

# CHAPITRE 2

## Théorie des systèmes dynamiques

### 0. Introduction :

Un système dynamique est un système dont l'état (l'ensemble des grandeurs suffisants à décrire le système à l'instant  $t$ ) évolue en fonction du temps. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique, le mouvement des planètes ou les fluctuations des marchés financiers. Nous étudierons des systèmes dynamiques à temps continu mais ils peuvent aussi être à temps discrets.

Deux aspects importants d'un système dynamique sont qu'il est :

- Causal : son avenir ne dépend que du passé ou du présent.
- Déterministe : à une condition initiale donnée va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

L'étude de l'évolution d'un système dynamique nécessite donc la connaissance :

- de son état initial à l'instant initial  $t=0$  de l'étude.
- de sa loi d'évolution.

On a vu dans le chapitre précédent que pour un système physique discret, la loi d'évolution est bien modélisée par des Équations Différentielles Ordinaires (EDO). En théorie des systèmes dynamique, la loi d'évolution s'écrit sous la forme d'EDO du premier ordre :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{F}(\underline{X}(t), \underline{d}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{X}(0) = \underline{X}_0 \quad (\square)$$

où  $\underline{X}(t)$  est appelé le vecteur des variables d'état de dimension  $N$ ,  $\underline{F}$  est un champ de vecteurs non linéaire de dimension  $N$  qui peut dépendre explicitement du temps (système non-autonome) ou pas (système autonome,  $\frac{\partial \underline{F}}{\partial t} = 0$ ) et qui peut dépendre d'un paramètre de contrôle  $\underline{d}$ , qui est un scalaire réel.

### Théorème de Cauchy-Lipschitz:

Le Principe Fondamental de la Dynamique (ou de façon équivalente les équations d'Euler-Lagrange ou de Hamilton) se traduisent par des EDO de type  $(\square)$  vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Ce théorème assure l'existence locale et l'unicité de la solution de  $(\square)$  pour une condition initiale donnée.

## Systèmes linéaires et non linéaires :

Il existe des cas particuliers où (□) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\underline{X}}(t) = [A(d, t)] \cdot \underline{X}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{X}(0) = \underline{X}_0$$

où  $[A(d, t)]$  est une matrice dépendant éventuellement d'un paramètre de contrôle  $d$  et du temps  $t$ .

Le système est alors linéaire et les règles de l'algèbre linéaire s'appliquent ce qui simplifie considérablement l'analyse (voir cours partie vibration notamment).

Dans le cas général où (□) est non linéaire, la recherche de solutions précises aux EDOs est très difficile et on préfère faire appel aux théories des systèmes dynamiques qui cherchent à décrire qualitativement les comportements à long terme des EDOs.

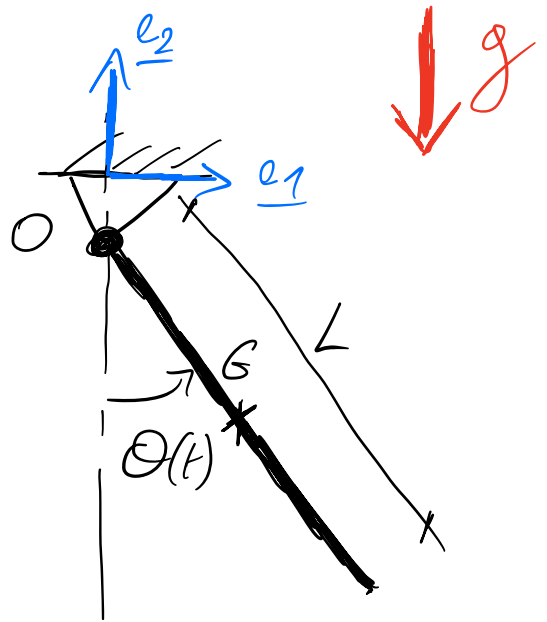
## Espace des phases :

L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Pour un système possédant  $N$  degrés de liberté, l'espace des phases  $\Gamma$  du système possède  $N$  dimensions, de telle sorte que l'état complet  $\underline{X}(t) \in \Gamma$  du système à l'instant  $t$  est en général un vecteur à  $N$  composantes.

# I Quelques exemples :

## 1.1 Pendule plan conservatif :

Considérons le cas classique du pendule plan ci-contre. Il s'agit d'une barre pesante de masse  $m$  et de longueur  $L$  libre de tourner dans le plan au point  $O$ .



L'équation de mouvement de ce système à 1 degré de liberté s'écrit simplement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{E}_c}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \dot{E}_p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2$$
$$\text{et} \quad E_p = -mg \frac{L}{2} \cos \theta + \text{cste} = 0$$

$$\text{D'où} \quad \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

$$(*) \quad \underline{\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

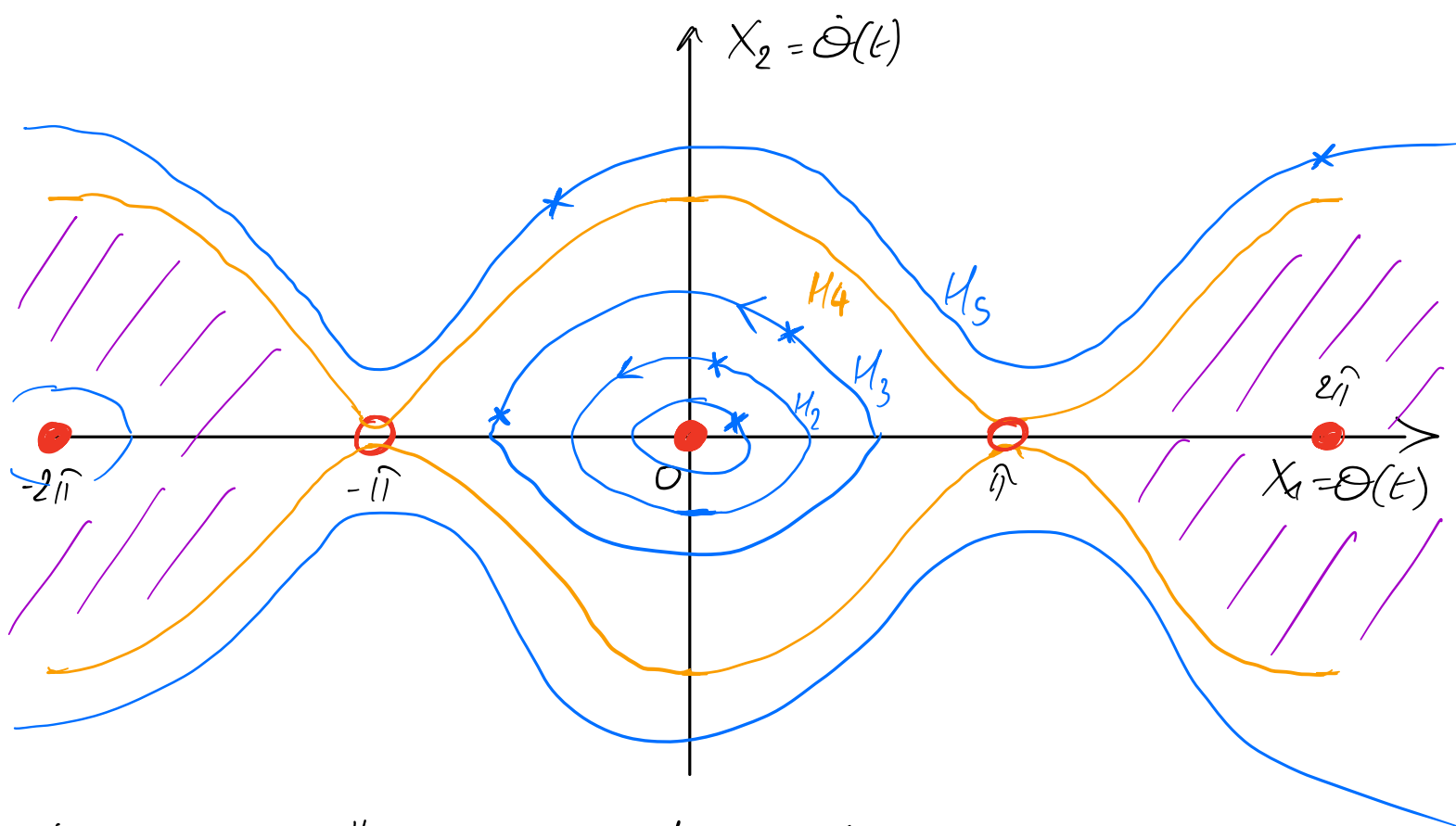
à laquelle on rajoute 2 conditions initiales.

