Chapitre 3 : Équilibres et stabilité

0. Introduction :

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les points fixes ou équilibres $\underline{X}(t) = \underline{X}^*$ sont des points particuliers de l'espace des phases qui structurent le portrait de phase des systèmes dynamique $\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}, \lambda)$.

En pratique, il peut être parfois compliqué d'obtenir les solutions $\underline{X}^*$ de $\underline{0} = \underline{f}(\underline{X}^*, \lambda)$ et leurs stabilités à partir de l'équation dynamique. Soit que certaines forces dynamiques soient inconnues, soit que ces équations sont trop fastidieuses à écrire.

On peut alors choisir de négliger les effets dynamiques en considérant le système aux temps longs (on néglige les aspects transitoires) ou bien en considérant des phénomènes quasi-statiques : si l'on applique par exemple une charge très lentement à une structure, on peut prédire ses configurations déformées comme une succession d'équilibres.

Dans cette hypothèse quasi-statique, on va voir que l'on peut trouver les équilibres d'un système mécanique et leur stabilité au sens de Lyapunov sans passer par les équations de mouvement dynamique, mais seulement par l'énergie potentielle du système.

I. Systèmes dynamiques mécaniques conservatifs :

Dans le cas où le système dynamique $\underline{\dot{X}} = \underline{f}(\underline{X}, t)$ autonome (c'est à dire $\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} = \underline{0}$) représente l'équation de mouvement d'un système mécanique conservatif, la forme du vecteur des variables d'états et du champ de vecteurs non linéaire $\underline{f}$ de dimension $2N$ peut être précisée.

En utilisant une formulation Hamiltonienne, on aura :

$$\underline{X} = \{q_1 \; q_2 \cdots q_N \; p_1 \; p_2 \cdots p_N\}^T$$

où les q_i et les p_i sont respectivement les coordonnées et les impulsions généralisées du système.
On rappelle que l'on a $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}$ avec $\mathcal{L} = E_c(\dot{q}_i) - E_p(q_i)$ le Lagrangien du système conservatif.

En posant $H(q_i, p_i) = E_c(p_i) + E_p(q_i)$ l'Hamiltonien du système qui doit être conservé ($\partial H / \partial t = 0$), les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme d'un système dynamique différentiel à l'ordre 1 $\underline{\dot{X}} = \underline{f}(\underline{X})$ avec

$$\underline{f}(\underline{X}) = \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_1} \; \frac{\partial H}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial H}{\partial p_N} \; -\frac{\partial H}{\partial q_1} \; -\frac{\partial H}{\partial q_2} \cdots -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right\}^T$$

En admettant que l'énergie cinétique ne dépende que des p_i et que l'énergie potentielle ne dépende que des q_i, on a même :

$$(*) \qquad \dot{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \partial Ec(p_i)/\partial p_1 \\ \partial Ec(p_i)/\partial p_2 \\ \vdots \\ \partial Ec(p_i)/\partial p_N \\ -\partial Ep(q_i)/\partial q_1 \\ -\partial Ep(q_i)/\partial q_2 \\ \vdots \\ -\partial Ep(q_i)/\partial q_N \end{pmatrix}$$

Pour peu que l'énergie cinétique se mette sous la forme classique $Ec(p_i) = \sum p_i^2/2m$, poser $\underline{f}(\underline{X}^*) = \underline{0}$ pour trouver les points fixes du système conduit simplement à dire d'une part que les impulsions généralisés d'un équilibre p_i^* sont nulle et surtout que

$$(\square) \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial Ep(q_i)/\partial q_1 \\ \partial Ep(q_i)/\partial q_2 \\ \vdots \\ \partial Ep(q_N)/\partial q_N \end{pmatrix}$$

Notamment, si les coordonnés généralisées coincident avec les coordonnés cartésiennes, les équilibres $\underline{r_\alpha}^*$ vérifient $\underline{\nabla}_{r_\alpha} Ep(\underline{r_\alpha}^*) = \underline{0}$.

La stabilité locale des points fixes $\underline{X}^* = \{q_1^* \; q_2^* \dots q_N^* \; 0 \; 0 \dots 0\}^T$ s'obtient en linéarisant le système dynamique $(*)$ autour de $\underline{X}^*$.

