

## TP 2.2 - Le flambage de la pâquerette

On considère une pâquerette représenté par une tige élastique de longueur  $L = 10$  cm, de section circulaire de rayon  $r = 2$  mm, de module d'Young  $E = 10$  MPa, fixée verticalement dans le sol (voir Figure 1). On supposera que la tige est non pesante et que toute la masse est concentrée dans la fleur modélisée par une masse  $M$  (on supposera  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>). La forme de la tige est donnée par la fonction  $\theta(s)$  qui définit l'orientation locale avec  $s$ , la distance curviligne le long de la tige. Par convention,  $\theta = 0$  représente une tangente horizontale et  $\theta = \pi/2$  une tangente verticale. La condition au limite d'orientation de la tige à l'extrémité fixe est  $\theta(0) = \pi/2$ .

A l'état initial, la fleur n'a pas encore poussée, la masse  $M$  est négligeable, et la tige possède une courbure naturelle  $\kappa_0$  (voir Figure 1.(a)). Sous l'effet de la masse de la fleur développée, la tige, que l'on suppose inextensible, est contrainte à se déformer quasi-statiquement dans le plan  $(x, y)$ . Le but de ce TP est de déterminer l'état d'équilibre de la tige en fonction de la masse  $M$  de la fleur.

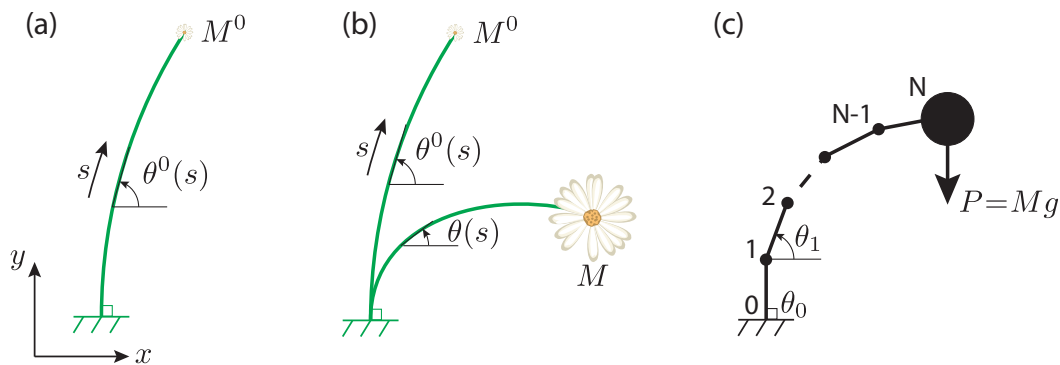


Figure 1: Modélisation du problème de la pâquerette. (a) A l'état initial, la masse  $M$  est négligeable et la tige adopte une configuration naturelle  $\theta(s) = \kappa_0 s + \pi/2$ . (b) Sous l'effet de l'augmentation quasi-statique de la masse  $M$ , la tige élastique se déforme. (c) Discretisation de la tige par  $N$  segments et  $N + 1$  noeuds et de la fonctionnelle  $\theta(s)$  par l'ensemble discret  $\theta(s_i) = \theta_i$ .

### 1 Expression analytique de l'énergie du système

Une équation paramétrique  $\mathbf{r}(s) = (x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y)$  de la tige peut être donnée en fonction de  $\theta(s)$  via la relation :

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \frac{(x(s)\mathbf{e}_x + y(s)\mathbf{e}_y)}{ds} = \mathbf{t}(\theta(s)) = \cos(\theta(s))\mathbf{e}_x + \sin(\theta(s))\mathbf{e}_y$$

où  $\mathbf{t}(\theta)$  est la tangente locale en  $\theta(s)$ . En utilisant l'extrémité fixe de la tige  $s = 0$  comme origine des coordonnées, on obtient :

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(s') ds', \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(s') ds'.$$

L'énergie de flexion élastique de la tige est proportionnelle au carré de sa courbure  $\kappa(s) = \theta'(s)$  moins sa courbure initiale  $\kappa_0$ , ce qui donne

$$\mathcal{E}_{el}(\theta) = \frac{EI}{2} \int_0^L (\theta'(s) - \kappa_0)^2 ds$$

où  $I = \pi r^4/2$  est le moment d'inertie de la tige de section circulaire.

