

# LU3ME111 - Structures en pratique

---

## Travaux pratiques d'Elasticité

---



Responsables de l'UE :

Arnaud LAZARUS  
Victor ROMERO

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Caractérisation d'un matériau</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Essai de traction uniaxiale</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Matériel et protocole . . . . .	3
1.3	Analyse des résultats . . . . .	4
1.4	Prise en compte des incertitudes . . . . .	5
1.5	Conclusion . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Déflexion quasi-statique</b>	<b>6</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Matériel et protocole . . . . .	7
2.3	Analyse des résultats . . . . .	8
2.4	Prise en compte des incertitudes . . . . .	9
2.5	Conclusion . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Vibrations libres linéaires</b>	<b>10</b>
3.1	Introduction . . . . .	10
3.2	Matériel et protocole . . . . .	11
3.3	Conclusion . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Bilan de la première partie</b>	<b>12</b>
<b>II</b>	<b>Dimensionnement des structures</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Flambage de poutres</b>	<b>13</b>
5.1	Introduction . . . . .	13
5.2	Matériel et protocole . . . . .	14
5.3	Analyse des résultats . . . . .	15
5.4	Prise en compte des incertitudes . . . . .	16
5.5	Dimensionnement d'une baie vitrée . . . . .	16
5.6	Conclusion . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Le contact de Hertz</b>	<b>17</b>
6.1	Introduction . . . . .	17
6.2	Matériel et protocole . . . . .	18
6.3	Analyse des résultats . . . . .	19
6.4	Prise en compte des incertitudes . . . . .	20
6.5	Dimensionnement des billes d'un skateboard . . . . .	20
6.6	Conclusion . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Bilan de la seconde partie</b>	<b>21</b>

## Introduction et objectifs de l'UE

Alors que la résistance des structures et des matériaux fait partie intégrante de notre vie courante, elle est restée pendant des siècles inconnue. Essayer de comprendre les catastrophes telles que l'effondrement d'un bâtiment, le flambage des poutres ou encore la vibrations des structures était le quotidien des grands savants des siècles précédents. En commençant par le "Ut tensio sic vis" ou telle extension, telle force de Robert Hooke, puis les expériences d'autres scientifiques célèbres tels que Thomas Young, James Bernoulli, Leonhard Euler, Jean Le Rond D'Alembert, Joseph Louis Lagrange, Augustin Louis Cauchy, Siméon Denis Poisson, les derniers siècles ont été marqués par des découvertes, mesures et expériences.

L'élasticité est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. Tout matériau est élastique dans un domaine de déformation plus ou moins grand. Ce domaine correspond à la zone de déformation élastique, la déformation y est réversible. Le matériau pourra donc retrouver son état initial. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. A partir d'une valeur de déformation critique, appelée " limite d'élasticité", le matériau subit des déformations permanentes, elles deviennent donc plastiques. C'est l'élasticité non linéaire.

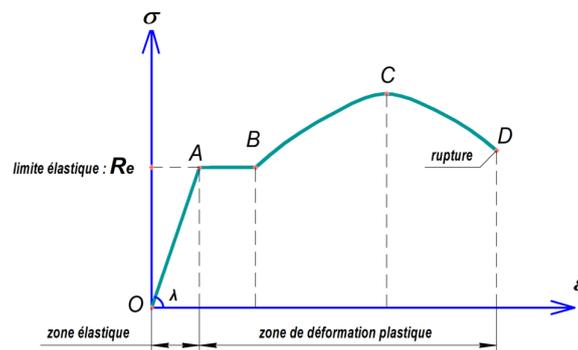


FIGURE 1 – Courbe de traction séparant les zone élastique et plastique

Chaque matériau possède des propriétés qui lui sont spécifiques (Module d'Young, module de cisaillement, coefficient de Poisson etc.) Ces propriétés sont utiles pour déterminer le comportement du matériau sous l'effet de sollicitations. Afin de pouvoir dimensionner une structure, il est nécessaire de déterminer le comportement de celle-ci sous l'effet des différentes sollicitations (traction, compression, flexion, torsion) ou encore d'instabilité comme le flambage. Ce comportement sera donné à partir des propriétés du matériau.

Les travaux expérimentaux sont divisés en deux parties. Durant les trois premières séances, nous avons caractérisé différents matériaux par leur modules d'Young. Celui-ci a été déterminé par des essais de traction et une déflexion quasi-statique. Les modules d'Young trouvés permettront ensuite de dimensionner une baie vitrée afin d'éviter le flambage sous son propre poids et de dimensionner des roulements à billes d'un skateboard supportant une charge maximale.

On associera à nos poutres différentes couleurs comme ci-dessous.



FIGURE 2 – De haut en bas : Rose fin ; Bleu ; Vert ; Rose épais

## Première partie

# Caractérisation d'un matériau

## 1 Essai de traction uniaxiale

### 1.1 Introduction

Cette première expérience a pour but de déterminer le module d'Young d'éprouvettes en Vinylpolysiloxane de géométrie différentes en faisant un essai de traction uniaxiale. Cela se réalise en appliquant une contrainte  $\sigma$  et en mesurant une déformation  $\epsilon$ . Ces deux grandeurs sont reliées par une loi de comportement, la loi de Hooke :

$$\sigma = E\epsilon$$

$\sigma$  : Contrainte en Pa

$\epsilon$  : Déformation [ ]

E : Module d'Young en Pa



FIGURE 3 – Essai de traction uniaxiale de l'éprouvette rose fine

## 1.2 Matériel et protocole

Matériel à disposition :

- Trois éprouvettes de traction de module d'Young différents
- Un kit de différentes masses
- Réglet
- Statif
- Noix de serrage
- Etau de serrage
- Appareil photo
- Trépied
- Pied à coulisse
- Logiciel ImageJ

Protocole :

Le dispositif expérimental en place nous a permis de mesurer un allongement  $L - L_0$  en accrochant différentes masses aux éprouvettes. De cette expérience, nous avons pu déterminer les déformations  $\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$  associées aux contraintes appliquées  $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{bh}$

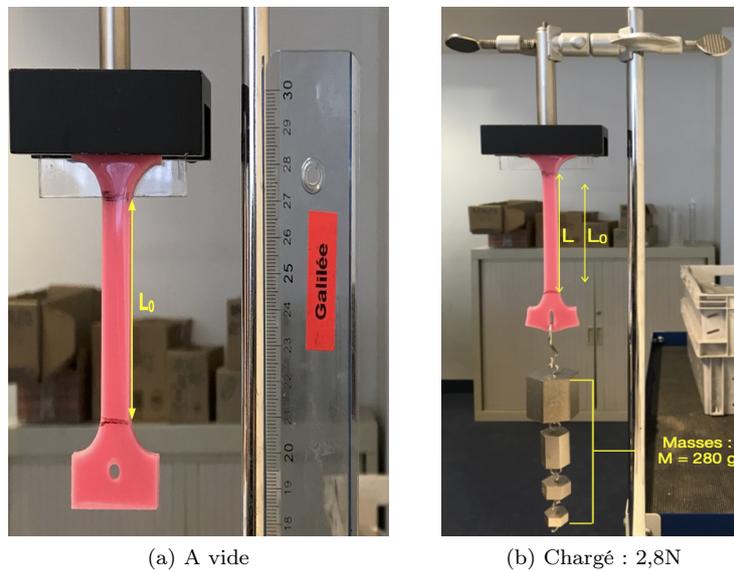
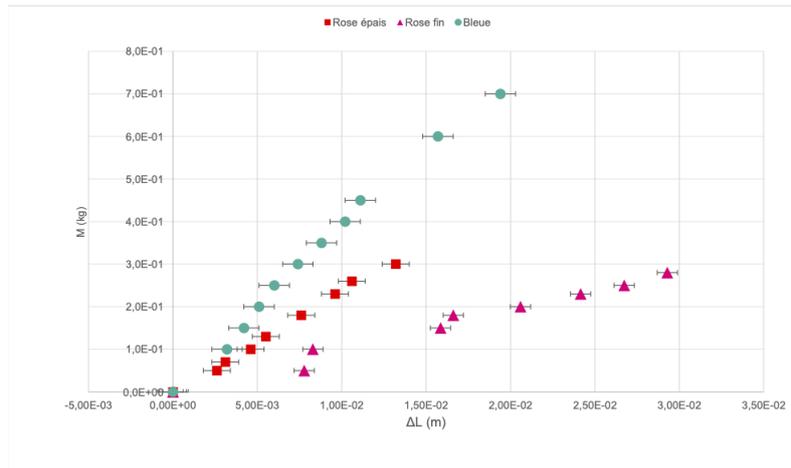


FIGURE 4 – Expérience réalisée avec l'éprouvette rose fine

## 1.3 Analyse des résultats



(a) Données brutes - ImageJ

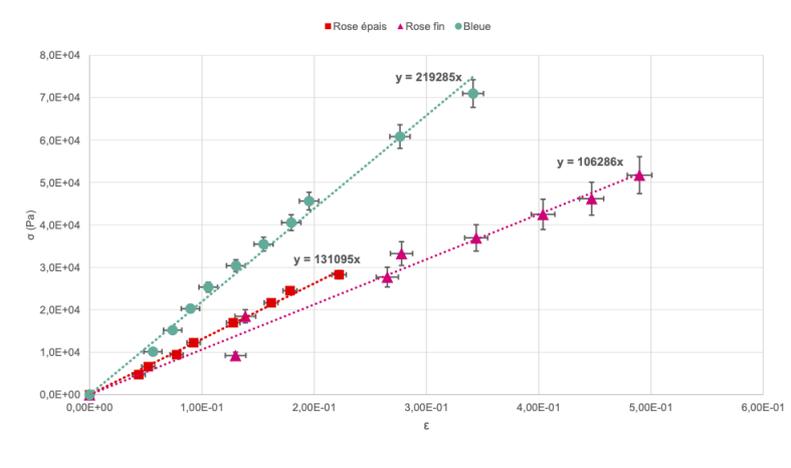
(b)  $\sigma = f(\varepsilon)$  - ImageJ

FIGURE 5 – Données obtenues pour les trois éprouvettes à l'aide du logiciel ImageJ

Avec ImageJ, on trouve les modules d'Young suivants :

$$\begin{aligned} E_{\text{rose fin}} &= 106 \pm 9 \text{ kPa} \\ E_{\text{rose epais}} &= 131 \pm 8 \text{ kPa} \\ E_{\text{bleu}} &= 219 \pm 17 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Les valeurs de module d'Young sont obtenues par la pente de la courbe  $\sigma = f\varepsilon$  et elles semblent cohérentes. En effet, les éprouvettes roses semblaient moins rigides que les éprouvettes bleues et vertes. Toutefois, il est utile de préciser que la valeur à l'origine des trois éprouvettes ont été forcées lors de la regression linéaire car la valeur  $(0; 0)$  est une valeur sûre. Nous savons qu'à charge et contrainte nulle, le système ne subit aucun allongement et aucune déformation. A noter aussi que l'expérience a également été réalisée avec un pied à coulisse. (*Voir graphiques en annexe*).

