \phi_i dt + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{\phi}_i dt$

Intégration par partie pour avoir la dérivée directionnelle

en fonction de  $\delta q_i(t)$  uniquement :

$$S'(q_i^\circ(t))(\varphi_i(t)) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \varphi_i dt + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \varphi_i \right]_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

Par définition, les accroissements infinitésimaux s'annulent

en  $t_1$  et  $t_2$  :  $\varphi_i(t_1) = \varphi_i(t_2) = 0$

$$\Rightarrow S'(q_i^\circ(t))(\varphi_i(t)) = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \varphi_i(t) dt \quad (1)$$

$$\forall \varphi_i(t) \in \mathcal{E}_e^0$$

$$S \text{ est extrême en } q_i^\circ(t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S'(q_i^\circ(t))(\varphi_i(t)) = 0 \\ \forall \varphi_i(t) \in \mathcal{E}_e^0 \end{array} \right.$$

Indépendance des  $n$   $q_i(t)$  et donc des  $\varphi_i(t)$  :

$$S'(q_i^\circ(t))(\varphi_i(t)) = 0 \Leftrightarrow \text{chaque terme de la somme est nulle.}$$

+ Lemme fondamental du calcul des variations :



Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = 0$$

pour toute fonction  $h(x)$  régulière ds  $[a, b]$  et  $h(a) = h(b) = 0$ ,  
alors  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ .

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$n$  Equations d'Euler-Lagrange avec  $2n$   $q_i(t_1)$  et  $q_i(t_2)$

Ce sont les  $n$  équations différentielles du second ordre qui régissent le mouvement de la trajectoire définie par les  $n$   $q_i(t)$  qui rend l'action stationnaire.

⚠ L'action de ces trajectoires n'est pas toujours minimale, mais parfois maximale. En tout cas elle est toujours stationnaire. Si le chemin parcouru par les trajectoires voisines est "court", on peut démontrer que la trajectoire effectivement suivie minimise l'action dans la méthode variationnelle, d'où le nom de principe de moindre action.

### 1.2.3 Lien avec les équations de Newton :

Supposons que les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes (mouvement sans contraintes) :

$$q_i \rightarrow \underline{v}_\alpha \cdot \underline{e}_i = v_\alpha^i \quad \dot{q}_i \rightarrow \underline{v}_\alpha \cdot \underline{e}_i = v_\alpha^i$$

avec  $\underline{v}_\alpha = \frac{d\underline{r}_\alpha}{dt}$

$$Q(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow Q(r_\alpha^i, v_\alpha^i, t)$$

Les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{\partial Q}{\partial r_\alpha^i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q}{\partial v_\alpha^i} \right) \quad \forall \alpha \text{ et } i=1,2,3$$

ou encore :

$$\underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} Q = \frac{d}{dt} \left( \underline{\nabla}_{\underline{v}_\alpha} Q \right) \quad \forall \alpha$$

avec  $\underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha}$  et  $\underline{\nabla}_{\underline{v}_\alpha}$  respectivement les gradients par rapport à  $\underline{r}_\alpha$  et  $\underline{v}_\alpha$ .

Supposons que les  $\alpha$  particules matérielles sont placées dans des champs de forces conservatifs  $\underline{F}_\alpha(\underline{r}_\alpha, t)$ . On a alors

$$\underline{F}_\alpha(\underline{r}_\alpha, t) = -\underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} E_p(\underline{r}_\alpha, t)$$

et la fonction  $E_p(\underline{r}_\alpha, t)$  est appelée énergie potentielle du système.

La forme de la fonction de Lagrange qui redonne les équations de Newton est simplement  $\mathcal{L}(\underline{r}_\alpha^i, \underline{v}_\alpha^i, t) = E_c(\underline{v}_\alpha^i) - E_p(\underline{r}_\alpha^i, t)$  où  $E_c(\underline{v}_\alpha) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \underline{v}_\alpha^2$  est l'énergie cinétique du système.

En effet, en faisant ce choix on trouve:

$$\underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} \mathcal{L} = - \underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} E_p(\underline{r}_\alpha, t) = \underline{F}_\alpha(\underline{r}_\alpha, t)$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} (\underline{\nabla}_{\underline{v}_\alpha} \mathcal{L}) = \frac{d}{dt} m_\alpha \underline{v}_\alpha = m_\alpha \underline{a}_\alpha //$$

Comme la fonction de Lagrange ne doit pas dépendre du choix du système de coordonnées généralisées, on aura :

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = E_c(q_i, \dot{q}_i) - E_p(q_i, t)$$

⚠ Dans le cas d'un système soumis à des forces conservatives (le travail de ces forces est indépendant du chemin parcouru).