La masse de la fleur  $M$  de poids  $\mathbf{P} = -Mg\mathbf{e}_y$  à l'extrémité libre de la tige ajoute l'énergie potentielle au système :

$$Mgy(L) = Mg \int_0^L \sin \theta(s) ds.$$

L'énergie potentielle associée à l'état  $\theta(s)$  peut être décomposée en la somme de l'énergie de flexion et de l'énergie gravitationnelle tel que

$$\mathcal{E}_{tot}(\theta) = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} (\theta'(s) - \kappa_0)^2 + Mg \sin \theta(s) \right] ds.$$

Afin de faire ressortir les paramètres importants qui régissent la forme de la pâquerette, nous allons introduire des variables sans dimensions. L'abscisse curviligne adimensionnée s'écrit  $\bar{s} = s/L$  et varie entre 0 (encastrement) et 1 (le bout de la tige). De plus, nous introduisons  $\bar{\kappa}(\bar{s}) = L\kappa(s)$ . En se servant des variables introduites, l'énergie potentielle précédente peut se réécrire sous la forme sans dimensions suivante:

$$\bar{\mathcal{E}}_{tot}(\bar{\theta}) = \frac{L}{EI} \mathcal{E}_{tot} = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\bar{\theta}'(\bar{s}) - \bar{\kappa}_0)^2 + \lambda \sin \bar{\theta}(\bar{s}) \right] d\bar{s}$$

qui est caractérisée par les 2 paramètres:

$$\bar{\kappa}_0 = L\kappa_0, \quad \lambda = \frac{MgL^2}{EI}$$

representant le rapport entre la longueur de la tige et son rayon de courbure naturelle  $1/\kappa_0$  et le rapport entre le poids de la fleur et la rigidité de flexion de la tige.

Les états d'équilibre sont le  $\bar{\theta}(s)$  qui rendent *stationnaire* l'énergie potentielle  $\bar{\mathcal{E}}_{tot}$  dans l'espace des configurations admissible  $\Theta$ . Les équilibres *stables* sont, parmi les points de stationnarité, ceux correspondant à des *minima* locaux de  $\bar{\mathcal{E}}_{tot}$ . Le problème de recherche des états d'équilibre peut alors s'écrire sous la forme variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } \theta \in \Theta : \quad \mathcal{E}'(\theta)(\hat{\theta}) = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \hat{\Theta}$$

Pour le problème en question (dans la suite, on utilisera des variables sans dimensions, sans plus utiliser de barres pour faire la distinction):

- Préciser les espaces  $\Theta$  et  $\hat{\Theta}$
- Montrer que

$$\mathcal{E}'(\theta)(\hat{\theta}) = \int_0^1 \left[ (\theta'(s) - \bar{\kappa}_0) \hat{\theta}'(s) + \lambda \cos \theta(s) \hat{\theta}(s) \right] ds$$

où l'on définit la dérivée directionnelle de la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  en  $\theta$  dans la direction  $\hat{\theta}$  par

$$\mathcal{E}'(\theta)(\hat{\theta}) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{E}(\theta + h\hat{\theta}) \right|_{h=0}$$

- *Devoir à la maison:* Dériver à partir de la formulation variationnelle l'équation d'équilibre et les conditions aux limites pour ce problème.

Calculer analytiquement ces états d'équilibres est faisable quoique compliqué à cause des termes nonlinéaires dans l'expression de l'énergie. Dans ce TP, nous discrétiserons l'énergie à l'aide de la méthode des éléments finis pour accéder numériquement aux solutions par la méthode de Newton-Raphson.