On trouve donc les modules d'Young suivants : A noter que la poutre rose fine et rose épaisse ont le même module d'Young théoriquement.

$$\begin{aligned} E_{\text{rose fin}} &= 117 \pm 5 \text{ kPa} \\ E_{\text{rose epais}} &= 130 \pm 9 \text{ kPa} \\ E_{\text{bleu}} &= 208 \pm 9 \text{ kPa} \end{aligned}$$

## 1.4 Prise en compte des incertitudes

Bien que les valeurs obtenues soient cohérentes, il est indispensable de noter que les manipulations effectuées sont sources d'incertitudes. L'expérimentateur peut minimiser les incertitudes mais ne peut pas obtenir une valeur exacte de  $E$ . Parmi les différentes sources d'incertitudes, nous pouvons citer les incertitudes liées aux moyens, à la matière, à la main d'oeuvre et enfin aux méthodes.

### 1. Moyen

- Pour effectuer la mesure directe de la déformation, nous utilisons un pied à coulisse ayant une précision de 0,05 mm. La lecture des mesures engendrent une erreur.
- La mesure indirecte via `ImageJ` est aussi source d'erreur. La règle choisie pour avoir une échelle sur `ImageJ` a une précision de 0,1 mm, soit le double de celle du pied à coulisse. Cela peut avoir une influence sur la mesure des pixels sur `ImageJ`. Cette incertitude se propage lors du calcul de l'allongement via `ImageJ`.
- Les noix de serrage et l'étau de serrage utilisés peuvent aussi conduire à des erreurs. En effet, l'éprouvette ne pouvait pas être correctement encastrée, au risque de la déformer.

### 2. Matière :

- Certaines poutres pouvaient présenter des défauts, en étant non-homogènes par exemple ou en ayant été très sollicitées auparavant. Cela rendait les expériences plus difficiles et pouvait propager les erreurs de mesures.

### 3. Main d'oeuvre :

- Le lecteur multiplie les incertitudes en lisant les mesures pour la méthode directe (Pied à coulisse) ou en cliquant sur l'image pour la méthode indirecte (`ImageJ`).
- La mesure de  $L$  et de  $L_0$  doit être faite lorsque les bords de l'éprouvette sont verticaux. Or, le haut de l'éprouvette est arrondi car il s'agit d'une poutre en I. Il faut donc veiller à ce que la référence tracée se trouve exactement à l'endroit où les bords de l'éprouvette sont verticaux.

### 4. Méthode :

- La mesure de la base  $b$  et de la hauteur  $h$  avec le pied à coulisse doit être faite de manière délicate. En effet, le matériau étant très élastique, nous risquons de compresser la section en la mesurant. Ce qui fausse les mesures de la section.
- La qualité des images dépend de la qualité de l'appareil photo, particulièrement du nombre de pixels. Ainsi, avec un meilleur appareil photo, on limite les erreurs. La verticalité des images rentre aussi en jeu. La perspective rentre aussi en jeu. En effet, si l'image contient de la perspective, nous risquons de mesurer des longueurs plus grandes sur `ImageJ`.

## 1.5 Conclusion

La loi de comportement des matériaux élastique linéaire ( $\sigma = E \epsilon$ ), nous a permis de déterminer le module d'Young de trois éprouvettes en Vynilpolysiloxane de géométrie différentes. Ce paramètre caractérise la rigidité du matériau et nous permet de comparer les rigidités des différentes éprouvettes entre elles. L'éprouvette la plus rigide est donc l'éprouvette verte, suivie de l'éprouvette rose épaisse et enfin l'éprouvette rose fine.

Toutefois, des incertitudes liées aux expériences viennent s'ajouter. Nous avons pu confirmer nos données à l'aide des données d'autres expérimentateurs (binôme miroir). D'autres méthodes de mesure de déformation existent, notamment celle des jauges de déformation. Elles permettent de mesurer la déformation d'une pièce en variation de résistance électrique.

Nous avons aussi vérifié le caractère élastique du matériau en observant la réversibilité. Lors de la décharge complète, nous avons pu constater que le matériau revenait à son état initial et nous retrouvons la longueur  $L_0$  de départ. Cela confirme que nos essais de traction étaient réalisés dans le domaine linéaire.

Nous avons également pu observer l'hyperélasticité de l'éprouvette rose fine. En mettant une charge assez importante ( $\simeq 2,8 \text{ N}$  ou  $\simeq 5.10^4 \text{ Pa}$ ), nous nous rapprochons de la rupture. Le matériau suit donc la courbe de traction (*Voir Figure 1.1*)

## 2 Déflexion quasi-statique

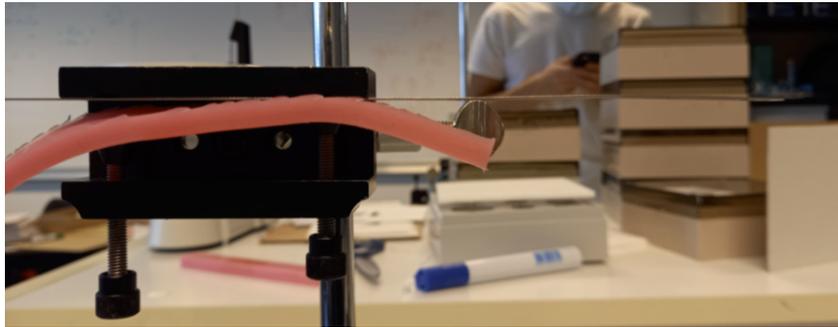
### 2.1 Introduction

Cette expérience a pour objectif de déterminer le module d'Young d'éprouvettes en Vinylpolysiloxane de géométrie différentes en faisant une déflexion quasi-statique. Elle se réalise en encastrant une partie de la poutre et en laissant libre l'autre partie, de manière à ce que la poutre soit horizontale et fléchit sous son propre poids. En utilisant le modèle de poutre Euler-Bernouilli, la loi de comportement élasticité linéaire et cinématique linéarisée ainsi que les conditions aux limites, nous pouvons déterminer le modèle de déflexion linéaire :

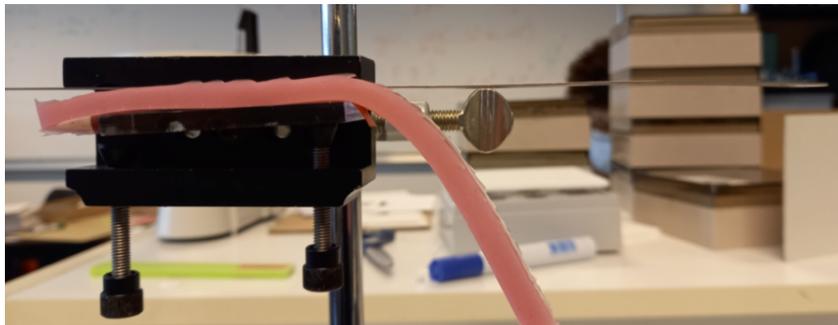
$$y(L) = \frac{-\omega L^4}{8EI}$$

On peut alors déterminer une loi de comportement effective :  $\sigma_{effectif} = E \varepsilon_{effectif}$

avec  $\sigma_{effectif} = \left| \frac{-\omega L^3}{8 I} \right|$        $\varepsilon_{effectif} = \frac{y(L)}{L}$



(a)  $L = ; y(L) =$



(b)  $L = ; y(L) =$

FIGURE 6 – Expérience réalisée avec la poutre rose fine

## 2.2 Matériel et protocole

Matériel à disposition :

- Trois poutres de module d'Young différents
- Réglét
- Balance
- Statif
- Noix de serrage
- Etau de serrage
- Appareil photo
- Trépied
- Pied à coulisse
- Logiciel ImageJ

Protocole :

Dans cette expérience, nous devons encastrier plusieurs poutres de modules d'Young différents et laisser une partie libre. En diminuant la longueur encastree, nous pouvons observer la déflexion de la poutre. Nous pouvons alors mesurer la flèche  $y(L)$  en fonction de la longueur libre  $L$ . Cela nous permet de déterminer le module d'Young des différentes poutres en utilisant la loi de comportement effective donnée ci-dessus. :