Dans la théorie des systèmes dynamique, on écrira (\*) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 \sin(x_1(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = \theta_0 \\ x_2(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

où le vecteur des variables d'état  $\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$  est de dimension 2.

Le portrait de phase représente toutes les trajectoires possibles du système dans l'espace des phases (ici  $(x_1 = \theta(t), x_2 = \dot{\theta}(t))$ ) :



Il permet de mettre en évidence les caractéristiques essentielles de la physique du système non linéaire.

D'après le **théorème de Cauchy**, à chaque condition initiale  $x$  correspond une seule trajectoire. Des conditions initiales différentes peuvent donner la même trajectoire. **Les trajectoires ne se "croisent" jamais !**

Ici, les **trajectoires représentent les isovaleurs de l'Hamiltonien  $H(t)$  qui est constant et qui représente l'énergie totale :**

$$H(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\Theta}(t)^2 - mg \frac{L}{2} \cos \Theta(t) = E_0$$

où  $E_0 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\Theta}(0)^2 - mg \frac{L}{2} \cos(\Theta(0))$  est l'énergie initiale donnée au système.

En d'autres termes, les conditions initiales qui donnent le même  $E_0$  correspondent à la même trajectoire dans l'espace des phases.

Deux comportements qualitatifs du pendule sont à distinguer selon la valeur de l'énergie initiale:

\* Si  $E_0 > mg \frac{L}{2}$ , le pendule n'arrête pas de tourner et ne change jamais de sens une fois lancé. Ce sont les courbes  $H_4$  ou  $H_5$  qui ne sont pas fermées.

\* Si  $E_0 < mg \frac{L}{2}$ , le pendule oscille autour de ses positions d'équilibre stables  $\underline{x}^* = \{\dot{\theta}^*, \theta^*\}$  qui sont telles que  $\dot{\theta}^* = 0$  et  $\theta^*(t) = \pm k\pi$  avec  $k = 0, 2, 4, \dots$ . Ce sont les conditions initiales qui dictent autour de quel équilibre  $\underline{x}^*$  le pendule va osciller. L'ensemble des conditions initiales qui donnent lieu à des trajectoires fermées autour d'un équilibre  $\underline{x}^*$  est appelé le **basin d'attraction** de cet équilibre (hachuré en violet pour  $\theta^* = -2\pi$  et  $\theta^* = 2\pi$ ).

On voit que les **points fixes** (ou **équilibres**)  $\underline{x}(t) = \underline{x}^*$  du système dynamique  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$  qui sont définis tel que  $\frac{\partial \underline{x}^*}{\partial t} = 0$  sont des entités très importantes du système. Ce sont des points dans l'espace des phases qui structurent le portrait de phase.

On distingue les équilibres instables  $\circ$  (ici en  $\dot{\theta}^* = 0$  et  $\theta^*(t) = \pm k\pi$  avec  $k = 1, 3, 5, \dots$ ) aussi appelés points fixes **répulsifs** des équilibres stables  $\bullet$ , aussi appelé points fixes **attracteurs**.

Les trajectoires s'éloignent des points fixes répulseurs (en effet, quand on est près de  $\Theta^* = \pi$ , le pendule tombe) comme pour  $H_4$  ou  $H_5$ . Les trajectoires restent autour des points fixe attracteurs comme pour  $H_2$  ou  $H_3$  autour de  $\Theta^* = 0$ . Si l'on ajoutait des effets dissipatifs (type forces de frottements) au pendule qui serait alors non conservatif, une trajectoire dont les conditions initiales seraient dans le bassin d'attraction d'un attracteur finirait par converger vers ce point fixe au temps long.

Même si dans ce cours nous verrons uniquement comment calculer des points fixes et leurs stabilités locales, il faut savoir qu'il existe d'autres invariants caractéristiques aux temps longs.