En posant $\underline{Y}(t) = \underline{X}(t) - \underline{X}^*$ le vecteur des perturbations autour de $\underline{X}^*$, on a vu au chapitre précédent que $\underline{Y}(t)$ vérifiait l'équation linéaire $\dot{\underline{Y}}(t) = [J]\,\underline{Y}(t)$ avec $\underline{Y}(0) = X(0) - \underline{X}^*$ et où $[J]$ est la matrice Jacobienne du système dynamique (*) en $\underline{X}^*$: $[J] = \left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{X}}\right|_{X^*}$.

Dans le cas particulier d'un système mécanique conservatif dont le système dynamique se met sous la forme (*) et où l'énergie cinétique se met sous la forme classique $Ec(p_i) = C \times p_i^2$, on a :

$$[J] = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 2C & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 2C & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 2C \\
-\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_1 \partial q_1} & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_1 \partial q_N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_2 \partial q_1} & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_2 \partial q_2} & & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_2 \partial q_N} & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
-\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_N \partial q_1} & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_N \partial q_2} & \cdots & -\dfrac{\partial Ep(q_i)}{\partial q_N \partial q_N} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

La sous-matrice surlignée en jaune n'est rien d'autre que l'opposé de la matrice Hessienne de l'énergie potentielle. En appliquant le théorème de Lyapunov sur les valeurs propres de $[J]$ et en tirant profit de la forme particulière de [J] dans les cas de systèmes mécaniques conservatifs, il vient que l'équilibre

$$\underline{X}^* = \{q_1^* \; q_2^* \cdots q_N^* \; 0 \; 0 \cdots 0\}^T$$

solution de (□) est stable au sens de Lyapunov si et seulement si la matrice Hessienne est définie positive (voir TD : une manière de voir si une matrice est définie positive est de vérifier que toutes ses valeurs propres sont positives).

Pour un système mécanique conservatif, il suffit donc de connaître la seule forme de son énergie potentielle $Ep(q_i)$ pour déterminer les équilibres et leurs stabilités locales ! Si l'on connaît l'évolution de $Ep(q_i, \lambda)$ en fonction d'un paramètre de contrôle λ, on pourra alors tracer les diagrammes de bifurcation de systèmes mécaniques conservatifs discrets.

Cependant, en ne prenant pas en compte le système dynamique complet (*), on ne saura pas quelle est la dynamique autour de ces équilibres. Comme les états d'équilibres stables sont les états qu'atteignent beaucoup de systèmes dynamiques aux temps longs, calculer ces seuls équilibres et leurs stabilités est déjà très bien.

Il existe une autre façon plus directe et plus générale d'écrire ce que l'on vient de montrer sur les équilibres et la stabilité des systèmes mécaniques conservatifs via le théorème de Lejeune-Dirichlet. L'avantage de cette approche générale est qu'elle se généralise simplement aux systèmes continus (l'énergie potentielle est alors une fonctionnelle qui dépend d'une fonction). De plus le théorème de Lejeune-Dirichlet est valable pour les systèmes dissipatifs.