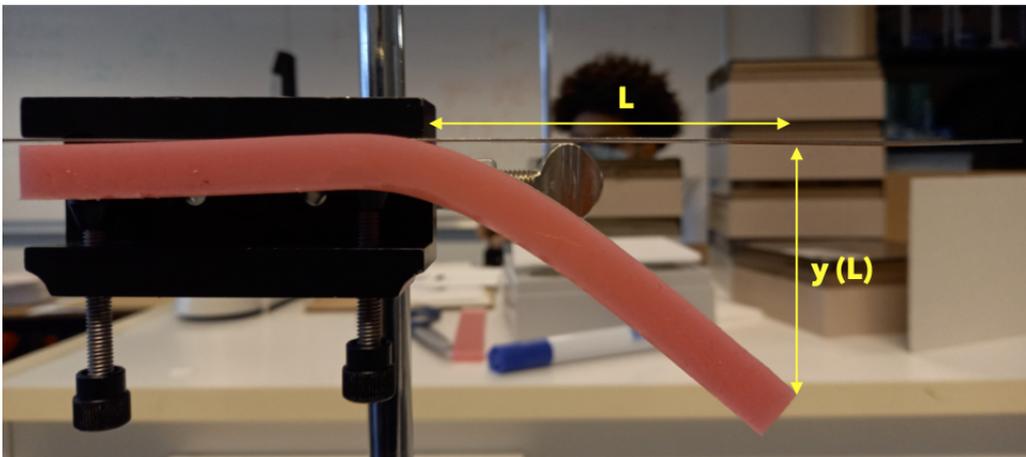
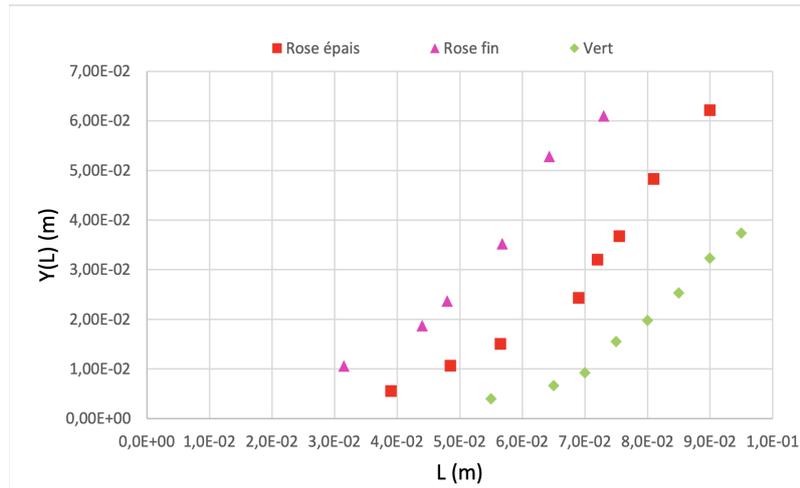


FIGURE 7 – Déflexion quasi-statique de la poutre rose épaisse

## 2.3 Analyse des résultats



(a) Données brutes - ImageJ

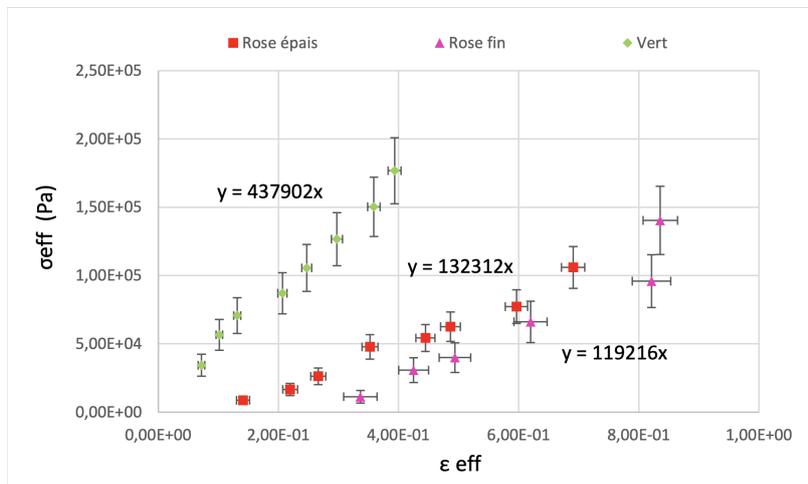
(b)  $\sigma_{effectif} = f(\epsilon_{effectif})$  - Image J

FIGURE 8 – Données obtenues pour les trois éprouvettes à l'aide du logiciel ImageJ

On trouve donc les modules d'Young suivants :

$$E_{\text{rose fin}} = 119 \pm 11 \text{ kPa}$$

$$E_{\text{rose épais}} = 132 \pm 12 \text{ kPa}$$

$$E_{\text{vert}} = 438 \pm 42 \text{ kPa}$$

Les modules d'Young ont été obtenus en prenant la pente de la courbe  $\sigma_{effectif} = f(\epsilon_{effectif})$ . Les valeurs obtenus semblent conformes à la rigidité des poutres : la poutre verte est plus rigide que la rose épaisse et celle-ci plus rigide que la poutre rose fine ; de plus on s'attend à un module d'Young de l'ordre de  $10^2$  kPa. Cependant on remarque que les incertitudes des modules d'Young sont beaucoup élevées, ceci est dû à la mesure de la longueur libre  $L$  qui s'est faite au pied à coulisse uniquement (sans ImageJ). On remarque selon ces données que les modules d'Young des poutres rose épaisse et rose fine sont différents certes, mais l'allure des pentes  $Y$  semble être plutôt proche. Si elles étaient composées du même matériau de façon homogène on devrait obtenir le même module d'Young pour les deux poutres roses. Soit donc les poutres roses sont non homogènes, soit le protocole que nous avons suivi pour les mesures manque de précision ; cette dernière raison pourrait expliquer le fait qu'avec les incertitudes, les modules d'Young des deux languettes se chevauchent.

A noter que l'expérience a été aussi réalisée avec le pied à coulisse. (Voir résultats en annexe).

Avec le pied à coulisse, on trouve les modules d'Young suivants :

$$E_{\text{rose fin}} = 120,5 \pm 12 \text{ kPa}$$

$$E_{\text{rose épais}} = 134,5 \pm 15,5 \text{ kPa}$$

$$E_{\text{vert}} = 466 \pm 50 \text{ kPa}$$

## 2.4 Prise en compte des incertitudes

### 1. Moyen :

- Pour effectuer la mesure directe de la déformation, nous utilisons un pied à coulisse ayant une précision de 0,05 mm. La lecture des mesures engendrent une erreur.
- La mesure indirecte via **ImageJ** est aussi source d'erreur. La règle choisie pour avoir une échelle sur **ImageJ** a une précision de 0,1 mm, soit le double de celle du pied à coulisse. Cela peut avoir une influence sur la mesure des pixels sur **ImageJ**. Cette incertitude se propage lors du calcul de la déformation via **ImageJ**

### 2. Matière :

- Une éprouvette non homogène peut aussi être source d'incertitude. En effet, lorsque nous pesons la poutre sur la balance pour obtenir sa masse volumique, on la suppose homogène.
- Certaines poutres pouvaient présenter des défauts, en étant non-homogènes par exemple ou en ayant été très sollicitées auparavant. Cela rendait les expériences plus difficiles et pouvait propager les erreurs de mesures.

### 3. Main d'oeuvre :

- Le lecteur multiplie les incertitudes en lisant les mesures pour la méthode directe (Pied à coulisse) ou en cliquant sur l'image pour la méthode indirecte (**ImageJ**). La mesure directe avec le pied à coulisse est davantage difficile lorsque la mesure doit se faire en hauteur car l'expérimentateur n'est pas stable lorsqu'il tient le pied à coulisse dans ses mains.

### 4. Méthode :

- La mesure de la base  $b$  et de la hauteur  $h$  de la poutre avec le pied à coulisse doit être faite de manière délicate. En effet, le matériau étant très élastique, nous risquons de compresser la section en la mesurant. Ce qui fausse les mesures de la section.
- La qualité des images dépend de la qualité de l'appareil photo, particulièrement du nombre de pixels. Ainsi, avec un meilleur appareil photo, on limite les erreurs. La verticalité des images rentre aussi en jeu. La perspective rentre aussi en jeu. En effet, si l'image contient de la perspective, nous risquons de mesurer des longueurs plus grandes sur **ImageJ**.

## 2.5 Conclusion

La méthode de la détermination du module d'Young par la déflexion statique s'appuie sur le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Dans notre cas, nous avons utilisé le modèle de poutre linéaire en résistance des matériaux, dans lequel, par une languette (poutre) encastree à l'extrémité gauche et libre à droite, on observe sa déflexion sous son poids propre. Grâce au modèle établi, nous avons pu déterminer le module d'Young des différentes languettes à disposition.