## 1.2 L'oscillateur de Van der Pol (1928).

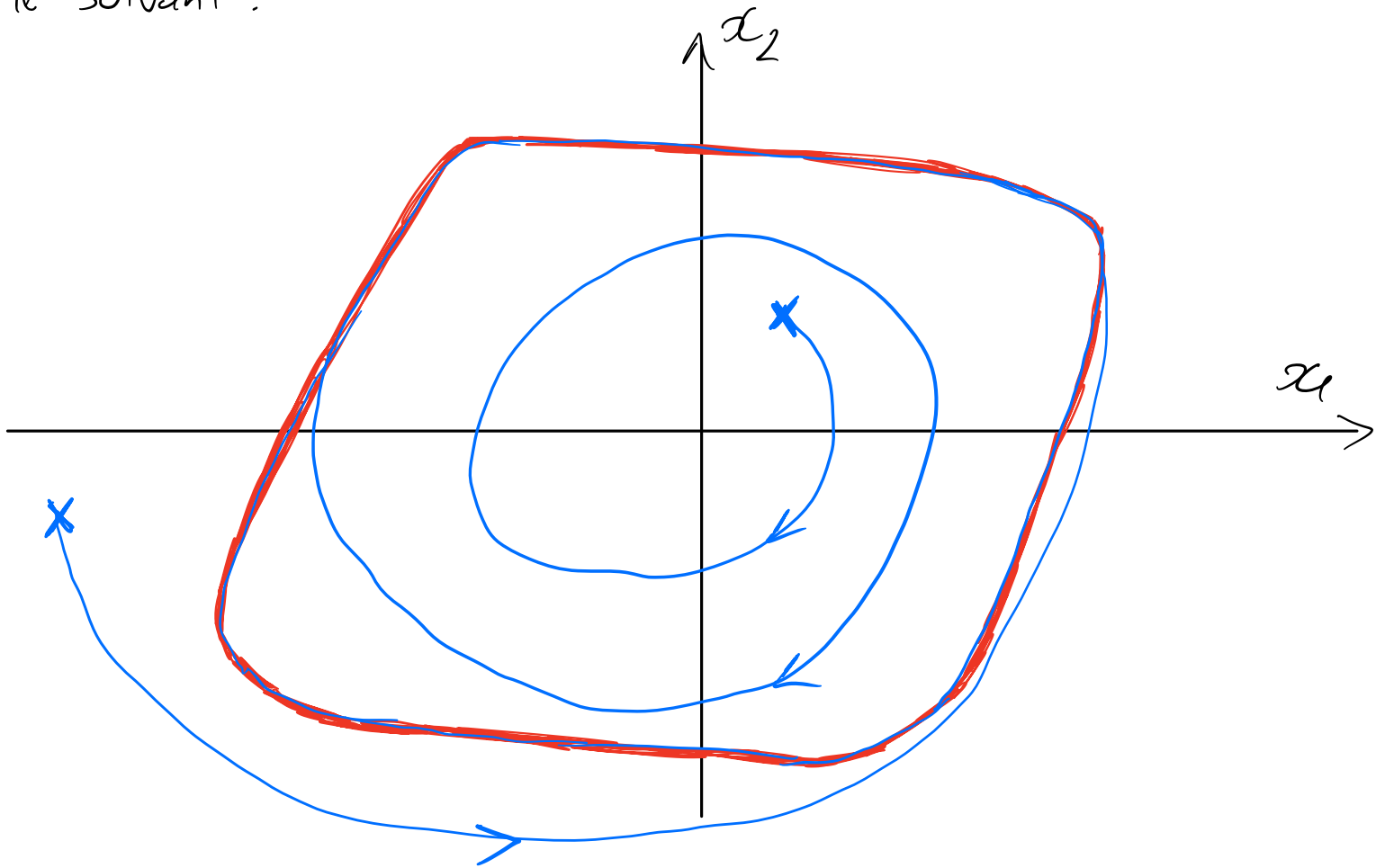
L'oscillateur de Van der Pol est un système à 1 degré de liberté physique très utilisé en électronique.

En théorie des systèmes dynamiques, le système s'écrit sous la forme d'une EDO du 1<sup>er</sup> ordre à 2 dimensions :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ \varepsilon \omega_0 (1 - x_1^2) x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{Bmatrix}$$

où  $\omega_0$  est une pulsation naturelle et  $\varepsilon$  un coefficient de non-linéarité (si  $\varepsilon=0$ , le système est linéaire).

Lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , ce système dissipatif possède une dynamique régulière caractérisée au temps long par un attracteur en forme de cycle limite. Le portrait de phase typique est alors le suivant :



Un cycle limite (ici en rouge) est une trajectoire fermée et isolée dans l'espace des phases. Le cycle limite représente une solution périodique  $\underline{x}^*(t) = \underline{x}^*(t+T)$ . "Isolé" signifie qu'il ne peut pas y avoir de trajectoires fermées proches. Selon que le cycle est stable (attracteur) ou instable (répulsor), les trajectoires alentours s'approchent ou s'éloignent en spirale.



Sur la figure, le cycle limite est un **attracteur global**, c-à-d que son **bassin d'attraction** est **tout l'espace des phases**. Autrement dit, quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires finiront par converger vers le cycle limite.

Dans le cas précédent du pendule plan, les points fixes étaient des **attracteurs locaux** car leurs **bassins d'attractions** étaient finis.

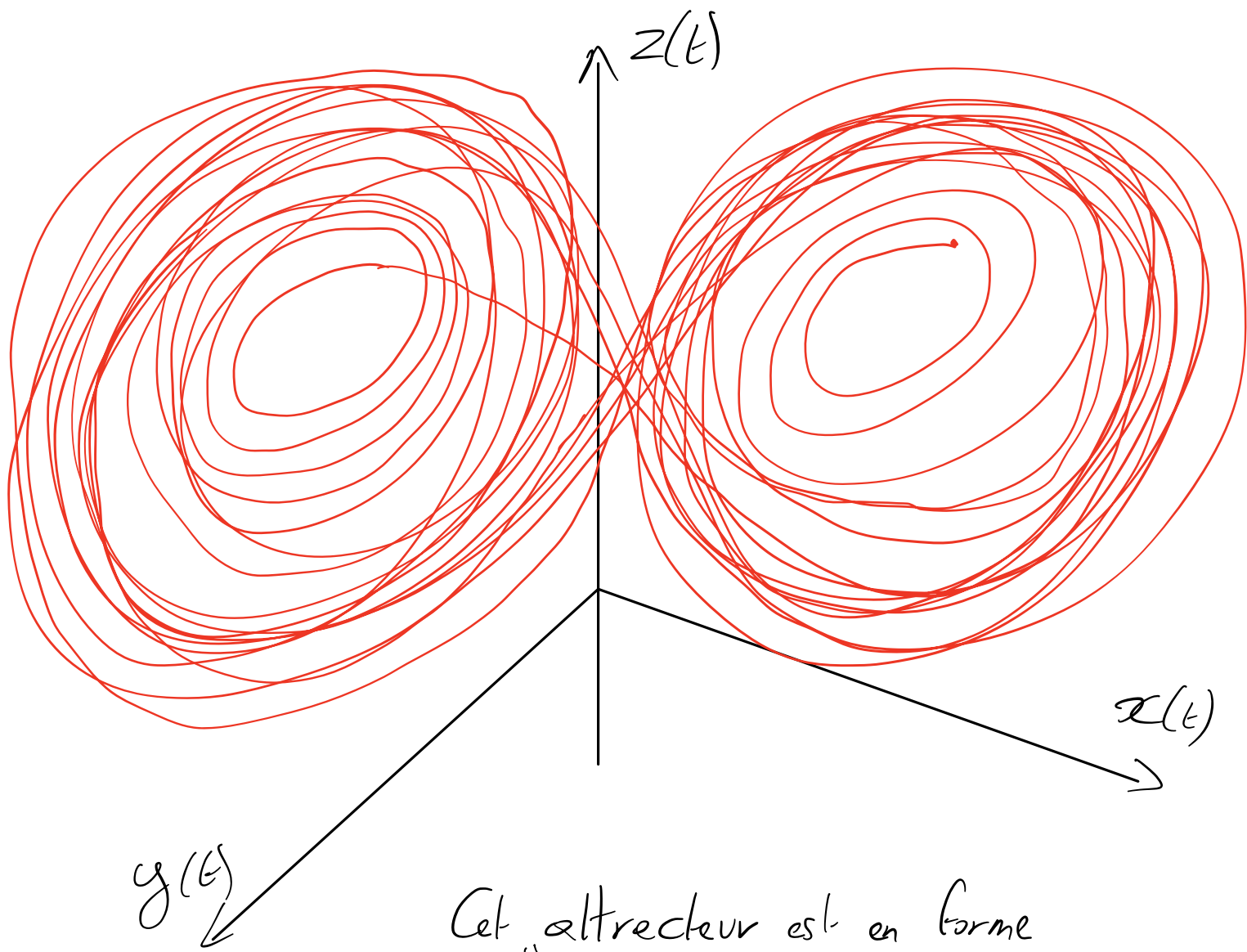
### 1.3 Le système de Lorenz (1963)