II. Théorème de Lejeune-Dirichlet :

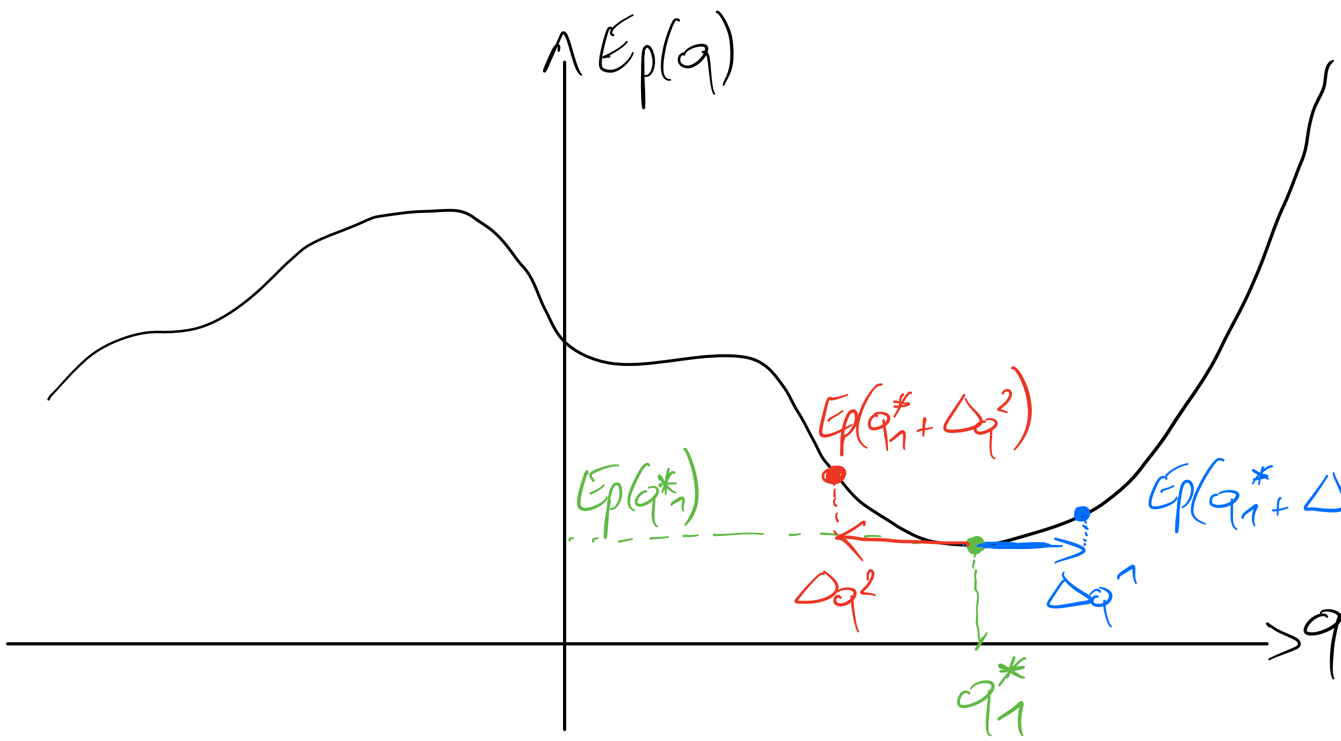
Les configurations d'équilibres stables sont les minima locaux (stricts) de l'énergie potentielle.

3.1 L'énergie potentielle est une fonction d'une variable $Ep(q)$:

Soit $Ep : q \in \mathbb{R} \longrightarrow Ep(q) \in \mathbb{R}$.

Un point q^* est dit un minimum local scrict de Ep ssi :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \Delta q < \varepsilon, \quad \Delta Ep(q^*, \Delta q) = Ep(q^* + \Delta q) - Ep(q^*) > 0$$



Dévellopement limité de l'incrément ΔEp :

$$\Delta Ep(q^*, \Delta q) = Ep'(q^*)\,\Delta q + Ep''(q^*)\,\frac{\Delta q^2}{2} + o(\Delta q^2) \qquad (\bigcirc)$$

Condition d'optimalité d'ordre 1 pour que q^* soit un minimum local :

$$(\times) \qquad Ep'(q^*) = 0 \qquad \text{(STATIONNARITÉ)}$$

Condition nécessaire d'ordre 2 :

$$(\square) \qquad Ep''(q^*) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad Ep'(q^*) = 0$$

Condition suffisante d'ordre 2 :

$$(\triangle) \qquad Ep''(q^*) > 0 \qquad \text{et} \qquad Ep'(q^*) = 0$$

Si $Ep''(q^*) = 0$, il faut regarder le signe des termes d'ordre supérieur pour conclure si q^* est un minimum local strict de $Ep(q)$.