### 3 Vibrations libres linéaires

#### 3.1 Introduction

Dans cette expérience, nous cherchons à déterminer le module d'Young d'éprouvettes en Vinylpolysiloxane grâce aux vibrations libres linéaires des poutres. Elle se réalise en mesurant la pulsation propre des vibrations. En utilisant le modèle de poutre Euler-Bernouilli, la loi de comportement élasticité linéaire et cinématique linéarisée ainsi que les conditions aux limites, nous pouvons déterminer le module d'Young par la relation suivante :

$$k_i L = \alpha_i$$

Avec :

$$k_i^4 = \frac{\rho A \omega^4}{E I} \text{ en m}^{-4}$$

$$\alpha_i = (2i + 1) \frac{\pi}{2} : \text{Le } i\text{-ème mode propre [ ]}$$

$$\text{On a finalement : } \omega_i^2 = E \frac{k_i I}{\rho A L^4}$$

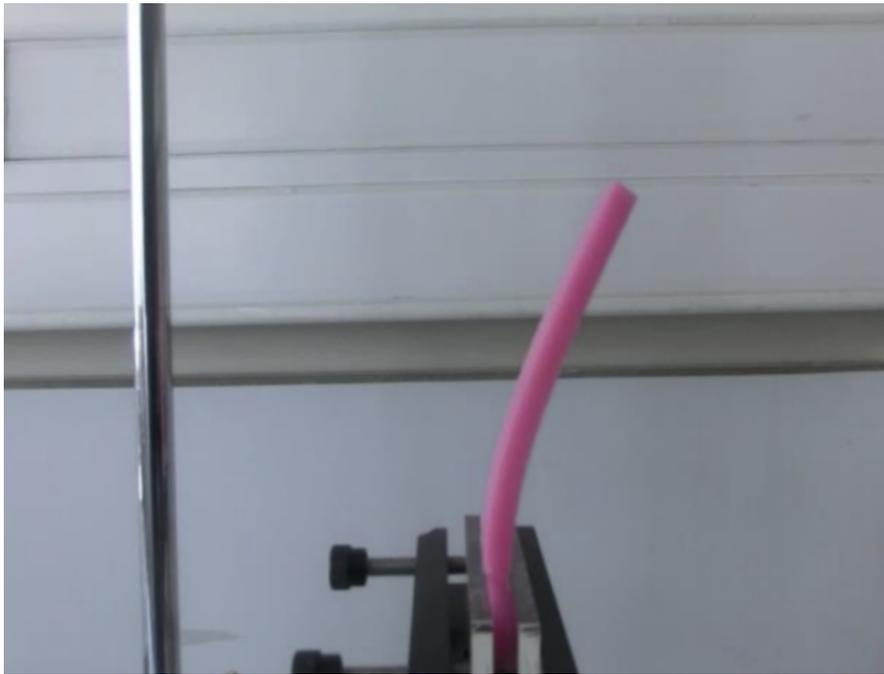


FIGURE 9 – Vibration libre d'une poutre rose

### 3.2 Matériel et protocole

Matériel à disposition :

- Trois poutres de module d'Young différents
- Réglet
- Balance
- Statif
- Noix de serrage
- Etau de serrage
- Appareil photo
- Trépied
- Pied à coulisse
- Logiciel ImageJ

Protocole : L'expérience se réalise en encastrant une poutre de manière verticale et en laissant l'autre partie libre.

La poutre doit être assez petite pour qu'elle ne flambe pas sous son propre poids. En écartant la poutre de sa position initiale, la poutre va vibrer. En filmant l'expérience, nous pouvons déterminer la période propre, puis la pulsation propre ( $\omega = 2\pi T$ ). Grâce à cela, nous pouvons déterminer le module d'Young de la poutre.

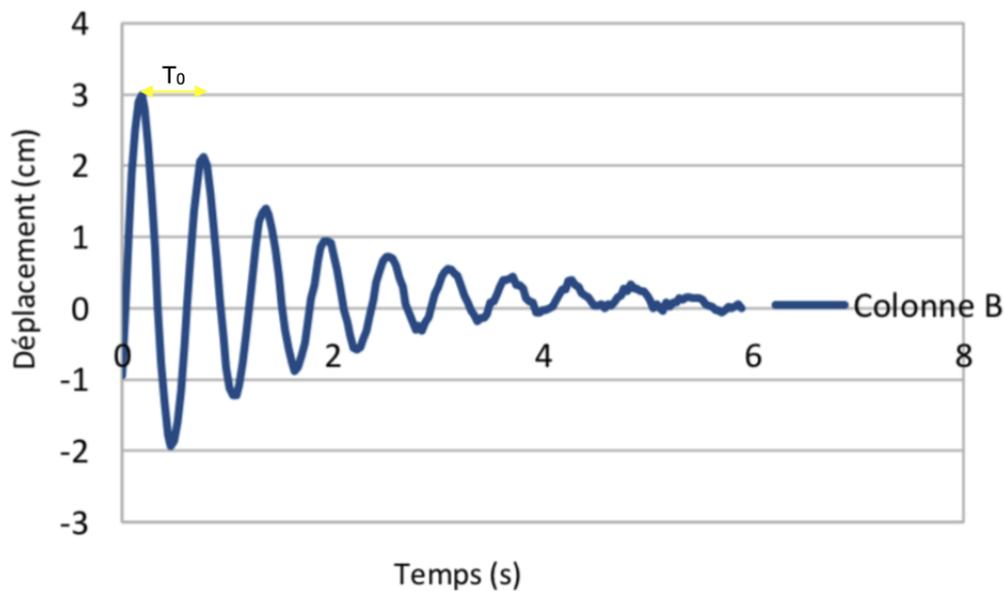


FIGURE 10 – Déplacement en fonction du temps

### 3.3 Conclusion

Compte tenu du contexte sanitaire et de la contamination des expérimentateurs, cette expérience n'a pu être réalisée. Nous n'avons donc pas obtenu des modules d'Young venant confirmer ceux des expériences précédentes. Les modules d'Young obtenus précédemment vont donc nous permettre de dimensionner nos structures.

## 4 Bilan de la première partie

Modules d'Young en kPa	Rose fin	Rose epais	Vert	Bleu
TP1 : ImageJ	$106 \pm 9$	$131 \pm 8$	X	$219 \pm 17$
TP1 : Pied à coulisse	$117 \pm 5$	$130 \pm 9$	X	$208 \pm 9$
TP2 : ImageJ	$119 \pm 11$	$132 \pm 12$	$438 \pm 42$	X
TP2 : Pied à coulisse	$120 \pm 12$	$134 \pm 16$	$466 \pm 50$	X

TABLE 1 – Bilan des module d'Young obtenus

## Deuxième partie

## Dimensionnement des structures

## 5 Flambage de poutres

## 5.1 Introduction

Le flambage est un phénomène d'instabilité, fréquent dans les structures élancées. Ce type de structures présente une dimension plus grande que les deux autres. Lorsqu'elles sont soumises à un effort de compression, ces structures ont tendance à fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression. Cette déformation peut-être réversible ou irréversible selon le matériau. Dans certains cas, le matériau se déformera et plastifiera. Il est donc nécessaire d'éviter le flambage afin d'éviter la plastification d'une structure, voir son effondrement. A partir du modèle de flambage d'Euler, on définit la charge critique de flambage  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}$  avec K un paramètre dépendant des conditions aux limites. Ainsi, les conditions aux limites du problèmes déterminent le type de flambage auquel nous ferons face. Dans le cadre de nos expériences, nous étudierons le flambage de poutres sous leur propre poids. Nous aurons ainsi une base encastree et une extrémité libre. Le flambage des poutres étant sous leur propre poids, on peut définir une longueur critique de flambage en utilisant une loi d'échelle.

On a donc 
$$L_{cr} = \eta \left( \frac{E I}{12 \rho g A} \right)^{1/3}$$

$L_{cr}$  : Longueur critique de flambement (m)

E : Module d' Young du matriau (Pa)

I : Moment quadratique ( $m^4$ )

$\rho$  : Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ )

g : Accelération de la pesanteur :  $g = 9,81m.s^{-2}$

A : Aire ( $m^2$ )

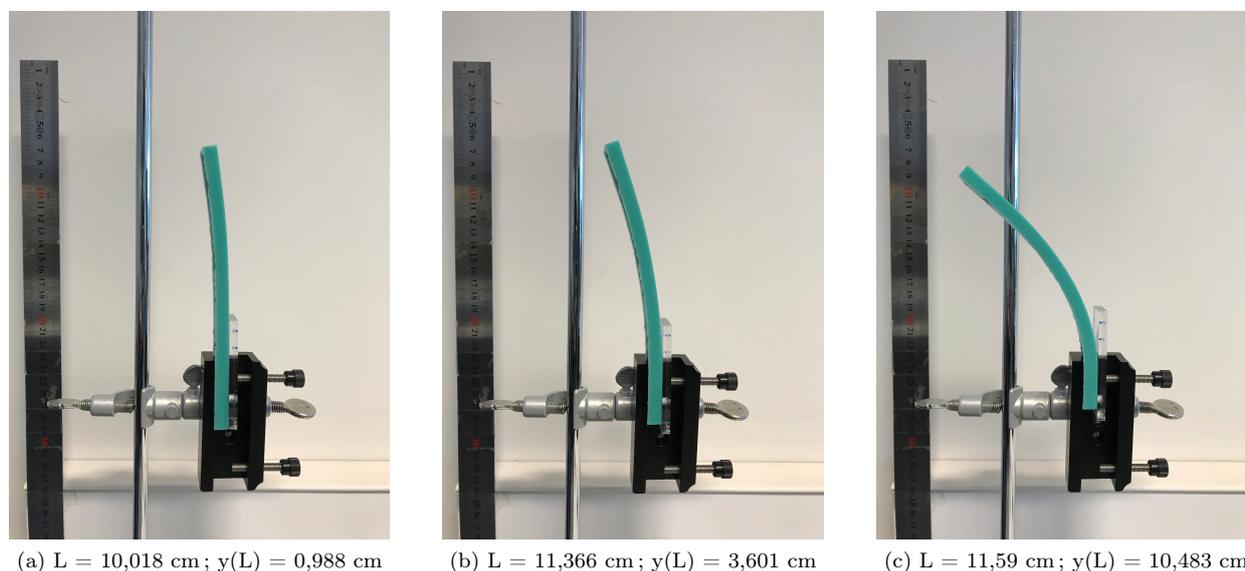


FIGURE 11 – Flambage d'une poutre sous son propre poids pour différentes longueurs libres

La détermination du coefficient  $\eta$  nous permettra de dimensionner une baie vitrée par la relation suivante :

$$L_{cr} = \eta \left( \frac{E e^2}{12 \rho g} \right)^{1/3}$$

## 5.2 Matériel et protocole

Matériel à disposition :

- Quatre poutres de module d'Young différents
- Réglet
- Statif
- Noix de serrage
- Etau de serrage
- Appareil photo
- Trépied
- Pied à coulisse
- Logiciel ImageJ

Protocole :

L'expérience consiste à encastrier plusieurs poutres de module d'Young différents et de modifier sa longueur encadrée. De ce fait, elle va flamber à partir d'une certaine longueur appelée  $L_{cr}$ .