En 1963, Edward Lorenz a proposé un système différentiel du premier ordre de dimension 3 faisant intervenir 3 variables d'états  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{cases} = \begin{cases} \sigma(y(t) - x(t)) \\ \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont trois paramètres réels positifs.

Ce système est un modèle simplifié pour prédire des comportements météorologiques. Pour  $\sigma=10$ ,  $\rho=28$  et  $\beta=8/3$ , ce système dynamique présente un attracteur étrange aux temps longs:



Cet "attracteur est en forme d'"ailes de papillon".

Deux conditions initiales extrêmement proches dans l'espace des phases vont engendrer deux trajectoires qui vont rapidement diverger et donc donner lieu à des dynamiques très différentes. Cette sensibilité aux conditions initiales rend le dynamique de ce système pourtant déterministe pratiquement imprédictible. Ce phénomène est appelé chaos et il explique pourquoi il sera toujours difficile de prédire le météo même avec des modèles dynamiques ultra sophistiqués.

Au temps longs cependant, malgré le caractère apparemment

erratique des trajectoires, ces dernières finissent par former une variété mathématique très structurée et que l'on peut étudier : l'attracteur étrange. Cet attracteur est un objet mathématique fractal, c'est à dire qu'il présente une structure similaire à toutes les échelles.

A noter pour finir que le théorème de Poincaré-Bendixon stipule qu'il ne peut pas y avoir de chaos dans un système dynamique  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$  de dimension inférieur ou égal à deux (⚠ si  $\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} \neq \underline{0}$ , il faut compter une dimension en plus).

## II Points fixes et stabilité locale:

Dans cette section, nous voyons comment calculer les points fixes d'un système dynamique de dimension  $N$  dans l'espace des phases.

Considérons le système  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$  et supposons que  $\underline{x}^*$  est un point fixe (un vecteur de variables d'état qui ne varie pas avec le temps), c'est-à-dire :

$$\underline{\dot{x}}^* = \underline{f}(\underline{x}^*) = \underline{0}$$

Pour déterminer la stabilité locale du point fixe, on linéarise le système dynamique autour de  $\underline{X}^*$ .

Définissons  $\underline{y}(t) = \underline{X}(t) - \underline{X}^*$  le vecteur des perturbations autour du point fixe  $\underline{X}^*$ . Pour voir si les perturbations diminuent ou augmentent au cours du temps, nous avons besoin d'une équation différentielle pour  $\underline{y}(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}}(t) &= \dot{\underline{X}}(t) - \dot{\underline{X}}^* = \dot{\underline{X}}(t) = \underline{F}(\underline{X}^* + \underline{y}(t)) \\ &= \underline{F}(\underline{X}^*) + \left. \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{X}} \right|_{\underline{X}^*} \underline{y}(t) + O(\|\underline{y}(t)\|^2)\end{aligned}$$

Comme  $\underline{y}(t)$  est une petite perturbation,  $O(\|\underline{y}(t)\|^2)$  est petit et peut être négligé au premier ordre. Sachant de plus que  $\underline{F}(\underline{X}^*) = \underline{0}$  par définition, nous obtenons le système linéarisé autour de  $\underline{X}^*$ :

$$\dot{\underline{y}}(t) = [\underline{J}] \underline{y}(t) \quad (\square)$$

avec  $\underline{y}(0) = \underline{X}(0) - \underline{X}^*$  et où :

$$[\underline{J}] = \left. \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{X}} \right|_{\underline{X}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$  au point  $\underline{x}^*$ .

Comme (D) sont des EDOs linéaires de dimension  $N$ , on sait que la perturbation  $\underline{y}(t)$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{A}_i e^{s_i t}$$

où les constantes  $\underline{A}_i$  sont définies par le vecteur des conditions initiales de dimension  $N$ ,  $\underline{y}(0)$ .

Les  $s_i$  sont les  $N$  valeurs propres, possiblement complexes, de la matrice Jacobienne. Ils sont appelés les exposants de Lyapunov et leurs formes renseignent sur la stabilité locale de  $\underline{x}^*$ .

### Stabilité au sens de Lyapunov:

Soit le système dynamique autonome  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ . Un point fixe  $\underline{x}^*$  est stable en sens de Lyapunov si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que si  $\|\underline{x}(0) - \underline{x}^*\| < \delta$ , alors on a  $\|\underline{x}(t) - \underline{x}^*\| < \epsilon$   $\forall t > 0$ .

Le point fixe  $\underline{x}^*$  est même dit asymptotiquement stable s'il est stable en sens de Lyapunov et si lorsque  $\|\underline{x}(0) - \underline{x}^*\| < \delta$ , on a  $\|\underline{x}(t) - \underline{x}^*\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Le point fixe est instable s'il n'est pas stable.

## Théorème de Lyapunov:

Comme  $\underline{y}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}^*$  et que l'on a vu que la perturbation s'écrivait sous la forme:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{A}_i e^{s_i t},$$

l'analyse des exposants de Lyapunov suffit à conclure quant à la stabilité locale de  $\underline{x}^*$ :

\* Si  $\Re(s_i) < 0 \forall i$ , les petits mouvements perturbés tendent vers l'équilibre  $\underline{x}^*$  quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $\underline{x}^*$  est donc asymptotiquement stable.