## 2 Problème linéarisé pour des pâquerettes initialement droites: charges critiques de flambement et modes associés

### 2.1 Formulation et solution analytique

On considère le cas  $\kappa_0 = 0$  (courbure initiale nulle). On cherche une approximation des solutions d'équilibre avec un modèle linéarisé autour de la configuration verticale  $\theta_0(s) = \pi/2$ . En écrivant la configuration sous la forme  $\theta(s) = \theta_0(s) + h \Delta\theta$ , on peut faire un développement limité de  $\mathcal{E}'$  par rapport à  $h$ :

$$\mathcal{E}'(\theta_0 + h \Delta\theta)(\hat{\theta}) = \mathcal{E}'(\theta_0)(\hat{\theta}) + h \mathcal{E}''(\theta_0)(\Delta\theta)(\hat{\theta}) + o(h)$$

où

$$\mathcal{E}''(\theta_0)(\Delta\theta)(\hat{\theta}) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{E}'(\theta_0 + h \Delta\theta)(\hat{\theta}) \right|_{h=0}$$

- Montrer que

$$\mathcal{E}''(\theta_0)(\Delta\theta)(\hat{\theta}) = a_k(\Delta\theta, \hat{\theta}) - \lambda a_g(\Delta\theta, \hat{\theta})$$

où

$$a_k(\Delta\theta, \hat{\theta}) = \int_0^1 \Delta\theta'(s) \hat{\theta}'(s) ds, \quad a_g(\Delta\theta, \hat{\theta}) = \int_0^1 \sin \theta_0(s) \Delta\theta(s) \hat{\theta}(s) ds$$

sont deux formes bilinéaires définies positives dans  $\hat{\Theta} \times \hat{\Theta}$ .

- *Equilibre linéarisé autour de  $\theta_0$ .* En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en  $h$ , montrer que l'on obtient la formulation variationnelle de la condition d'équilibre linéarisée autour de  $\theta_0$

$$\text{Trouver } \Delta\theta \in \hat{\Theta} : a_k(\Delta\theta, \hat{\theta}) - \lambda a_g(\Delta\theta, \hat{\theta}) = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \hat{\Theta}. \quad (1)$$

- *Charges critiques et modes de flambement.* Le problème (1) admet toujours la solution triviale nulle. On définit les charges critiques de flambement  $\lambda_i$  les valeurs du paramètre de chargement pour lesquelles des solutions non nulles  $\Delta\theta_i$  (modes de flambement) sont possibles. Le problème de flambement a donc la formulation variationnelle suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } (\lambda_i \in \mathcal{R}, \Delta\theta_i \in \hat{\Theta}) : a_k(\Delta\theta_i, \hat{\theta}) - \lambda_i a_g(\Delta\theta_i, \hat{\theta}) = 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \hat{\Theta}.} \quad (2)$$

*Devoir à la maison:* Montrer que la formulation forte de ce problème s'écrit

$$\text{Trouver } (\lambda_i \in \mathcal{R}, \Delta\theta_i \in \hat{\Theta}) : \Delta\theta''(s) + \lambda \Delta\theta(s) = 0, \quad \Delta\theta(0) = 0, \quad \Delta\theta'(L) = 0$$

et que les solutions de ce problème sont données par

$$\lambda_i = (2i - 1)^2 \frac{\pi^2}{4}, \quad \Delta\theta_i(s) = A \sin \lambda_i s, \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

où  $A$  est une constante arbitraire.

## 2.2 Discrétisation et résolution numérique

On calcule maintenant la solution en discrétisant  $\theta(s)$  avec des éléments finis linéaires. On dénote par  $X \in \mathcal{R}^n$  le vecteur des inconnues nodales associés à la fonction  $\theta(s)$ .

- *Devoir à la maison:* Montrer que la formulation discrétisée du problème (2) peut se mettre sous la forme

$$\text{Trouver } (\lambda_i \in \mathcal{R}, \theta_i \in \hat{\Theta}) : (K - \lambda_i G)X^{(i)} = 0 \quad (3)$$

où  $K$  et  $G$  sont les matrices symétriques et (semi)-définies positives associés aux formes bilinéaires  $a_k$  et  $a_g$ .

- Écrire un script `paquerette_flambement.py` qui résout numériquement ce problème avec **FEniCS**, en déterminant les 4 premières charges critiques de flambement. Comparer ces valeurs avec les solutions analytiques pour différents maillages (avec 10, 100, 1000 éléments par exemple). Afficher graphiquement les modes de flambement correspondants. Pour la solution du problème aux valeurs propres, on utilisera la librairie dédiée **SLEPc**, pour laquelle une interface est disponible dans **FEniCS** (voir `SLEPcEigenSolver`).