3.2 L'énergie potentielle est une fonction de plusieurs variables $Ep(\underline{X})$:

Soit $Ep : \underline{X} \in \mathbb{R}^N \longrightarrow Ep(\underline{X}) \in \mathbb{R}$

Un point $\underline{X}^*$ est un minimum local (strict) de Ep si et seulement si

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall h < \varepsilon, \; Ep(\underline{X}^* + h\underline{\phi}) - Ep(\underline{X}^*) > 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$$

Dévellopement limité de l'incrément $\Delta Ep = Ep(\underline{X}^* + h\underline{\phi}) - Ep(\underline{X}^*)$ autour de $\underline{X}^*$:

$$\Delta Ep = h\,Ep'(\underline{X})(\underline{\phi}) + \frac{h^2}{2}\,Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) + o(h^2) \qquad (\bigcirc)$$

où $\underline{X} = \underline{X}^* + h\underline{\phi}$ est le vecteur perturbé infiniment proche de $\underline{X}^*$ (h est petit et $h \in \mathbb{R}$, $\underline{X} \in \mathbb{R}^N$, $\underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$).

Conditions d'optimalité d'ordre 1 pour que $\underline{X}^*$ soit un minimum local :

$$(*) \quad E_p'(\underline{X})(\underline{\phi}) = 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \quad \text{(STATIONNARITÉ)}$$

Par définition, $E_p'(\underline{X})(\underline{\phi}) = \frac{d}{dh} E_p(\underline{X}^* + h\underline{\phi})\Big|_{h \to 0}$ est le dérivée directionnelle de la fonction E_p en $\underline{X}^*$ dans la direction $\underline{\phi}$.

La dérivée directionnelle d'une fonction de plusieurs variables est lié au gradient de cette fonction. Si le vecteur $\underline{\phi}$ se décompose dans le repère cartésien sous la forme $\underline{\phi} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \underline{e_i}$, on a :

$$E_p'(\underline{X})(\underline{\phi}) = E_p'(\underline{X})\left(\sum_{i=1}^{N} \phi_i \underline{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} E_p'(\underline{X})(\underline{e_i})\, \phi_i$$

Et si on décompose $\underline{X}$ sous la forme $\underline{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i \underline{e_i}$, on trouve que la dérivée directionnelle de $E_p(\underline{X})$ dans les directions $\underline{e_i}$ s'identifie avec le dérivée partielle de $E_p(\underline{X})$: $E_p'(\underline{X})(\underline{e_i}) = \frac{\partial E_p(\underline{X})}{\partial X_i}$.

Donc au final :

$$E_p'(\underline{X})(\underline{\phi}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial E_p(\underline{X})}{\partial X_i} \phi_i = \underline{\nabla} E_p(\underline{X}) \cdot \underline{\phi}$$

Pour que $\underline{X}^*$ soit un minimum local strict, le condition d'optimalité d'ordre 1 devient

$$(*) \quad E_p'(\underline{X})(\underline{\phi}) = \underline{\nabla} E_p(\underline{X}) \cdot \underline{\phi} = 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N$$

Condition nécessaire d'ordre 2 :

$$(\square) \quad Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) \geq 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad Ep'(\underline{X})(\underline{\phi}) = 0$$

Condition suffisante d'ordre 2 :

$$(\triangle) \quad Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) > 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad Ep'(\underline{X})(\underline{\phi}) = 0$$

Par définition, $Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) = \frac{d^2}{dh^2} Ep(\underline{X}^* + h\underline{\phi})\Big|_{h \to 0}$ est la dérivée directionnelle seconde de la fonction Ep en $\underline{X}^*$ dans la direction $\underline{\phi}$.

Comme dans le cas de la dérivée directionnelle première, on peut relier la dérivée directionnelle seconde à un opérateur, la matrice hessienne :

$$Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) = \left(Ep'(\underline{X})(\underline{\phi})\right)'(\underline{\phi}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 Ep(\underline{X})}{\partial X_i \partial X_j} \phi_i \phi_j = H(\underline{X})\, \underline{\phi} \cdot \underline{\phi}$$

La matrice hessienne H est la matrice ayant pour composantes les dérivées secondes :

$$H_{ij}(\underline{X}) = \frac{\partial^2 Ep(\underline{X})}{\partial X_i \partial X_j}$$

La condition nécessaire d'ordre 2 devient alors :

$$Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) \geq 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \iff H(\underline{X}) \text{ est semi-définie positive}$$

Pour la condition suffisante d'optimalité d'ordre 2 :

$$Ep''(\underline{X})(\underline{\phi}) > 0 \quad \forall \underline{\phi} \in \mathbb{R}^N \iff H(\underline{X}) \text{ est définie positive}$$

On retrouve le résultat que l'on avait aperçu en section I lorque l'on avait écrit le Jacobien autour de l'équilibre du système dynamique linéaire modèle d'un système mécanique conservatif discret.