\* Si  $\Re(s_i) \leq 0$  et qu'en moins un  $s_i$  est tel que  $\Re(s_i) = 0$ , le mouvement perturbé reste dans un domaine borné de l'espace de phases autour de  $\underline{x}^*$ , le point fixe est stable au sens de Lyapunov.

\* S'il existe un  $i$  tel que  $\Re(s_i) > 0$ , la perturbation  $\underline{y}(t)$  augmentent avec le temps dans la direction du mode  $\underline{A}_i$ , le point fixe  $\underline{x}^*$  est instable. On distingue alors deux cas de figure selon la valeur de la partie imaginaire associée en  $s_i$ :

→ Si  $\Im(s_i) \neq 0$ , la perturbation  $\underline{y}(t)$  est un mouvement oscillant dont l'amplitude croît de façon exponentielle. C'est une instabilité dynamique.

→ Si  $\Im(s_i) = 0$ , la perturbation est une exponentielle

réelle non oscillante, on parle d'instabilité par divergence. C'est une instabilité statique.

### III Bifurcations:

Dans la pratique, le système dynamique dépend souvent d'un paramètre de contrôle  $\alpha$ :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{f}(X, \alpha)$$

où  $\alpha$  est un scalaire réel.

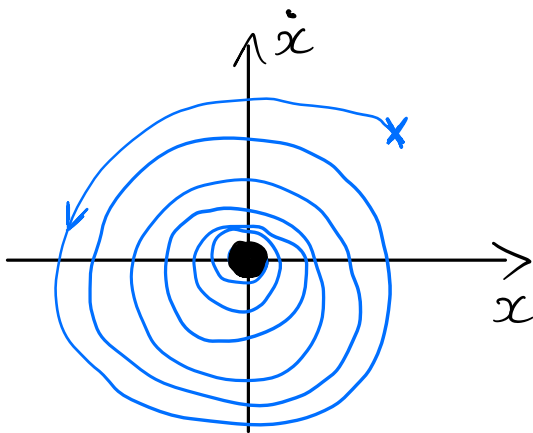
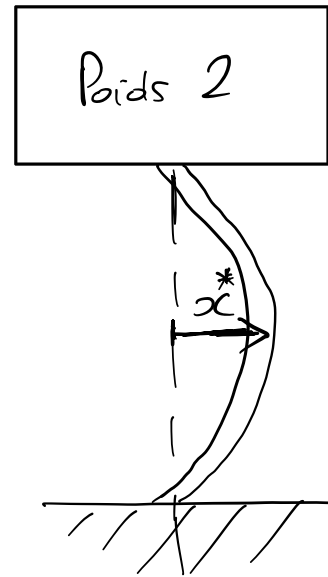
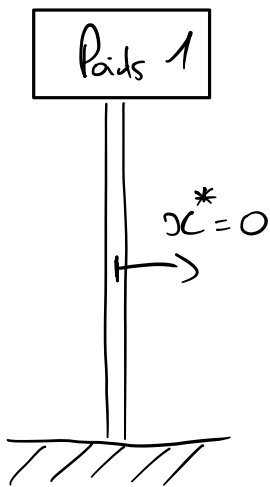
Lorsque  $\alpha$  est varié continuellement, il peut y avoir des changements qualitatifs dans la dynamique d'un système. Notamment, des points fixes peuvent être créés ou détruits, ou leur stabilité peut changer.

Ces changements qualitatifs s'appellent des bifurcations. Les valeurs du paramètre  $\alpha$  pour lesquelles ces changements arrivent s'appellent des points de bifurcation.

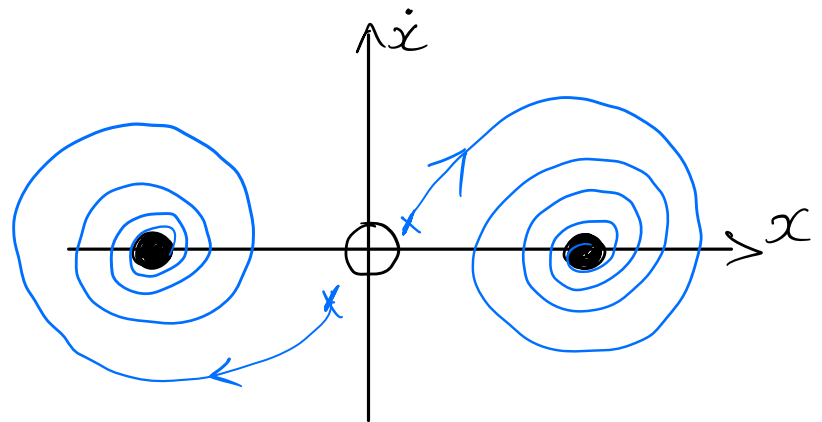
Trouver et comprendre les bifurcations d'un système dynamique est très important en ingénierie et en science.

Prenons l'exemple du flambage d'un poteau. Si un poids faible est placé sur le poteau, le "poteau droit" est une position d'équilibre stable. Mais si le poids dépasse une charge critique  $\alpha_c = P_c$  (point

de bifurcation), la position verticale devient instable et le poteau flambe :



Portrait de phase : un seul équilibre stable en  $x^*=0$



L'équilibre en  $x^*=0$  est instable et deux positions d'équilibre sont apparues.

La structure topologique du portrait de phase a changé selon que l'on prend  $P=P_1$  ou  $P=P_2$ , on dit qu'il y a eu bifurcation.

