

# Master MS2 - 5AG10 Pratique des codes de calcul : TP Cast3M

Examen 26 Novembre 2018

## Exercice 1 : Thermo-élasticité linéarisée

On considère le cas test de la figure 1a). Deux barreaux thermo-élastiques de module d'Young  $E = 1$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.45$  et dilatation thermique  $\alpha = 12 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , de longueur  $L = 1$  m et de largeur  $h = 20$  cm sont orientés perpendiculairement et séparés par un jeu de 1 cm. Le solide  $\Omega_1$  a une conductivité thermique  $k_1 = 60 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  alors que le solide  $\Omega_2$  a une conductivité thermique  $k_2 = 80 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Les deux domaines sont encastrés sur L1 et L2. Les deux barreaux sont à l'équilibre thermo-élastique à la température initiale  $T_0$  de 20 degrés. Le barreau  $\Omega_2$  est alors chauffé au niveau de l'encastrement L2 à une température  $T_{imp}$  alors que la ligne Lh est maintenue à la température initiale  $T_0$ . Le barreau  $\Omega_1$  n'est pas chauffé et reste à la température initiale  $T_0$  partout. Sous l'action du gradient thermique, le solide  $\Omega_2$  va se dilater et réduire le jeu jusqu'à éventuellement entrer en contact avec le solide  $\Omega_1$ . On se demande à quel seuil de température imposée  $T_{imp}$  les deux barreaux commencent à entrer en contact, et de quelle façon. On considèrera le problème en déformation plane et que les déformations thermo-mécaniques sont petites de sorte que l'on peut résoudre ce problème avec un modèle de thermo-élasticité linéarisé.

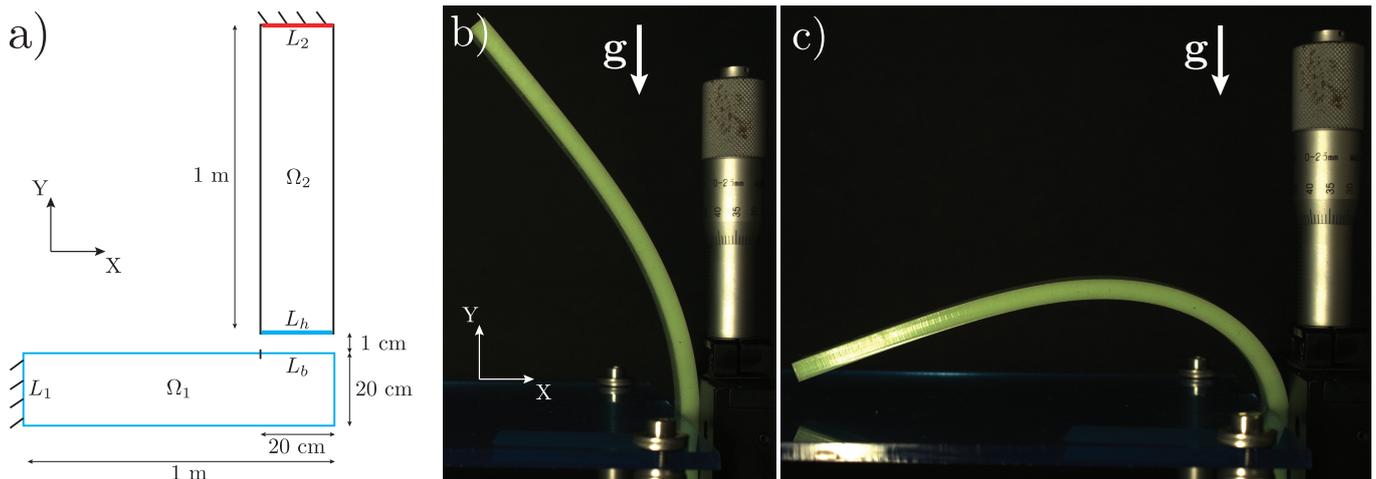


FIGURE 1 – Deux problèmes de mécanique à modéliser sous Castem. a) Cas test d'un calcul de thermo-élasticité linéarisée. b)-c) Photographies d'une expérience de ruban élastique pesant. Sous l'effet du poids propre, le ruban peut se déstabiliser et fléchir (figure b)) jusqu'à éventuellement toucher le sol (figure c)).