Critère des valeurs propres :

Soit $\mu_1, \dots, \mu_N$ les valeurs propres de H, solution de $\det(H - \mu I) = 0$.

$$H \text{ définie positive} \iff \mu_i > 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$$H \text{ semi-définie positive} \iff \mu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N$$

H étant symétrique, elle admet N valeurs propres réelles.

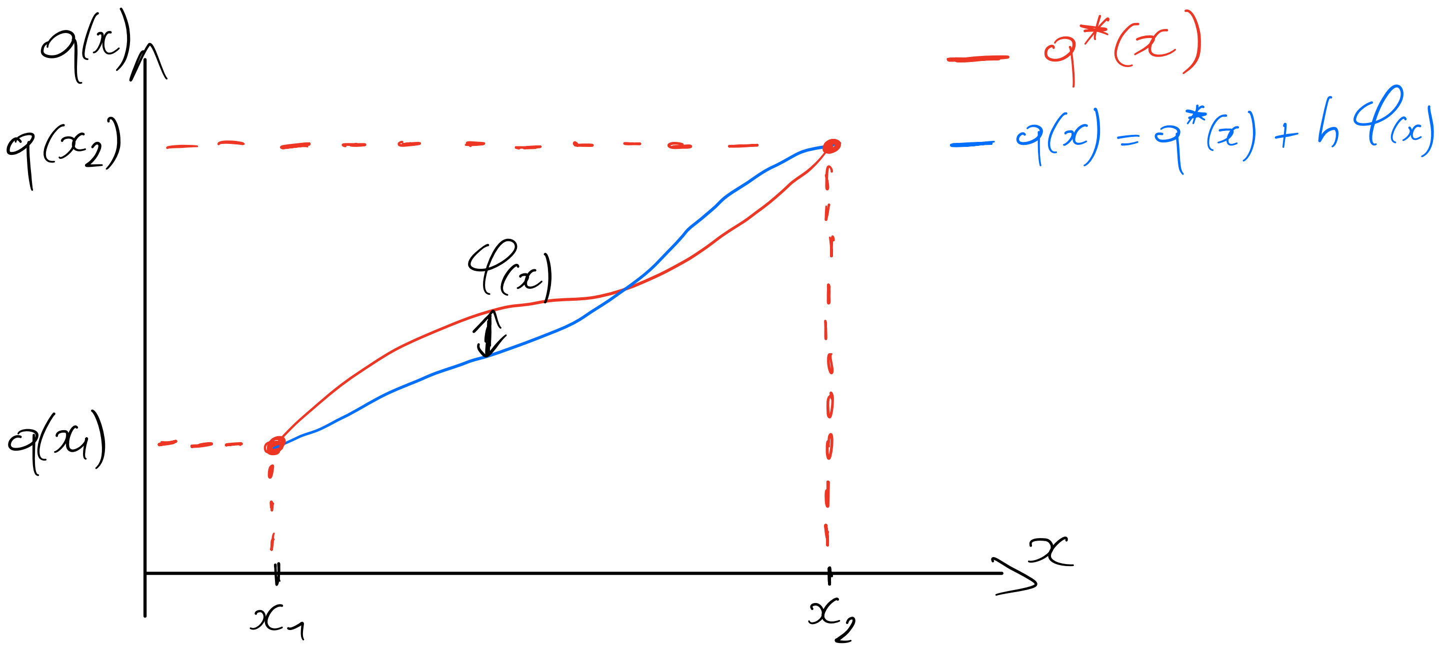
3.3 L'énergie potentielle est une fonctionnelle d'une fonction $Ep(q(x))$:

Une fonctionnelle est une fonction de fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ (voir chapitre 1 et le principe de moindre action où l'on a traité une fonctionnelle S dépendante de plusieurs fonctions $q_i(t)$).