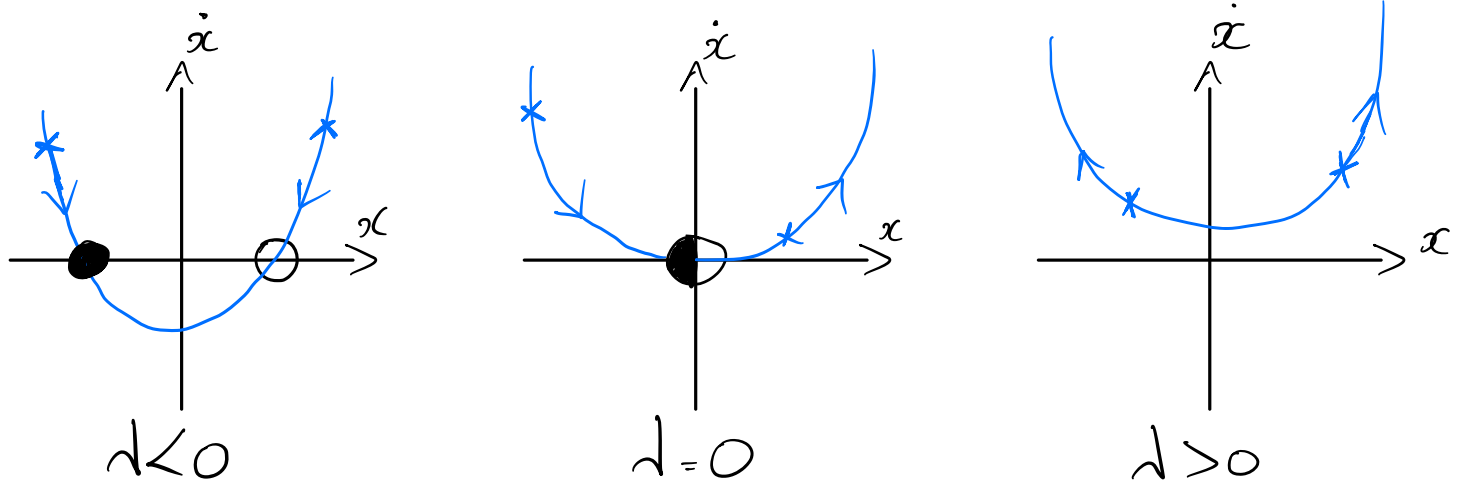
Dans ce cours, nous nous intéresserons uniquement à la bifurcation de points fixes. Trois types de bifurcations sont à distinguer que nous décrirons sur des exemples de systèmes dynamiques typiques de dimension 1,  $\dot{x} = f(x, \mu)$ . A noter que même en  $N$ -dimension, une bifurcation de points fixes peut toujours se réduire à une dimension.



### 3.1 Bifurcation point-selle :

La bifurcation point-selle est le mécanisme de base par lequel les points fixes sont créés ou détruits.

Le modèle typique autrement appelée la forme normale de cette bifurcation est donnée par l'ODE du premier ordre  $\dot{x} = d + x^2$  :

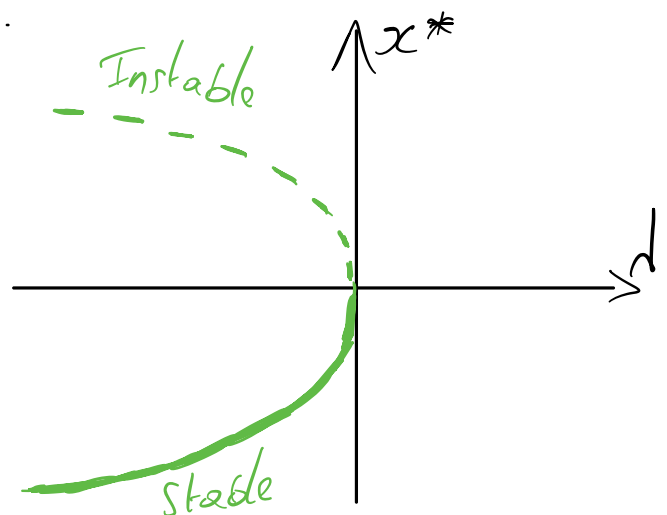


Lorsque le paramètre  $d$  est varié, 2 points fixes se rapprochent, collisionnent et s'anéantissent. Dans cet exemple 1D (ou les portraits de phase sont des courbes uniques), on dit qu'une bifurcation a eu lieu en  $d=0$ .

La manière la plus classique de représenter les bifurcations de points fixes est de représenter l'évolution des points fixes du système en fonction du paramètre de contrôle  $d$ .

Cette figure est appelée le diagramme de bifurcation (ici de la bifurcation point-selle).

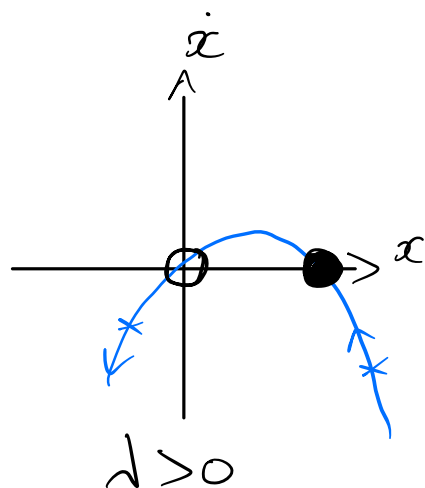
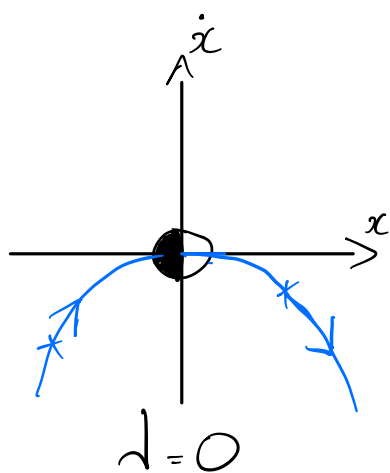
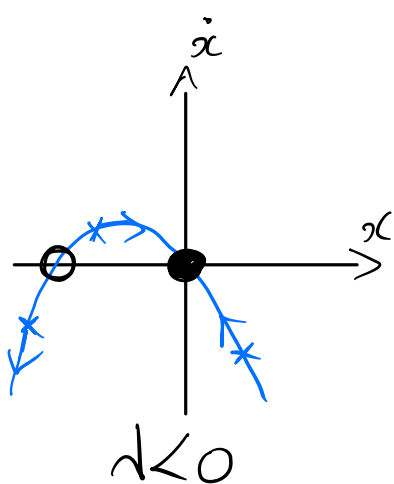
Les branches d'équilibres stables sont généralement représentées



en trait plein alors que les branches d'équilibres instables sont en pointillés.

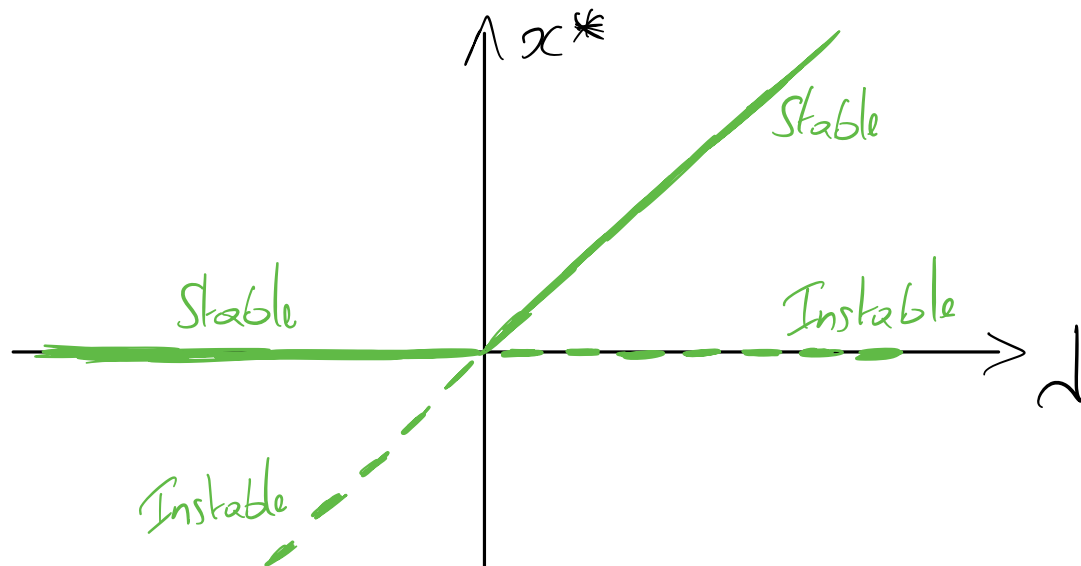
### 3.2 Bifurcations transcritiques :

La forme normale de la bifurcation transcritique est  $\dot{x} = \lambda x - x^2$ .



