Licence 3 - LU3ME103 Dynamique des systèmes discrets

Équilibres et stabilité

TD 1-2 : Principe variationnel et modélisation de systèmes discrets

Exercice 1 :

A l'aide des définitions des dérivées premières et secondes de la fonctionnelle $I(f)$ dans la direction φ

$$I'(f)(\varphi) = \frac{d}{dh}\left[I\left(f + h\varphi\right)\right]_{h\to 0} \qquad \text{et} \qquad I''(f)(\varphi) = \frac{d^2}{dh^2}\left[I\left(f + h\varphi\right)\right]_{h\to 0}\,, \qquad h \in \mathbb{R}$$

— Déterminer la dérivée première et seconde de la fonctionnelle suivante, où $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière :

$$I_3(x, f(x), f'(x)) = \int_0^1 \left[\frac{K}{2} f'(x)^2 + F\ell\cos(f(x))\right] dx$$

et trouver $f(x)$ rendant stationnaire $I_3(f)$.

— Obtenir l'équation d'Euler pour la fonctionnelle $I(f) = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))dx$ où $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont données au bords.

— Retrouver alors $f(x)$ rendant stationnaire $I_3(f)$ en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange générique.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on va démontrer que la droite $y(x) = x$ est bien la courbe de longueur minimale qui rejoint les deux points $(0, 0)$ et $(1, 1)$ dans le plan (x, y).

— Écrire la fonctionnelle $\Gamma(x, y(x), y'(x))$ qui décrit la longueur d'une courbe entre $(0, 0)$ et $(1, 1)$ (on pourra s'aider de ds, l'élément infinitésimal de longueur d'arc pour écrire cette fonctionnelle).

— Écrire les conditions d'optimalité d'ordre 1 et 2 qui doivent être satisfaite pour que la courbe $y(x)$ soit un minimum strict de la longueur $\Gamma(x, y(x), y'(x))$.

— Calculer les dérivées directionnelles première et seconde de la longueur $\Gamma(x, y(x), y'(x))$ dans la direction $\varphi(x)$.

— Grâce à la condition d'optimalité d'ordre 1, écrire la forme forte que doivent vérifier les $y(x)$ qui rendent stationnaire la longueur $\Gamma(x, y(x), y'(x))$ et résoudre cette équation entre $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

— Vérifier que ces $y(x)$ sont bien les minimum de la longueur.

— Retrouver la forme de la fonction $y(x)$ qui rend stationnaire la longueur $\Gamma(x, y(x), y'(x))$ en passant directement par la forme générique des équations d'Euler.

Exercice 3 :

Dans cet exercice, on veut écrire l'équation du mouvement qui régit le mouvement dans le plan de la masse du pendule paramétrique de la figure 1a). Le fil est non pesant et inextensible et la masse m est accrochée en B. Le point d'attache A est vibré verticalement de façon harmonique autour d'une position moyenne y_A^0 de sorte que la position du point A s'écrit :

$$\underline{OA} = x_A^0 \underline{i} + (y_A^0 + A\cos(\omega t))\underline{j}$$

Comme ce système à 1 ddl est conservatif, on peut utiliser les équations d'Euler-Lagrange dans leur forme la plus simple pour écrire les équations du mouvement.

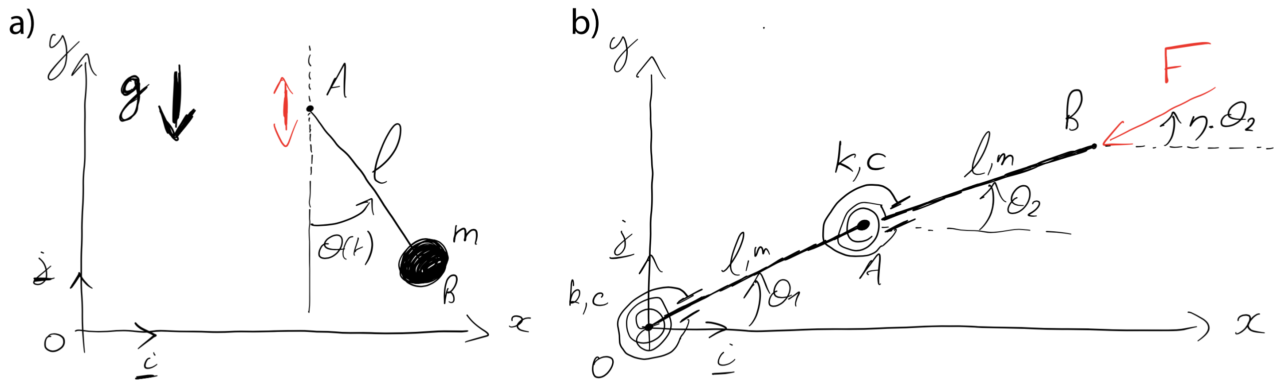

FIGURE 1 – a) Un pendule paramétrique est un pendule dont le point d'attache oscille. b) La "colonne de Ziegler" est un système modèle en dynamique des structures discrètes qui consiste en une structure plane bi-articulée soumise à une force de compression possiblement non conservative.