## 1.3 Principe des Travaux Virtuels (principe de d'Alembert):

### 1.3.1 Énoncé du principe variationnel:

C'est un principe différentiel, l'état du système à un instant donné  $t$  est pris comme référence et on considère l'influence des variations  $\delta q_i$ .

Ici, la variation infinitésimale  $\delta q_i$  est appelée un déplacement virtuel, c.à-d un déplacement théorique du système discret qui est atemporel (instantané), infinitésimal et qui respecte les contraintes holonomes (les  $\delta q_i$  doivent être cinématiquement admissibles).

On part de l'approche locale Newtonienne:

A tout instant  $t$

$$m_\alpha \underline{a}_\alpha = \underbrace{\underline{F}_\alpha}_{\text{Forces extérieures}} + \underbrace{\underline{R}_\alpha}_{\text{Forces internes ou de liaisons}} \quad \alpha = 1 \dots N$$

Pour tout déplacement virtuel  $\underline{\delta r}_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \dots N$ ,

du système discret à  $N$  particules, on a :

$$\sum_{\alpha=1}^N (\underline{F}_\alpha + \underline{R}_\alpha - m_\alpha \underline{a}_\alpha) \underline{\delta r}_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1 \dots N$$

qui est le Principe des Travaux Virtuels :

$$\delta W = 0 = (\delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{liaisons}} + \delta W_{\text{inertie}})$$

Dans un déplacement virtuel quelconque, la somme des travaux virtuels des forces extérieures, des forces internes de liaison et des forces d'inerties généralisées est nulle à l'instant  $t$ .

Principe de d'Alembert : L'ensemble des forces de contraintes appliquées à un système ne travaille pas lors d'un déplacement virtuel :

$$\delta W_{\text{liaisons}} = \sum_{\alpha=1}^N \underline{R}_\alpha \underline{\delta r}_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \text{PTV: } \delta W = 0 = \sum_{\alpha=1}^N (\underline{F}_\alpha - m_\alpha \underline{a}_\alpha) \underline{\delta r}_\alpha \quad (*)$$

## Formalisme Lagrangien:

Si les coordonnées sont données par  $n$  coordonnées généralisées  $q_1, \dots, q_n$  tel que

$$\underline{r}_\alpha = \underline{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

Un déplacement infinitésimal est noté  $(dq_i)_{i=1, \dots, n}$  et nécessite un temps infinitésimal  $dt$  et on a :

$$\underline{dr}_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial t} dt.$$

Un déplacement virtuel est noté  $(\delta q_i)_{i=1, \dots, n}$  et nécessite un temps nul de sorte que :

$$\underline{\delta r}_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i$$

L'idée est de réécrire le PTV (\*) dans le formalisme Lagrangien :

$$\delta W = 0 = \sum_{i=1}^n (\underbrace{Q_i}_{\text{Forces généralisées}} - \underbrace{A_i}_{\text{Accélération généralisées}}) \delta q_i \quad (*)$$

Forces généralisées      Accélération généralisées

Par identification avec (\*),  $Q_i \delta q_i = \underline{F}_\alpha \cdot \underline{\delta r}_\alpha$  et

donc :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \underline{F}_\alpha \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

De même  $A_i \delta q_i = m_\alpha \underline{a}_\alpha \cdot \underline{\delta r}_\alpha$ , de sorte que :

$$A_i = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \underline{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{d}{dt} (\underline{v}_\alpha) \cdot \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

$$A_i = \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \underline{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \right]}_{\textcircled{A}} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \underline{v}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \right)}_{\textcircled{B}}$$

L'accélération généralisées donne deux termes que l'on peut développer :

$$\textcircled{A} : \underline{v}_\alpha = \frac{d}{dt} \underline{r}_\alpha (q_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial t}$$

Déplacements virtuels

$$\longrightarrow \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

$$\textcircled{B} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \underline{r}_\alpha}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial q_i}$$

Au final :

$$A_i = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{v}_{\alpha} \frac{\partial \underline{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \underline{v}_{\alpha} \frac{\partial \underline{v}_{\alpha}}{\partial q_i}$$

$$A_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[ \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \underline{v}_{\alpha}^2 \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \underline{v}_{\alpha}^2 \right]$$

La fonctionnelle  $E_c(\underline{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \underline{v}_{\alpha}^2$  est l'énergie cinétique du système. Elle ne doit pas dépendre du choix du système de coordonnées généralisées :

$$E_c(\underline{v}_{\alpha}) = E_c(q_i, \dot{q}_i)$$

Donc au final :

$$A_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i}$$

Si  $q_i(t)$  (et donc  $\dot{q}_i(t)$ ) sont indépendants :

$$\sum_{i=1}^n (Q_i - A_i) \delta q_i = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i$$