1. Tracer les maillages  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .
2. Résoudre le problème de thermique linéaire stationnaire et afficher les isovaleurs d'accroissement de températures,  $\Delta_T(x) = T(x) - T_0$  sur les maillages  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On prendra  $T_{imp} = 200$  degrés.
3. Tracer les "forces d'origine thermique" associées aux sollicitations thermiques sur les deux maillages. Que peut-on dire de ces "forces" sur le barreau  $\Omega_1$  qui ne se dilate pas ?
4. Dessiner la valeur de l'accroissement de températures le long de la frontière droite du barreau  $\Omega_2$ .
5. Résoudre le problème de thermo-élasticité linéarisé et tracer sur un même écran la configuration déformée des solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec les isovaleurs d'accroissement de températures.
6. Tracer sur un même écran la configuration déformée des solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec les isovaleurs de contraintes de Von Mises.
7. Représenter les efforts de réactions éventuels sur les lignes Lh et Lb des maillages déformés.

8. Les solides sont-ils en contact? Et si oui, de quelle manière?
9. En faisant varier la température imposée  $T_{imp}$  en L2, dites pour quelle valeur seuil de  $T_{imp}$  les deux barreaux entrent en contact? On cherchera autour de  $T_{imp} = 120$  degrés (on pourra faire une boucle si on le souhaite sachant qu'il ne faut pas non plus perdre trop de temps).
10. Commentez sur les limites de la modélisation linéaire en petites perturbations de ce problème de contact?

### Exercice 2 : Vérification des formules d'équilibre d'un ruban élastique pesant

On considère le problème de mesure expérimentale du module d'Young d'un ruban élastique pesant dont deux configurations sont représentées figure 1b) et c). Le ruban élastique est une poutre d'épaisseur  $h = 5$  mm et de largeur  $b = 20$  mm. Son matériau constituant est un silicone qui a un coefficient de Poisson et un module d'Young théorique fournis par le fabricant valant respectivement  $\nu = 0.45$  et  $E_{th} = 1.363$  MPa. Sa masse volumique mesurée est  $\rho = 1156.6$  kg/m<sup>3</sup>. Le but de l'expérience décrite sur les figures 1b) et c) est de mesurer le module d'Young  $E_{exp}$  de cette structure pour vérifier la validité du module théorique fournit  $E_{th}$ . Pour cela, une expérience simple consiste à encaster le ruban à sa base et le tenir verticalement. En fonction de la longueur  $L$  du poteau encasté, cette structure peut rester verticale ou éventuellement fléchir sous son propre poids comme sur les figures 1b) et c). Théoriquement, il existe un nombre sans dimension  $\Gamma$  qui modélise la compétition entre poids propre et flexion dans cette structure qui s'écrit

$$\Gamma = \frac{\rho g S L^3}{EI} \quad (1)$$

où  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup> est l'accélération de la pesanteur,  $S = b \times h$  est la section du ruban et  $I = bh^3/12$  est son moment quadratique. Sous l'effet de la gravité, deux valeurs particulières de  $\Gamma$  ont été trouvées dans la littérature scientifique. Il existe une longueur critique  $L = L_b$ , dite de flambage, pour laquelle la configuration du poteau verticale devient instable, qui apparaît pour  $\Gamma = \Gamma_b = 7.8373$ . Une autre longueur caractéristique notée  $L = L_{nl}$  que l'on trouve en posant  $\Gamma = \Gamma_{nl} = 13.6$  correspond à la configuration où l'altitude de l'extrémité libre de la tige est la même que celle de la base encastée (voir figure 1.c)). Avec Castem, vous allez vérifier numériquement la formule Eq. (1) pour pouvoir être sûr de l'utiliser. Pour cela, on modélisera notre ruban par une poutre élastique encadrée-libre, dans le plan (le ruban étant assez large, c'est une hypothèse raisonnable). On réalisera des calculs de flambage de la poutre sous poids propre et un calcul non linéaire géométrique de poutre élastique. Dans toute la suite, on prendra un module d'Young  $E = E_{th}$  qui est le module d'Young théorique fournis par le fabricant.