En ayant la longueur critique de flambage, on peut déterminer le coefficient  $\eta$ , en traçant  $L_{cr} = f \left( \frac{E I}{12 \rho g A} \right)^{1/3}$ .

Ceci nous permettra ensuite de dimensionner l'épaisseur de la baie vitrée par la relation suivante :  $e = \left( \frac{12 \rho g L_{cr}^3}{\eta^3 E} \right)^{1/2}$

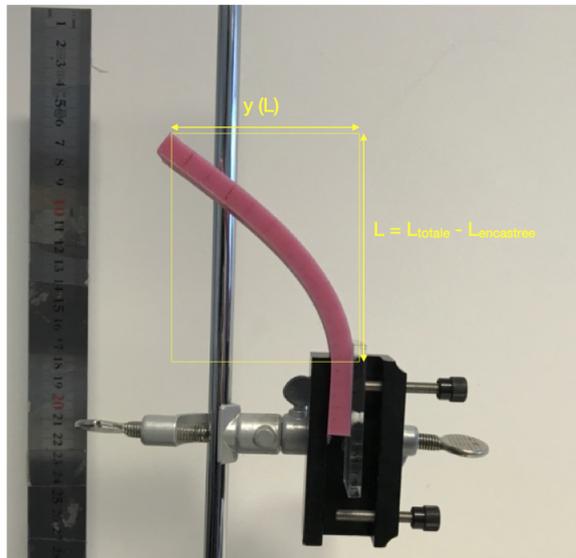


FIGURE 12 – Flambage d'une poutre sous son propre poids à une  $L = 10,2$  cm ;  $y(L) = 9,3$  cm

### 5.3 Analyse des résultats

En traçant,  $y(L) = f(L)$  pour chaque poutre, nous pouvons faire apparaître la longueur critique de flambement  $L_{cr}$ . Elle est marquée par une instabilité et la variation de  $y(L)$  est plus importante.

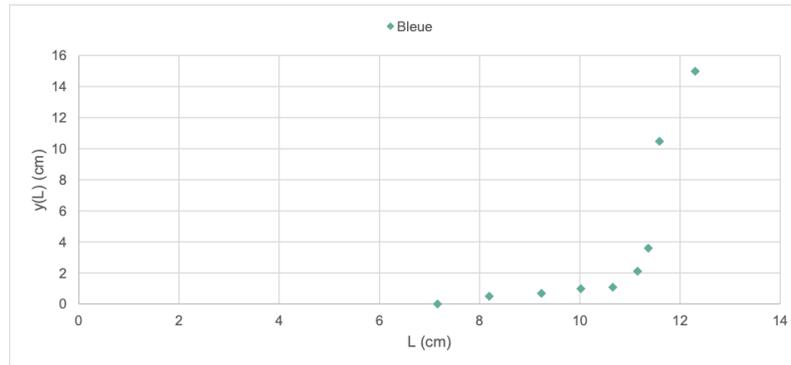


FIGURE 13 –  $y(L) = f(L)$  pour la poutre bleue :  $L_{cr} = 11,15$  cm ;  $y(L) = 2,11$  cm

Nous pouvons répéter cette expérience pour plusieurs poutres différentes afin d'avoir une valeur de  $\eta$  grâce à la loi d'échelle :  $L_{cr} = \eta \left( \frac{E I}{\rho g A} \right)^{1/3}$  Voir Annexe

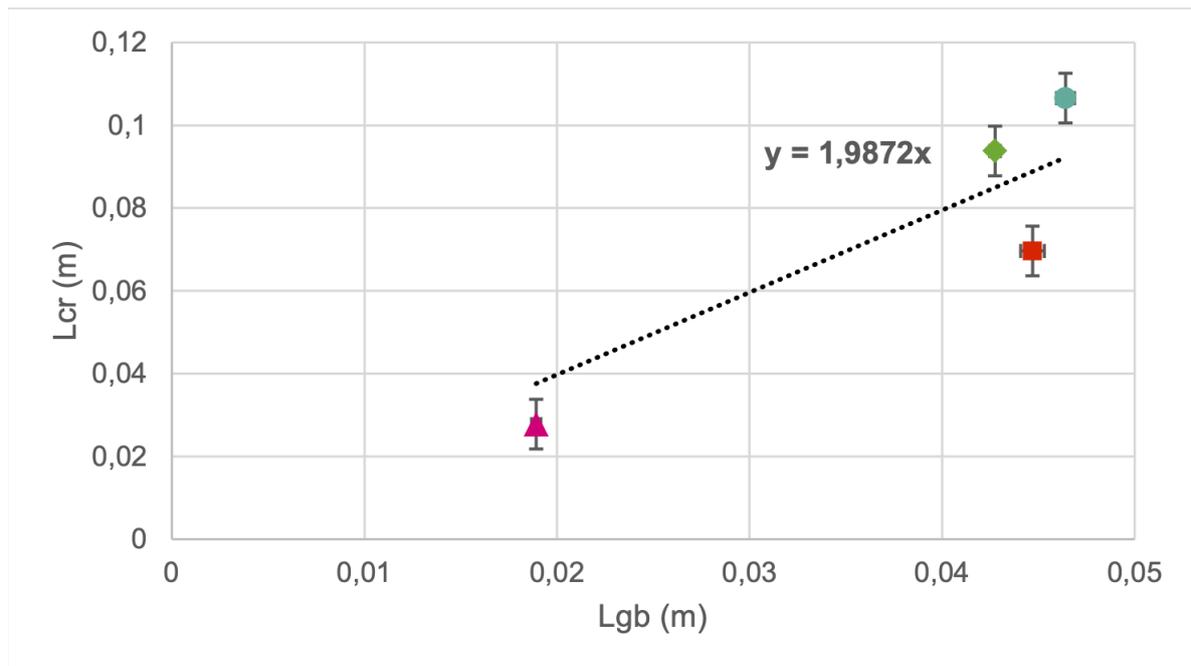


FIGURE 14 –  $L_{cr} = f(L_{gb})$  pour quatre poutres différentes

On trouve donc les valeurs de  $\eta$  suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{rose fin}} &= 1,47 \pm 0,05 \\ \eta_{\text{rose epais}} &= 2,19 \pm 0,01 \\ \eta_{\text{vert}} &= 1,56 \pm 0,08 \\ \eta_{\text{bleu}} &= 2,29 \pm 0,02 \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs, nous pouvons établir une régression linéaire passant par l'origine pour obtenir une valeur moyenne de  $\eta$

Nous avons donc :  $\eta_{\text{regression}} = 1,98 \pm 0,04$

## 5.4 Prise en compte des incertitudes

### 1. Moyen

- La mesure indirecte de la longueur libre et de la flèche via **ImageJ** est source d'erreur. La règle choisie pour avoir une échelle sur ImageJ a une graduation de 0,5 mm. Cette incertitude se propage lors du calcul de la longueur critique via **ImageJ**.
- Les noix de serrage et l'étaux de serrage utilisés peuvent aussi conduire à des erreurs. En effet, la poutre ne pouvait pas être correctement encadrée, au risque de la déformer en serrant relativement fort.
- Les poutres fournies étant particulièrement élastiques, il était compliqué de déterminer le seuil d'instabilité. En effet, pour une même longueur encadrée, nous avions ou pas une instabilité. Aussi, la poutre pouvait basculer du côté opposé.

### 2. Matière :

- Certaines poutres pouvaient présenter des défauts, en étant non-homogènes par exemple ou en ayant été très sollicitées auparavant. Cela rendait les expériences plus difficiles et pouvait propager les erreurs de mesures.

### 3. Main d'oeuvre :

- Le lecteur multiplie les incertitudes en cliquant sur l'image pour déterminer les longueurs via **ImageJ**.
- L'expérimentateur peut aussi bouger légèrement son appareil photo lors de la prise. Bien que l'échelle soit déterminée pour chaque image, cette erreur rend l'image moins droite et prend en compte la perspective.

### 4. Méthode :

- La mesure de la base  $b$  et de la hauteur  $h$  de la poutre avec le pied à coulisse doit être faite de manière délicate. En effet, le matériau étant très élastique, nous risquons de compresser la section en la mesurant. Ce qui fausse les mesures de la section.
- La qualité des images dépend de la qualité de l'appareil photo, particulièrement du nombre de pixels. Ainsi, avec un meilleur appareil photo, on limite les erreurs. La verticalité des images rentre aussi en jeu. La perspective rentre aussi en jeu. En effet, si l'image contient de la perspective, nous risquons de mesurer des longueurs plus grandes sur **ImageJ**

## 5.5 Dimensionnement d'une baie vitrée

Revenons à notre problème initial de dimensionnement d'une baie vitrée. Après avoir trouvé le coefficient  $\eta$  grâce à nos expériences, nous pouvons maintenant dimensionner notre structure et déterminer l'épaisseur minimale pour laquelle notre baie vitrée va flamber, pour une longueur critique de 2 m

Nous pouvons donc utiliser la relation suivante :  $e_{verre} = \left( \frac{12 \rho_{verre} g L_{cr}^3}{\eta^3 E_{verre}} \right)^{1/2}$

Nous avons donc : **e = 2,08 ± 0,01 mm**

Ce résultat est cohérent, il est du même ordre de grandeur que celui du binôme miroir. A noter que l'incertitude obtenu n'était fonction que de celle sur  $\eta$ . En effet, les autres données étant obtenues sur internet, nous n'avons pas leurs incertitudes et nous sommes obligés de les considérer sans incertitudes.