## 3 Calcul numérique d'un état d'équilibre de la pâquerette par la méthode de Newton-Raphson

On se propose maintenant de résoudre le problème *non-linéaire* de recherche des configurations d'équilibre pour des  $\kappa_0$  et  $\lambda$  fixés à des valeurs arbitraires, après discrétisation par éléments finis. Pour ce faire on implémentera l'algorithme de Newton dans **FEniCS**.

### 3.1 Formulation et algorithme de Newton

Monter que pour  $\kappa_0$  et  $\lambda$  fixés, l'algorithme de Newton s'écrit sur la forme

- Initialisation:  $\theta_0 = \dots, \text{iter} = 0$
- **while**  $\text{error} > \text{tol}$  **and**  $\text{iter} < \text{maxiter}$ :
  - Résoudre le problème variationnel

$$\text{Trouver } \Delta\theta \in \hat{\Theta} : a(\Delta\theta, \hat{\theta}) = \ell(\hat{\theta}), \quad \forall \hat{\theta} \in \hat{\Theta}$$

avec

$$a(\Delta\theta, \hat{\theta}) = \mathcal{E}''(\theta_0)(\Delta\theta)(\hat{\theta}), \quad \ell(\hat{\theta}) = -\mathcal{E}'(\theta_0)(\hat{\theta})$$

- Mise à jour :  $\theta_0 \leftarrow \theta_0 + \Delta\theta, \quad \text{iter} \leftarrow \text{iter} + 1, \quad \text{error} \leftarrow \|\mathcal{E}'(\theta_0)(\hat{\theta})\|$

### 3.2 Implémentation et résolution numérique

- Écrire un script `paquerette_newton.py` qui implémente la résolution numérique avec l'algorithme de Newton dans **FEniCS**.

- Représenter graphiquement la configuration d'équilibre pour une masse de la fleur  $M = 5$  grammes et  $\kappa = -1 \text{ m}^{-1}$ . Pour initialiser l'algorithme, on prendra une valeur du vecteur solution initial  $\theta^0(s) = \pi/2 + \kappa_0 s$  et une tolérance  $tol = 10^{-10}$ .
- Etudier numériquement si l'état d'équilibre trouvé est stable (on pourrait utiliser SLEPc pour étudier les valeurs propres de la matrice de rigidité tangente).
- Relancez le script pour  $M = 10$  grammes. Que remarquez-vous ?

## 4 Calcul numérique de la courbe Masse-Déplacement transverse maximal

- En insérant la méthode de Newton-Raphson de la partie 3.2 dans une boucle sur l'incrément de masse  $\Delta M$ , calculez numériquement la courbe représentant la masse de la fleur en fonction du déplacement transverse maximal de la tige toujours pour  $\kappa = -1 \text{ m}^{-1}$ . On commencera à l'état trivial  $\theta = \theta^0$  et  $M = 0 \text{ g}$  et on prendra un incrément de masse  $\Delta M = 0.1 \text{ g}$  jusqu'à  $M = 10$  grammes. Pour chaque masse, on calculera le vecteur solution inconnu avec la méthode de Newton (toujours avec une précision  $e = 10^{-10}$  et on actualisera le vecteur  $\theta$  initial à chaque incrément de masse). On stockera les vecteurs de solutions calculés à chaque incrément de masse dans un fichier. Tracez l'évolution de la masse en fonction du déplacement transverse maximal.
- Lancer maintenant des calculs pour différentes courbures naturelles de la tige  $\kappa_0$ . On prendra par exemple  $\kappa = -0.01, -0.0001$  ou  $0 \text{ m}^{-1}$ . Expliquez numériquement et physiquement ce que l'on observe et comparez ces résultats à la masse critique d'Euler :

$$M_c = \frac{EI\pi^2}{4gL^2}$$

- Effectuer des expériences numériques pour essayer d'illustrer le comportement qualitatif du système en fonction des 2 paramètres  $\kappa_0$  et  $\lambda$ . On pourrait aussi étendre les calculs au problème des cheveux bouclés:

<http://www.dalembert.upmc.fr/alazarus/Publications/2014-Physical-Review-Letters-Mille.pdf>.