### 1.3.2 Système conservatif :

Les forces  $\underline{F}_{\alpha}$  dérivent d'un potentiel  $E_p(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$  :



$$\underline{F}_\alpha = -\underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} \mathcal{E}_p = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \underline{r}_\alpha}$$

Les forces généralisées s'écrivent alors :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \underline{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^N \underline{\nabla}_{\underline{r}_\alpha} \mathcal{E}_p \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_i}$$

et les équations du mouvement à tout instant  $t$  deviennent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p)}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i$$

dans la mesure où  $\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial q_i} = 0$ . En posant le Lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p$ , on retrouve les équations d'Euler-Lagrange.

### 1.3.3 Cas général :

Dans le cas général, les équations d'Euler-Lagrange

sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q'_i \quad \forall i$$

où  $Q'_i$  sont des forces généralisées non conservatives de la forme :

$$Q'_i = \sum_{\alpha=1}^N \underline{F}'_\alpha \frac{\partial \underline{r}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N \underline{F}'_\alpha \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}$$

Dans le cas des forces de frottement visqueuses classiques en mécanique,  $\underline{F}_\alpha = -c_\alpha \underline{v}_\alpha$ , on a :

$$Q'_i = \sum_{\alpha=1}^N -c_\alpha \underline{v}_\alpha \frac{\partial \underline{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}$$

Ces forces généralisées peuvent se mettre sous la forme  $Q'_i = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}$  où

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \underline{v}_\alpha^2$$

est appelée la fonction de Rayleigh. Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = Q'_i$$

## 1.4 Introduction à la formulation Hamiltonienne:

Les équations de Lagrange sont des équ. diff. du second ordre difficiles à résoudre analytiquement et numériquement.

Pour passer au premier ordre, plus pratique, on utilise les équations de Hamilton.

Nous resterons dans le cadre de forces conservatives, lisons hdonomes et Lagrangien qui ne dépend pas explicitement du temps.

En introduisant l'impulsion généralisée:  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$   
on peut écrire les équations de Lagrange sous la forme:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

La différentielle totale du Lagrangien s'écrit alors:

$$d\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_i f_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i$$

On peut alors utiliser la transformation de Legendre pour trouver une différentielle qui ne dépend que des  $q_i$  et  $p_i$ . En posant la fonction de Hamilton :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Sa différentielle s'écrit

$$dH = \sum_i dp_i \dot{q}_i + \sum_i p_i dq_i - d\mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i$$

Il apparaît donc comme une fonction naturelle des  $q_i$  et  $p_i$  dont les dérivées partielles sont les  $\dot{p}_i$  et  $\dot{q}_i$ . Cette propriété se résume sous la forme des équations de

Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \end{cases}$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

Les positions et les impulsions sont dites variables conjuguées.

Pour les systèmes conservatifs, la définition de  $H$  coïncide avec l'énergie totale  $\mathcal{E}$  qui est une constante ou intégrale première du mouvement :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{E}$$

car

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt} (H(q_i, p_i)) = 0.$$

Comme l'énergie cinétique  $E_c$  est une forme quadratique des vitesses généralisées :

$$2E_c(\dot{q}_i) = \sum_i \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

et si  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = E_c(\dot{q}_i) - E_p(q_i)$ , alors

$$H(q_i, p_i) = 2E_c(\dot{q}_i) - (E_c(\dot{q}_i) - E_p(q_i))$$

$$H(q_i, p_i) = E_c(\dot{q}_i) + E_p(q_i) = \mathcal{E}$$

Dans le cas particulier où les forces dérivent d'une énergie potentielle ne dépendant que des positions et où les coordonnées généralisées coïncident avec les cartésiennes, l'impulsion s'écrit classiquement :  $\underline{p}_\alpha = m_\alpha \underline{v}_\alpha$  et les équations de Hamilton deviennent :

$$\begin{cases} \nabla_{\underline{p}_\alpha} H = \underline{v}_\alpha \\ \nabla_{\underline{r}_\alpha} H = -\dot{\underline{p}}_\alpha \end{cases}$$

et en notant  $H = \sum_{\alpha=1}^N \underline{p}_\alpha^2 / 2m_\alpha + E_p(\underline{r}_\alpha)$ , on en déduit

$$\begin{cases} \underline{p}_\alpha / m_\alpha = \underline{v}_\alpha \\ \underline{F}_\alpha = \dot{\underline{p}}_\alpha \end{cases}$$

qui sont la définition de l'impulsion et le Principe Fondamental de la Dynamique de Newton écrit en impulsion.