— Écrire l'énergie cinétique de la masse m en fonction de la coordonnée généralisée $q(t) = \theta(t)$.

— Écrire l'énergie potentielle de la masse m en fonction de la coordonnée généralisée $q(t) = \theta(t)$.

— A l'aide des équations d'Euler-Lagrange, écrire les équations du mouvement du système.

Exercice 4 :

On considère la poutre bi-articulée illustrée sur la figure 1b). Son mouvement est contraint dans le plan $(O, \underline{i}, \underline{j})$ et peut donc être paramétré par les deux seules coordonnées généralisées $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. Les deux barres indéformables sont de longueur l et de masse totale m. La première barre peut pivoter en O mais des moments de rappel élastiques et visqueux sont à considérer qui s'opposent à la rotation de la barre 1 :

$$M_O^k = -k\theta_1 \quad \text{et} \quad M_O^c = -c\dot{\theta}_1$$

Les deux barres peuvent pivoter en A mais des moments de rappel élastiques et visqueux s'opposent à la différence de rotation $\theta_2 - \theta_1$ tels que sur la barre 2, les moments s'écrivent :

$$M_A^k = -k(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{et} \quad M_A^c = -c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

De plus, une force de compression F s'applique en B. Nous considérerons deux cas classiques en dynamique des structures discrètes :

— $\eta = 0$: la force est conservative car elle reste horizontale et ne change pas d'intensité au cours du mouvement. Le travail de cette force ne dépend pas du chemin parcouru.

— $\eta = 1$: la force est suiveuse, elle est colinéaire à la barre 2. C'est alors une force non conservative.

Enfin, la force de compression et la raideur des ressorts sont telles que l'on pourra négliger l'aspect gravitationnel des barres pesantes (mais pas l'aspect inertiel). Étant donné le caractère non conservatif du système étudié et le mélange entre moments et forces, on s'aidera du Principe des Travaux Virtuels pour écrire les équations du mouvement de ce système à 2 degrés de liberté.

— Écrire le Principe des Travaux Virtuels appliqué à ce système.

— Calculer les travaux des accélérations généralisées.

— Calculer les travaux des moments généralisés dus aux rappels élastiques.

— Calculer les travaux des moments généralisés dus aux rappels visqueux.

— Calculer les travaux des moments généralisés dus à la force de compression F.

— Établir l'équation du mouvement à partir du PTV.

TD 3-4 : Système dynamique à 1 degré de liberté

On considère la structure à un degré de liberté de la figure 2, composée d'un ressort de torsion de rigidité k, d'une barre rigide de longueur L et de masse totale m, soumise à l'action d'une force conservative F à son extrémité. L'effet de la gravité est négligé.

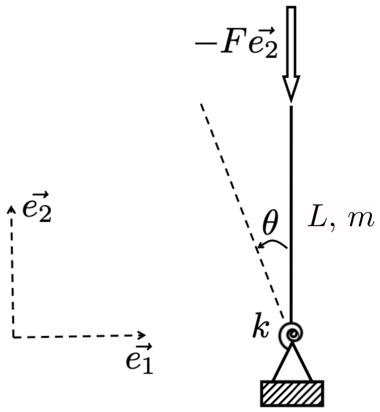

FIGURE 2 – Structure à 1 degré de liberté modélisant un poteau élastique en compression. L'élasticité du poteau est représenté par un ressort spiral de torsion qui emmagasine le travail de la force de compression.

— En utilisant les équations de Lagrange, écrivez les équations du mouvement de ce système.

— En utilisant le formalisme Hamiltonien, écrire le système dynamique sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

— Donner l'équation algébrique que vérifient les points fixes (θ^*, p^*) de ce système (autrement appelée l'équation d'équilibre). Pour aider à la compréhension physique du système, on fera apparaître le paramètre adimensionnel $\lambda = FL/k$ qui régit l'évolution des points fixes.

— Tracer la branche d'équilibre triviale dans l'espace (λ, θ^*) et déterminer sa stabilité au sens de Lyapunov en fonction de λ.

— A l'aide d'une approche géométrique, tracer qualitativement la branche d'équilibre bifurquée dans l'espace (λ, θ^*) et déterminer sa stabilité au sens de Lyapunov en fonction de λ.

— A l'aide d'une approximation de la fonction $\sin(\theta) \approx \theta - \theta^3/6$ à l'ordre 2 , donner une approximation quantitative de la branche bifurquée et de sa stabilité autour de $\theta^* = 0$.

— Tracer qualitativement les portraits de phase du système dynamique avant et après le point de bifurcation λ_c. Quelle différences peut on observer si l'on ajoutait un peu de dissipation au système.

— Montrer que la seule analyse de l'énergie potentielle du système aurait suffit à tracer le diagramme de bifurcation des équilibres de ce système.

— Tracer qualitativement la forme de l'énergie potentielle du système avant et après le point de bifurcation λ_c.