### Analyse vibratoire linéaire de la poutre encadrée-libre

11. Sans prendre en compte le poids propre dans un premier temps, résoudre le problème de vibrations libres de la poutre encadrée libre en choisissant une longueur  $L = 10$  cm (on choisira cette longueur dans la suite). Afficher les 3 premiers modes de vibrations ainsi que leurs fréquences propres associées.
12. Réaliser le calcul linéaire de la poutre sous poids propre. Dessiner l'évolution de l'effort normal dans la poutre. Commenter.
13. Idem que la question 11. mais en calculant les vibrations linéaires de la poutre sous poids propre. Que remarquez vous?
14. En faisant varier la longueur  $L$  de la poutre, dessiner l'évolution de la première fréquence propre de vibration de la poutre sous poids propre en fonction de  $L$ . On pourra faire varier  $L$  de 10 à 16 cm avec un pas de 0.5 mm.
15. Comparer la valeur numérique de longueur critique de flambage trouvée à la question précédente avec la longueur critique  $L_b$  obtenue par la formule analytique de l'équation (1). Qu'en pensez vous?

### Calcul de déflexion non linéaire

16. On veut maintenant vérifier la formule (1) une nouvelle fois, mais cette fois dans le régime non-linéaire géométrique. Calculer à l'aide de la formule (1) la longueur théorique  $L = L_{nl}$  pour laquelle l'extrémité libre du ruban encastré-libre devrait toucher le sol.
17. Pour cette longueur  $L = L_{nl}$ , calculer sous cast3m la première déformée modale de flambage, appelée *TOTO*, de la tige encastrée-libre sous poids propre. Tracer ce premier mode ainsi que la poutre non déformée sur un même graphe.
18. Calculer la configuration non linéaire déformée sous poids propre pour  $L = L_{nl}$  à l'aide de la procédure PASAPAS. Pour aider le solveur de Newton-Raphson à converger vers la solution non linéaire, on déplacera préalablement le maillage *MESH* de la poutre droite grâce à la commande :

```
DEPL MESH PLUS (0.01*TOTO);
```

On incrémentera l'application du poids propre de manière linéaire avec beaucoup de petit pas (par exemple 500 pas entre  $g = 0\text{m.s}^{-2}$  et  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ ).

19. Tracer sur un même écran la configuration non déformée et la configuration non linéaire déformée pour  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ . Commenter ce résultat numérique par rapport à la déformée expérimentale de la figure 1.c).
20. Dessiner l'évolution de l'altitude UY de l'extrémité libre du ruban en fonction du poids propre imposé pas à pas de  $g = 0\text{m.s}^{-2}$  jusqu'à  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ . Que pouvez-vous dire sur l'allure de cette courbe? L'altitude de l'extrémité du ruban est-elle au niveau du sol comme prévue par la théorie de l'équation (1) pour  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$ ?
21. Quel aurait été ce même déplacement UY pour  $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$  dans le cas d'un calcul linéaire? Commenter.
22. Expérimentalement, on trouve une longueur  $L = L_{nl} = 0.146$  m. En déduire le module d'Young  $E_{exp}$  mesuré par la formule (1). Comparer ce résultat par rapport au module d'Young  $E_{th}$  annoncé par le fabricant. Commenter.