## 5.6 Conclusion

Les modules d'Young trouvés dans la première partie nous ont permis de dimensionner notre baie vitrée. Il serait tout de même intéressant de vérifier ces résultats. En effet, bien que les hypothèses faites (Loi d'échelle, Euler-Bernoulli etc.) soient justifiées et correctes, nous pouvons vérifier la cohérence de nos résultats en les comparant avec des simulations numériques type éléments finis.

## 6 Le contact de Hertz

### 6.1 Introduction

Le contact de Hertz se caractérise par une contrainte locale entre deux surfaces courbées mises en contact et qui se déforment à causes des forces qu'on leur applique. Dans notre cas on regarde le problème d'une sphère rigide sur un solide élastique mou qui est équivalent à une sphère élastique molle sur un solide rigide. On considère une bille comme étant une sphère lisse en alliage métallique de rayon  $R$  qui s'enfonce sur une distance  $\delta$  et sous une charge  $P$  (Poids) au contact d'un plan lisse déformable de module d'Young  $E$ . Le rayon  $a$  du contact est supposé petit devant le rayon  $R$  de la sphère. L'objectif est de calculer la contrainte  $\sigma$  qui s'applique sur la bille et de la comparer à la contrainte  $\sigma_e$  qui est la limite élastique de l'alliage métallique. On calculera  $\sigma$  par la relation  $\sigma = \frac{P}{\pi a^2}$  où  $a$  est à déterminer. Les expériences nous permettront de déduire la relation entre le poids  $P$  et le rayon du contact  $a$  depuis une détermination, par une approche en loi d'échelle, de l'énergie élastique mise en jeu dans la déformation du contact. La relation entre  $P$  et  $a$  peut être obtenu par la loi d'échelle suivante :

$$P = \eta \frac{Ea^3}{R} \text{ où le facteur } \eta \text{ est à déterminer.}$$

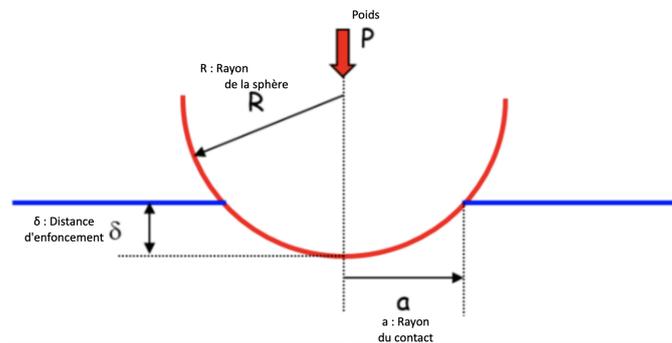


FIGURE 15 – Schéma du contact de Hertz

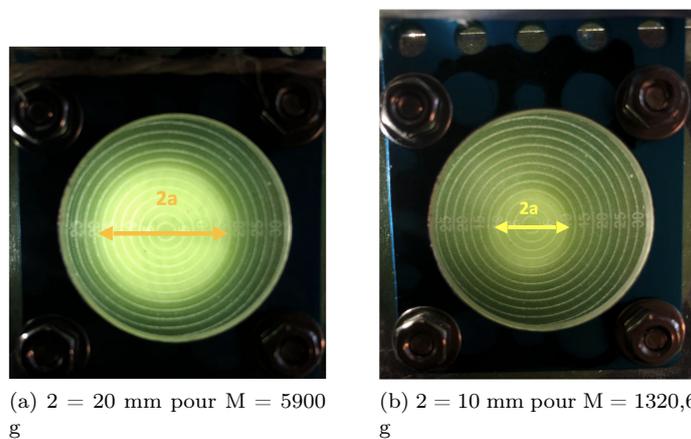


FIGURE 16 – Contact de hertz pour deux rayons différents

## 6.2 Matériel et protocole

Matériel à disposition :

- Deux demi-sphères rose et verte
- Pied à coulisse
- Serre-joint
- Masses
- Balance
- Source lumineuse (Flash du téléphone)
- Dispositif du laboratoire (en bleue)
- Pied à coulisse
- Logiciel ImageJ
- Excel

Protocole :

L'expérience consiste à placer la demi-sphère entre les deux plaques transparentes du dispositif bleue (figure 1), lui-même fixé sur la paillasse grâce au serre-joint. La plaque supérieure, munie de graduations de cercles de différents diamètres (en mm), est coulissante verticalement. Celle-ci peut appliquer une pression verticale descendante sur la demi-sphère en fonction des masses qu'on lui suspend (figure 1), ainsi avec plusieurs masses différentes, on obtient différents rayons de contact  $a$ .

Pour pouvoir lire correctement le rayon  $a$  du disque de contact entre la demi-sphère et la plaque supérieure, il faut trouver le bon angle d'éclairage (figure 2).

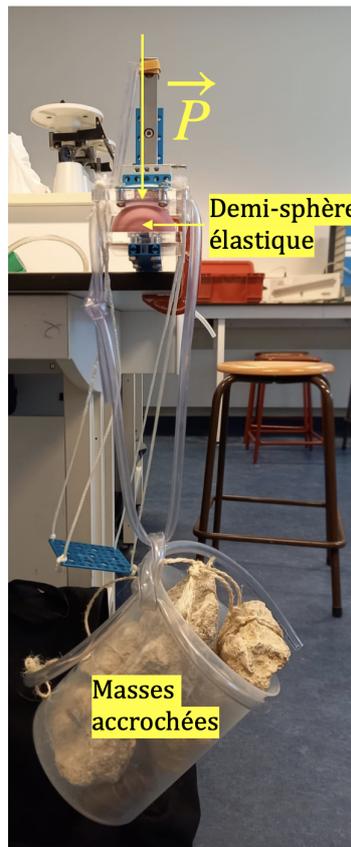
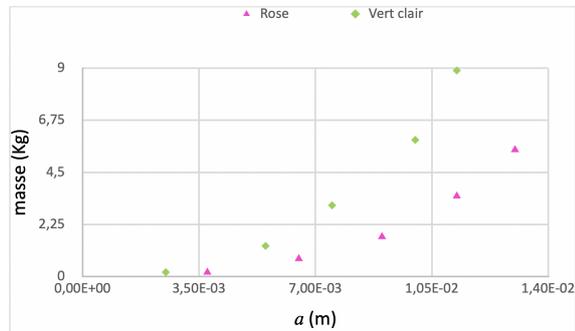


FIGURE 17 – Expérience réalisée

### 6.3 Analyse des résultats

Connaissant les modules d'Young  $E$  des deux demi-sphères rose et vert claire (déterminés au TP1 et TP2) et leur rayon respectif  $R$ , on peut avec différentes valeurs du poids et du rayon de contact a ainsi déduit, tracer graphiquement  $P = \eta \frac{Ea^3}{R}$ . Avec les données ci-dessous, on pourra trouver la valeur de  $\eta$



(a) Données brutes

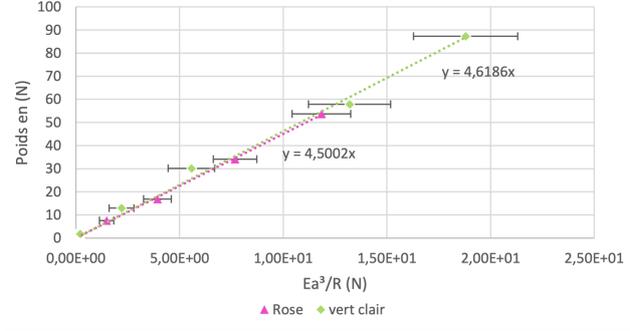
(b)  $P = \eta \frac{Ea^3}{R}$ 

FIGURE 18 – Expérience réalisée avec l'éprouvette rose fine

On trouve donc les valeurs de  $\eta$  suivantes :

$$\eta_{\text{rose}} = 4,50 \pm 0,87$$

$$\eta_{\text{vert}} = 4,61 \pm 1,10$$

On remarque que la surface a de contact augmente en fonction du poids  $P$  appliqué sur le dispositif. Cette augmentation se traduit par une droite linéaire pour chacune des deux demi-sphères. On peut donc en déduire que le pré facteur  $\eta$  sera la pente de chaque droite. On trouve pour deux matériaux avec deux modules d'Young différents, deux pré facteurs  $\eta$  très similaires, on sait par ailleurs que la loi de Hertz  $P = \eta \frac{Ea^3}{R}$  est universelle pour tous les contacts de Hertz, ce qui implique que  $\eta$  est le même pour toutes les demi-sphères et cela pour n'importe quel matériau et rayon.

## 6.4 Prise en compte des incertitudes

Il y a quatre sources majeures d'incertitudes dans la réalisation de ces travaux pratiques sur le contact de Hertz.

### 1. Moyen

- La mesure de R, le rayon de la demi-sphère, sur un pied à coulisse comporte une incertitude de 0,05 mm.
- La balance utilisée pour peser les masses accrochées a une incertitude de  $1.10^{-4}$  kg.