On dit souvent qu'un échange de stabilité a eu lieu entre les deux points fixes du système dynamique comme le montre bien l'évolution des portraits de phase.

Le diagramme de bifurcation d'une bifurcation transcritique se représente comme ceci :



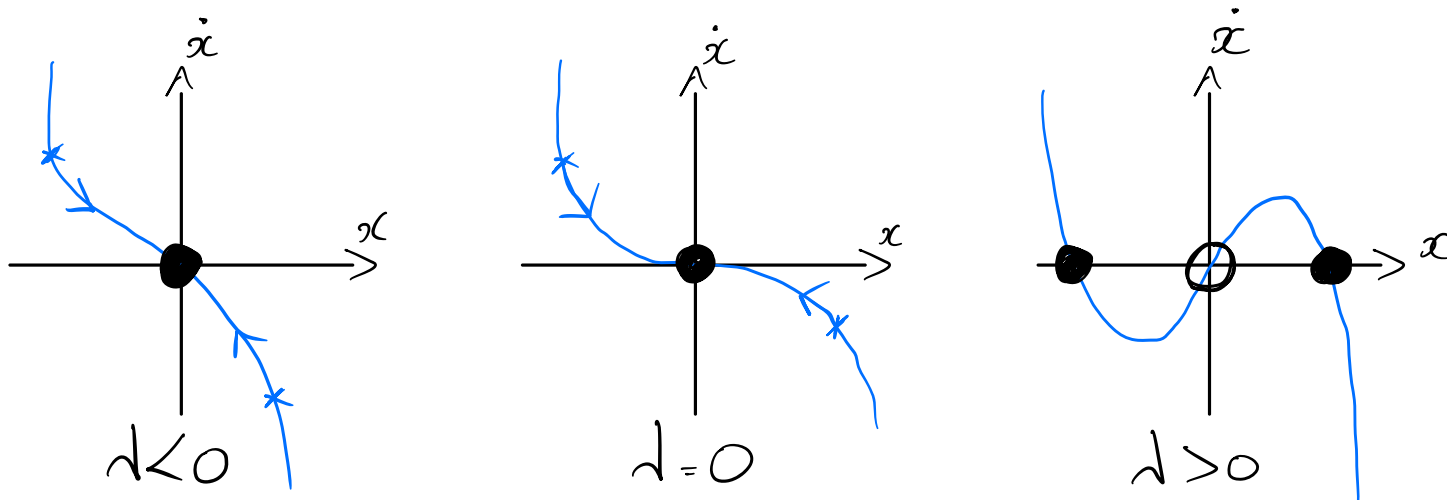
### 3.3 Bifurcation fourche :

Cette bifurcation est classique dans les systèmes qui ont une symétrie. C'est le cas par exemple du poteau qui flambe. On doit distinguer deux types de bifurcation fourche. La première est dite supercritique, c'est le cas du flambage. La seconde est dite sous-critique, c'est le cas d'un phénomène souvent redouté en mécanique des structures que l'on appelle le claquage.

#### Bifurcation fourche super-critique :

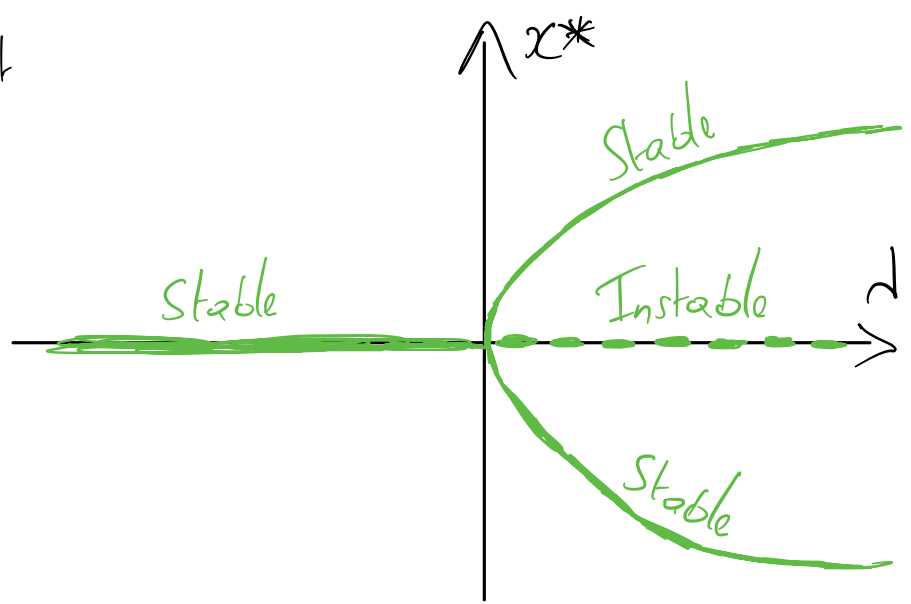
La forme normale de la bifurcation super-critique est  $\dot{x} = dx - x^3$ . Notons que la symétrie se retrouve dans le fait que la forme normale est invariante dans le changement de variables  $x \rightarrow -x$ .