TD 5 : Équilibre et stabilité d'une structure à 2 degrés de liberté

Exercice 1 :

On considère le système I (Figure 3a)), constitué de deux barres rigides de longueur L et de deux ressorts de torsion k, soumis à une force ponctuelle horizontale F. On ne prendra pas en compte les effets de la pesanteur. Nous allons effectuer l'étude quasi-statique de ce système en étudiant notamment l'évolution de l'équilibre trivial de la poutre horizontale et de sa stabilité en fonction de la force de compression F.

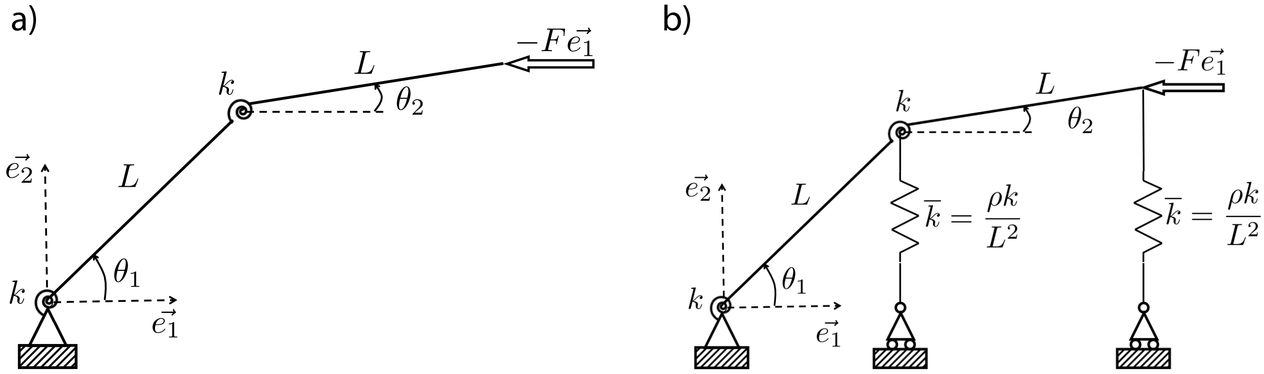

FIGURE 3 – Exemple de deux structures à deux degrés de liberté en compression. La dynamique de ces structures étant déjà compliquée à résoudre analytiquement, on étudie les équilibres et la stabilité de ces systèmes de façon quasi-statique, par la seule analyse de leurs énergies potentielles (uniquement énergies potentielles élastiques et de travail de la force de compression, pas d'énergie potentielle de gravité). a) Système I. b) Système II.

— Déterminer l'énergie potentielle en fonction des coordonnées généralisées θ_1 et θ_2.

— Montrer que la position $\theta_1 = \theta_2 = 0$ est un équilibre.

— Discuter la stabilité de la position d'équilibre triviale $\theta_1 = \theta_2 = 0$ en fonction du paramètre adimensionnel $\lambda = FL/k$.

Exercice 2 :

Reprendre les mêmes questions pour le système II (Figure 3b)). On étudiera le cas où $\rho = 1/5$, avec les ressorts à considérer au repos pour $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

TD 6 : Équilibre et stabilité d'une structure continue

Exercice 1 :

A l'aide des définitions des dérivées premières et secondes de la fonctionnelle $I(f)$ dans la direction φ

$$I'(f)(\varphi) = \frac{d}{dh}\left[I\left(f + h\varphi\right)\right]_{h=0} \qquad \text{et} \qquad I''(f)(\varphi) = \frac{d^2}{dh^2}\left[I\left(f + h\varphi\right)\right]_{h=0}, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Déterminer la dérivée première et seconde de la fonctionnelle suivante, où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière :

$$I_2(f) = \int_0^1 f'(x)^4 dx + f'(0) + f(1)^2$$

Exercice 2 :

On considère une barre élastique homogène, encastrée en $x = 0$ à déplacement axial imposé $u(L) = u_L$ en $x = L$. Soit E le module de Young de la barre et A l'aire de la section droite.

La configuration d'équilibre de la barre est alors donnée par le champ de déplacement u qui rend stationnaire dans l'espace des déplacements admissibles l'énergie potentielle (ici l'énergie élastique) :

$$\mathcal{U}(u) = \int_0^L \frac{EA}{2} u'(x)^2 dx$$

- Spécifier les espaces des déplacements et variations admissibles.
- Déterminer la dérivée première de la fonctionnelle.
- En déduire les conditions de stationnarité (équation d'Euler + conditions aux limites).
- Déterminer en tout point le champ de déplacement $u(x)$ solution du problème et l'effort axial $N(x) = EAu'(x)$.

Exercice 3 :

Reprendre les mêmes questions pour une barre élastique homogène, encastrée en $x = 0$ soumise à une force horizontale $\underline{F} = F\underline{x}$ en $x = L$. L'énergie potentielle totale, définie comme la différence entre l'énergie élastique et le travail des efforts extérieurs est donc :

$$\mathcal{U}(u) = \int_0^L \frac{EA}{2} u'(x)^2 dx - Fu(L)$$