### 2. Matière :

- Une demi-sphère pouvant être non-homogène provoque un module d'Young comportant des erreurs d'incertitudes (TP1 et TP2)

### 3. Main d'oeuvre :

- L'expérimentateur crée une incertitude de mesure lorsqu'il lit la valeur du diamètre 2a car entre deux graduations successives il y a 1,25 mm

### 4. Méthode :

- Trouver la bonne position de la source de lumière afin de lire correctement la limite du diamètre 2a du disque de contact provoque une incertitude : une lumière mal positionnée réduit la clarté de la surface de contact.
- Si la demi-sphère n'est pas centrée correctement sur le centre des graduations circulaires de la plaque supérieure, le diamètre 2a sera décalée, ce qui provoquera une incertitude sur a.
- Une demi-sphère est élastique, si on la serre trop au pied à coulisse, le R mesuré sera inférieur au R qu'on devrait avoir.

## 6.5 Dimensionnement des billes d'un skateboard

Revenons au problème du skateboard. Les expériences nous ont permis de déterminer la relation entre le poids P et le rayon du contact a depuis une détermination, par une approche en loi d'échelle :

$$P = \eta \frac{Ea^3}{R}$$

Précédemment, nous avons vu que le pré facteur dans la loi de Hertz est universel pour n'importe quel matériau. Alors pour avoir le pré facteur, nous avons tracé des deux demi-sphère directement ensemble : On trouve donc les valeurs de  $\eta$  suivantes :

$$\eta = 4,58 \pm 0,98$$

Pour calculer la contrainte  $\sigma$  subi par la bille, on peut utiliser la loi d'échelle précédente :  $P = \eta \frac{Ea^3}{R} \Leftrightarrow a = \left(\frac{PR}{\eta E}\right)^{1/3}$ . En remplaçant a dans l'expression  $\sigma = \frac{P}{\pi a^2}$ , on a :  $\sigma = \frac{P}{\pi \left(\frac{PR}{\eta E}\right)^{2/3}}$ , et on peut calculer la contrainte  $\sigma$  et on trouve :

$$\sigma \simeq 4,50 \pm 0,02 \text{ MPa.}$$

On remarque que  $\sigma \gg \sigma_e$ , sous cette contrainte la bille va alors se déformer de manière irréversible et pourra même atteindre la rupture ce qui conduira à sa ruine. Pour résoudre ce problème et éviter que le skateur ne se fracture la cheville, on pourrait augmenter le rayon R de la bille et ainsi  $\sigma$  va diminuer.

On a l'expression de la contrainte  $\sigma = \frac{P}{\pi \left(\frac{PR}{\eta E}\right)^{2/3}}$  et on devrait avoir  $\sigma_e > \frac{P}{\pi \left(\frac{PR}{\eta E}\right)^{2/3}}$  pour éviter la plastification. Il faut alors que  $R > \left(\frac{P}{\pi \sigma_e}\right)^{3/2} \frac{\eta E}{P}$ . Mais avec cela on doit avoir  $R > 236$  mm, ce qui ressemblerait plutôt à la roue d'une voiture. L'autre solution est d'augmenter le nombre de billes dans un roulement, mais là encore, cela dépend de la répartition uniforme ou non du poids P.

## 6.6 Conclusion

Les expériences nous ont permis de calculer la valeur du pré facteur de la loi de Hertz qui régit le contact de Hertz. Une fois ce pré facteur déterminé, on peut appliquer cette loi pour tout type de matériaux et tout rayon R. Par la suite on est en mesure de déterminer la contrainte subie par notre bille en connaissant la force qu'on lui applique et la surface de contact  $\pi a^2$ . Finalement, on compare la contrainte  $\sigma$  à la contrainte limite élastique  $\sigma_e$  de la bille (en alliage métallique) pour voir si la force appliquée nous permet de rester dans le domaine élastique ou si elle va nous conduire à une plastification du matériau.

## 7 Bilan de la seconde partie

TP4 : Flambage	$e = 2,08 \pm 0,01 \text{ mm}$
TP5 : Contact de Hertz	$\sigma = 4,50 \pm 0,02 \text{ MPa}$

TABLE 2 – Bilan des valeurs obtenues pour le dimensionnement

# Conclusion

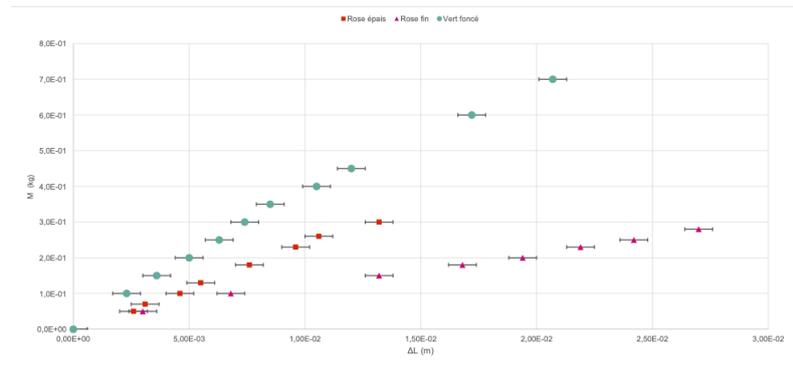
Dans un premier temps, nous avons été amenés à déterminer les modules d'Young de trois différentes poutres (rose, bleu et vert) en Vinylpolysiloxane grâce à des essais de traction et de déflexion quasi-statique. Ce paramètre caractérise la rigidité du matériau, et il lui est propre. Il est utile de noter qu'il était judicieux de choisir un matériau très élastique afin de rester dans le domaine linéaire. Il était aussi réversible, c'est-à-dire qu'il est revenu à son état initial après le déchargement. De même, il ne semblait pas y avoir d'écrouissage après les essais. Le choix du matériau pour ce type d'expériences est donc très important et cela peut avoir ensuite des conséquences sur le dimensionnement des structures. Comme indiqué précédemment, l'expérience sur les vibrations libres linéaires n'a pu se faire. Les modules d'Young obtenus lors des essais de traction et des déflexion quasi-statiques n'ont pas pu être confirmés. Il est évident que cela a des conséquences sur le dimensionnement des structures réalisé dans la deuxième partie car nous avons utilisés les modules d'Young avec les incertitudes les plus faibles. Cela étant, si nous avons eu des incertitudes encore plus faibles lors de la détermination du module d'Young par les vibrations linéaires, nous les aurions utilisé les valeurs obtenues grâce à cette expérience.

La détermination des modules d'Young ont permis de faire le dimensionnement des structures. En effet, grâce à une approche en loi d'échelle, nous avons été amenés à trouver la valeur approchée du coefficient  $\eta$  pour le flambage des poutres ainsi que pour le contact de Hertz. Nous avons pu comparer nos valeurs avec ceux du binome miroir. Toutefois, nous avons utilisé les mêmes hypothèses. Il serait intéressant de se pencher sur des simulations numériques de flambage via des codes, notamment d'éléments finis. Les résultats obtenus dépendront du maillage associé. De plus, les problèmes de dimensionnement doivent être associés à des coefficients de sécurité afin d'avoir une marge de sûreté. A partir de cela, nous pourrions réaliser nos structures en tenant compte du dimensionnement.

Cette unité d'enseignement nous a permis de mettre en pratique les savoirs acquis depuis la première année de licence, mais surtout ceux d'élasticité. Elle nous a aidé à développer notre autonomie, notamment durant les séances de travaux pratiques pour lesquelles, nous faisons les manipulations seuls au vu du contexte sanitaire. Elle a également été l'opportunité d'anticiper les prochaines années, notamment grâce aux études théoriques faites lors des deux séances de cours magistraux. Nous tenons donc à remercier nos deux encadrants M. Arnaud LAZARUS et M. Victor ROMERO, qui nous ont assistés tout au long de ces travaux.

## Annexes

### Caractérisation d'un matériau



(a) Données brutes - Pied à coulisse

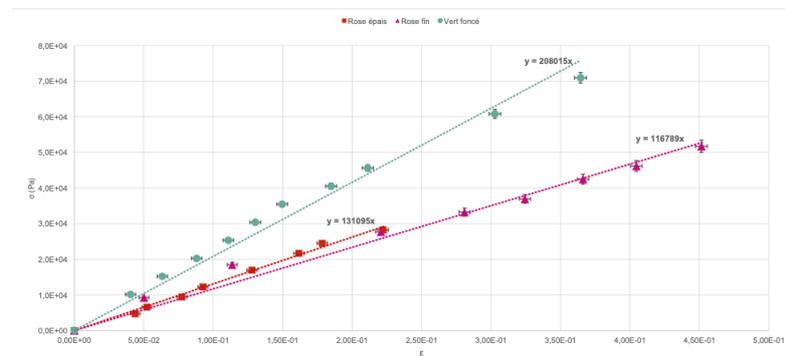
(b)  $\sigma = f(\epsilon)$  - Image J

FIGURE 19 – Données obtenues pour les trois éprouvettes à l'aide du pied à coulisse

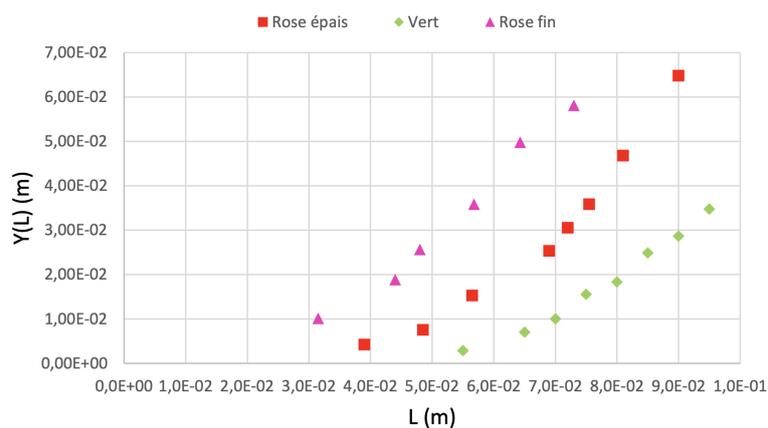
#### Calcul des incertitudes

$$\Delta\sigma = \sqrt{\left|\frac{\partial\sigma}{\partial b}\right|^2 \Delta b^2 + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial h}\right|^2 \Delta h^2}$$