L'évolution typique du portrait de phase est la suivante :



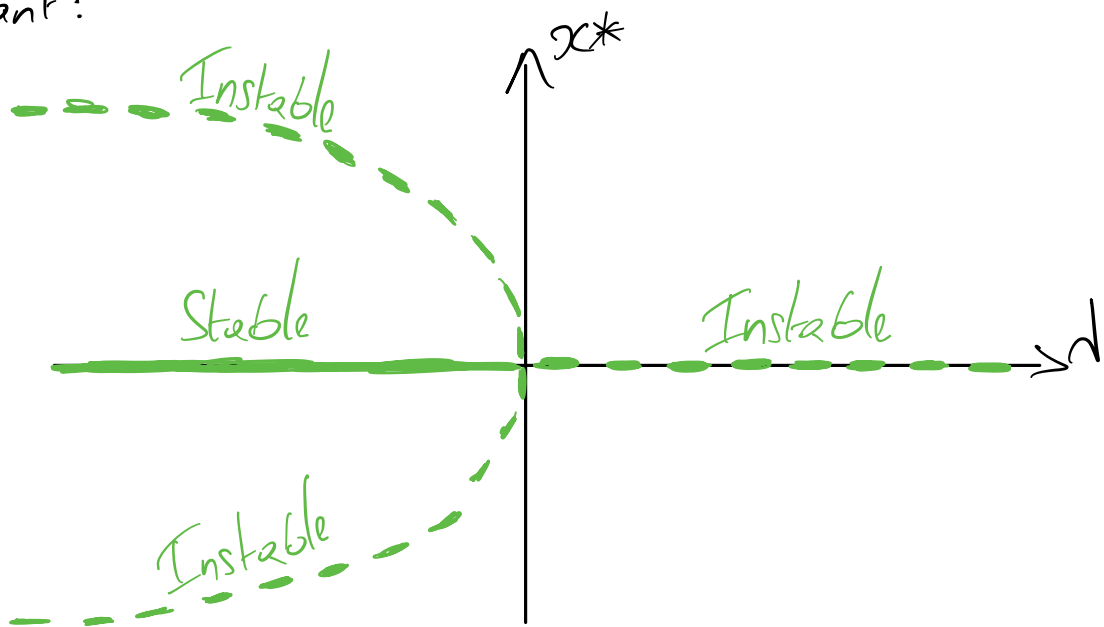
Le terme "bifurcation fourche" prend tout son sens lorsque l'on trace le diagramme de bifurcation. La branche d'équilibre  $x^* = 0$  est appelée la branche

d'équilibre triviale notamment car c'est une solution évidente du système dynamique.



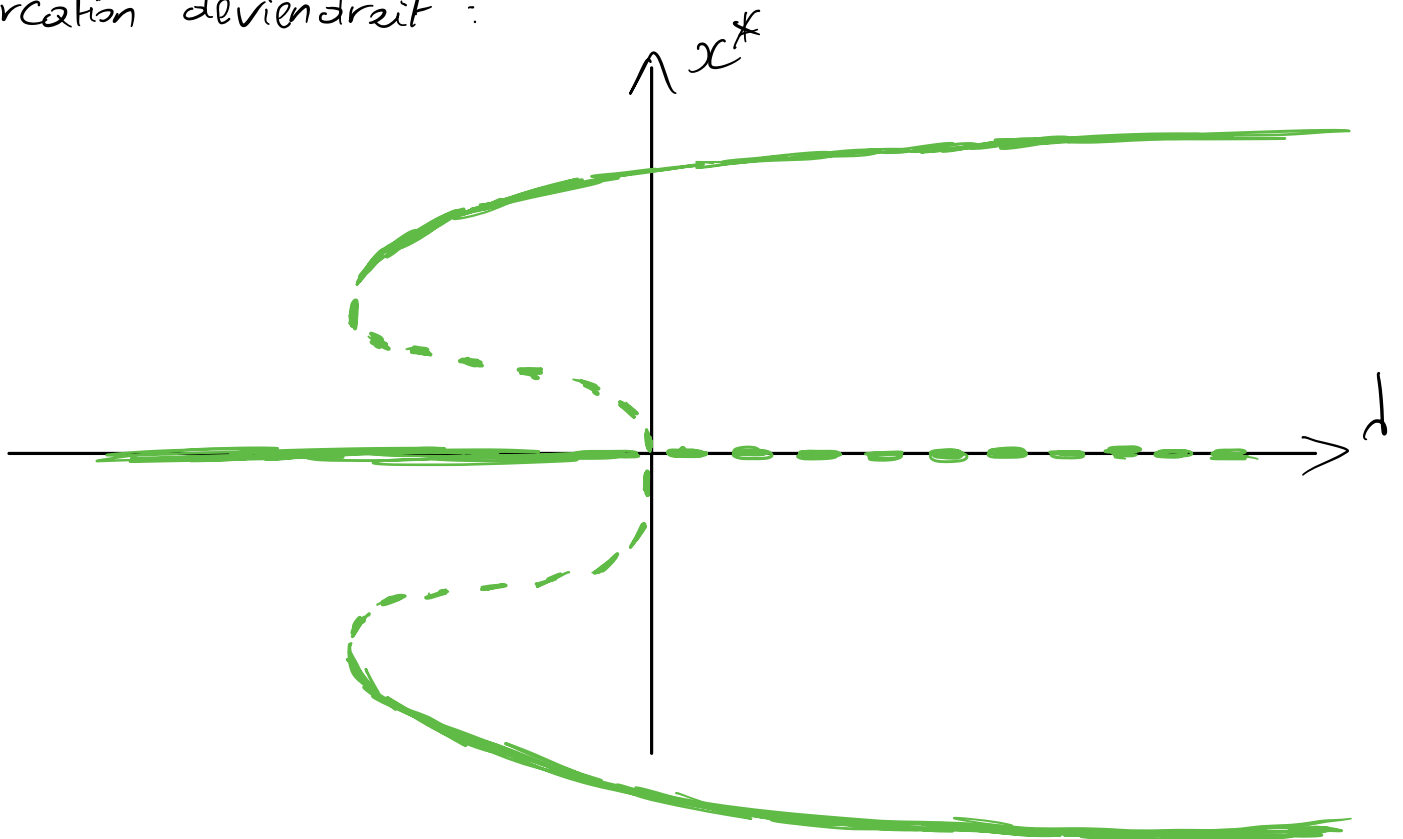
### Bifurcation fourche sous-critique:

Dans le cas super-critique  $\dot{x} = \lambda x - x^3$ , le terme cubique est dit stabilisant. Dans le cas opposé où  $\dot{x} = \lambda x + x^3$ , le terme cubique est déstabilisant et nous sommes en présence d'une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est le suivant:



Contrairement à la bifurcation super-critique, il n'y a tout d'un coup plus de position d'équilibre stable pour  $\lambda > 0$ , ce qui signifie que la variable d'état  $x(t)$  exploserait à l'infini !

Dans la vraie vie, il y aurait au moins un terme non linéaire stabilisant du type  $\dot{x} = dx + x^3 - x^5$  et le diagramme de bifurcation deviendrait :



Au dessus de  $d > 0$ , le branchement d'équilibre trivial  $x^* = 0$  devient instable mais contrairement à la bifurcation super-critique, le point fixe le plus stable est tout de suite très éloigné. En pratique, cela veut dire par exemple qu'une structure soudainement "sauterait" vers un autre équilibre. C'est le phénomène de claquage que l'on veut souvent éviter en mécanique des structures.