Soit deux fonctions $q(x)$ entre $q(x_1)$ et $q(x_2)$:

- $q^*(x)$ est un minimum local strict de Ep.
- $q(x) = q^*(x) + h\,\varphi(x)$ est une fonction perturbée infiniment

proche avec $h \in \mathbb{R}$ un petit paramètre.



Les fonctions $q^*(x)$ et $q(x)$ doivent être admissibles, c-a-d vérifier les conditions aux limites :

$$q^*(x_1) = q(x_1) = a \quad \text{et} \quad q^*(x_2) = q(x_2) = b \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$$

On dit que les variations $\varphi(x)$, elles, sont admissibles à zéro.
Autrement dit, $\varphi(x) \in \mathcal{E}_a^0$ avec $\mathcal{E}_a^0 = \{f(x) \text{ réguliers et } f(x_1) = f(x_2) = 0\}$.
Et $q^*(x), q(x) \in \mathcal{E}_a$ avec $\mathcal{E}_a = \{g(x) \text{ réguliers, } g(x_1) = a \text{ et } g(x_2) = b\}$.

Le théorème de Lejeune-Dirichlet s'écrit alors :

Soit $E_p : q(x) \longrightarrow E_p(q(x)) \in \mathbb{R}$
Une fonction $q^*(x)$ est un minimum local strict de E_p ssi :

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad E_p(q^* + h\varphi) - E_p(q^*) > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_a^0 \text{ et } \forall h < \varepsilon.$$

Dévellopement limité de l'incrément $\Delta E_p = E_p(q^* + h\varphi) - E_p(q^*)$ autour de q^* :

$$\Delta E_p = h\, E_p'(q(x))(\varphi(x)) + \frac{h^2}{2} E_p''(q(x))(\varphi(x)) + o(h^2) \qquad (\circ)$$

où $E_p'(q(x))(\varphi(x))$ et $E_p''(q(x))(\varphi(x))$ sont respectivement les dérivées directionnelles premières et secondes de $E_p(q(x))$ dans la direction $\varphi(x))$ que l'on doit évaluer en $q^*(x)$.

Conditions d'optimalité d'ordre 1 :

$q(x)$ est un minimiseur de E_p si et seulement si :

$$(\times) \qquad E_p'(q(x))(\varphi(x)) = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{C}_a^0$$

Condition nécessaire d'ordre 2 :

$(\square) \qquad E_p''(q(x))(\varphi(x)) \geq 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{C}_a^0$ et C.O.1 vérifiée

Condition suffisante d'ordre 2 :

$(\Delta) \qquad E_p''(q(x))(\varphi(x)) > 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{C}_a^0$ et C.O.1 vérifiée

Le calcul des dérivées directionnelles de fonctionnelles a déjà été traité dans le chapitre 1 lors du principe de moindre action. Nous ne reviendrons pas en détail sur leur calcul qui sera abordé plus précisément en TD. Nous redonnerons juste ici la recette pour réussir sa dérivée directionnelle :

Dérivée directionnelle première $Ep'(q(x))(\varphi(x))$ en $q^*(x)$:

On pose la fonction perturbée $q(x) = q^*(x) + h\,\varphi(x)$

1. Écrire $Ep(q(x)) = Ep(q^*(x) + h\,\varphi(x))$
2. Calculer $\dfrac{dEp(q^*(x) + h\,\varphi(x))}{dh}$
3. Évaluer pour $h \to 0$, c'est à dire quand $q(x) \to q^*(x)$

Dérivée directionnelle seconde $Ep''(q(x))(\varphi(x))$ en $q^*(x)$:

On fait la dérivée directionnelle première points 1 et 2. Puis

3. Calculer $\dfrac{d}{dh}\left(\dfrac{dEp(q^*(x) + h\,\varphi(x))}{dh}\right)$
4. Evaluer pour $h \to 0$, c'est-à-dire quand $q(x) \to q^*(x)$

THE END