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{\left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial L}\right|^2 \Delta L^2 + \left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial L_0}\right|^2 \Delta L_0^2}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\partial E}{\partial\sigma}\right|^2 \Delta\sigma^2 + \left|\frac{\partial E}{\partial\varepsilon}\right|^2 \Delta\varepsilon^2}$$

## Déflexion quasi-statique



(a) Données brutes - Pied à coulisse

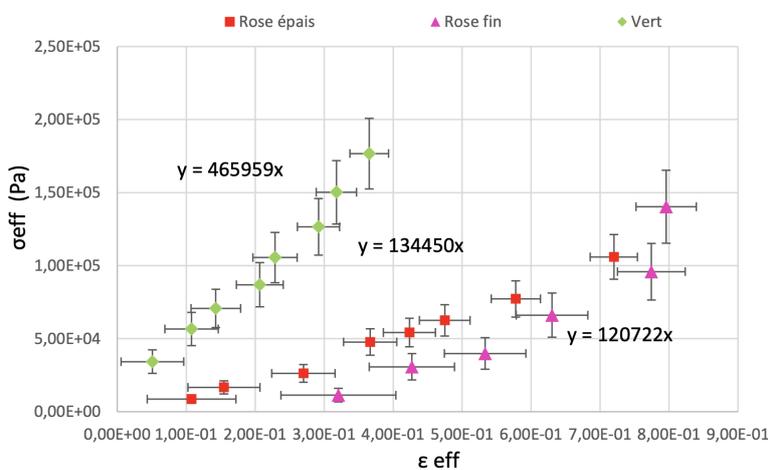
(b)  $\sigma_{effectif} = f(\varepsilon_{effectif})$  - Pied à coulisse

FIGURE 20 – Données obtenues pour les trois poutres à l'aide du pied à coulisse

## Calcul des incertitudes

$$\Delta\sigma = \sqrt{\left|\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}\right|^2 \Delta\omega^2 + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial L}\right|^2 3\Delta L^2 + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial I}\right|^2 \Delta I^2}$$

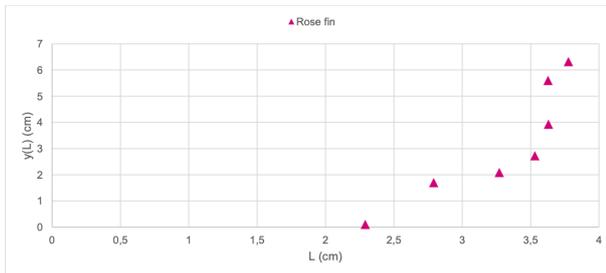
$$\Delta\varepsilon = \sqrt{\left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial y(L)}\right|^2 \Delta y(L)^2 + \left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial L}\right|^2 \Delta L^2}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\partial E}{\partial\sigma}\right|^2 \Delta\sigma^2 + \left|\frac{\partial E}{\partial\varepsilon}\right|^2 \Delta\varepsilon^2}$$

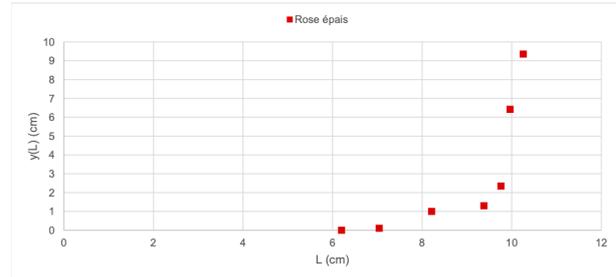
## Flambage de poutres

Données utilisées : Dimensionnement d'une baie vitrée :

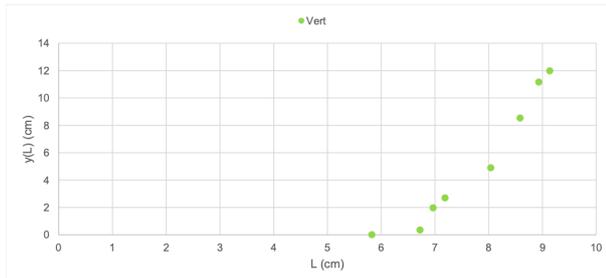
- $L_{cr}$  : 2 m
- $E_{rose\ fin}$  :  $117 \pm 5$  kPa
- $E_{rose\ epais}$  :  $130 \pm 9$  kPa
- $E_{bleu}$  :  $208 \pm 9$  kPa
- $\rho_{rose\ fin} = 1020 \pm 2$  kg.m<sup>-3</sup>
- $\rho_{rose\ epais} = 1050 \pm 2$  kg.m<sup>-3</sup>
- $\rho_{vert} = 896 \pm 2$  kg.m<sup>-3</sup>
- $\rho_{bleu} = 955 \pm 3$  kg.m<sup>-3</sup>
- $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>



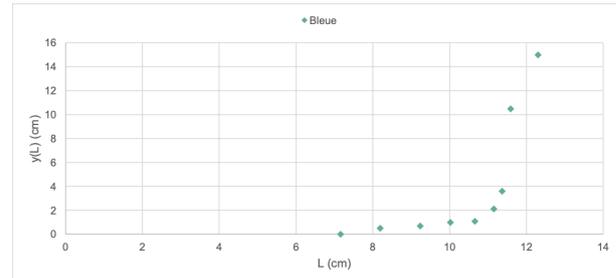
(a)  $y(L_{cr}) = 1,70$  cm ;  $L_{cr} = 2,79$  cm : Rose fin



(b)  $y(L_{cr}) = 1,30$  cm ;  $L_{cr} = 9,38$  cm : Rose épais



(c)  $y(L_{cr}) = 2,70$  cm ;  $L_{cr} = 7,19$  cm : Vert



(d)  $y(L_{cr}) = 2,11$  cm ;  $L_{cr} = 11,15$  cm : Bleue

FIGURE 21 – Données brutes :  $y(L) = f(L)$  pour quatre poutres

### Calcul des incertitudes

$$\Delta L_{cr} = \sqrt{\left| \frac{\partial L_{cr}}{\partial L} \right|^2 \Delta L^2 + \left| \frac{\partial L_{cr}}{\partial y(L)} \right|^2 \Delta y(L)^2}$$

$$\Delta L_{gb} = \sqrt{\left| \frac{\partial L_{gb}}{\partial E} \right|^2 \Delta E^2 + \left| \frac{\partial L_{gb}}{\partial I} \right|^2 \Delta I^2 + \left| \frac{\partial L_{gb}}{\partial \rho} \right|^2 \Delta \rho^2 + \left| \frac{\partial L_{gb}}{\partial A} \right|^2 \Delta A^2}$$

$$\Delta \eta = \sqrt{\left| \frac{\partial \eta}{\partial L_{cr}} \right|^2 \Delta L_{cr}^2 + \left| \frac{\partial \eta}{\partial L_{gb}} \right|^2 \Delta L_{gb}^2}$$

## Le contact de Hertz

### Données utilisées : Dimensionnement de billes d'un skateboard :

- Poids :  $P = 250 \text{ N}$
- Module d'Young de l'alliage métallique :  $E = 69,5 \text{ GPa}$
- Rayon de la bille :  $R = 3 \text{ mm}$
- Contrainte limite élastique de l'acier :  $\sigma_e = 245 \text{ MPa}$
- Module d'Young du disque rose :  $E = 131 \pm 8 \text{ kPa}$
- Module d'Young du disque vert :  $E = 466 \pm 40 \text{ kPa}$
- Rayon du disque rose :  $R = 2,450 \pm 0,001.10^{-2} \text{ m}$  kPa
- Rayon du disque vert :  $R = 3,350 \pm 0,001.10^{-2} \text{ m}$  kPa

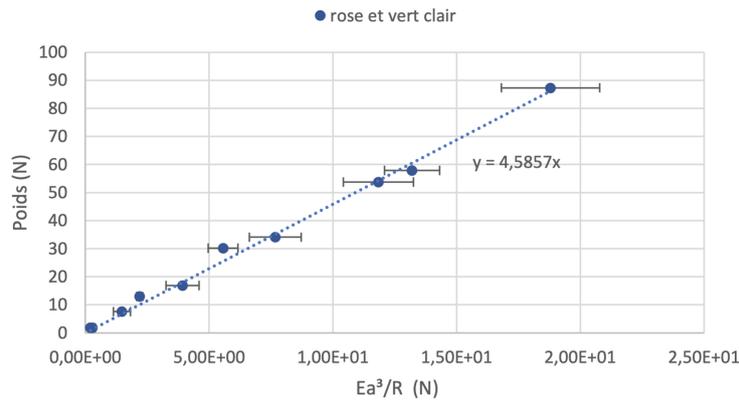


FIGURE 22 –  $P = \eta \frac{Ea^3}{R}$  pour les demies sphères rose et vert rassemblées

### Calcul des incertitudes

$$\Delta P = \Delta m g$$

$$\Delta L = \sqrt{\left| \frac{\partial L}{\partial R} \right|^2 \Delta R^2 + \left| \frac{\partial L}{\partial a} \right|^2 \Delta a^2 + \left| \frac{\partial L}{\partial E} \right|^2 \Delta E^2}$$

$$\Delta \eta = \sqrt{\left| \frac{\partial \eta}{\partial P} \right|^2 \Delta P^2 + \left| \frac{\partial \eta}{\partial L} \right|^2 \Delta L^2}$$