Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
Dynamique et modélisation de la turbulence

TD 1 - Turbulence Homogène Anisotrope.

On étudie dans cette PC les écoulements turbulents homogènes, pour lesquels on a

$$\bar{u}_i(\underline{x}, t) = A_{ij}(t) x_j, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} = 0 \tag{1}$$

On se limite au cas des écoulements incompressibles.

1. **Démonstration des équations de base**.

   (a) Démontrer l'équation de quantité de mouvement et de conservation de la masse pour le champ de vitesse moyen $\underline{\bar{u}}$ dans le cas général. Démontrer l'équation pour la pression moyenne $< P >$. Quels sont les mécanismes physiques qui agissent sur le champ moyen ?

   (b) Considérant le cas homogène, simplifiez les équations.

   (c) A partir de l'équation de quantité de mouvement associé à $\underline{\bar{u}}$, montrer que seules les matrices $\underline{\underline{A}}$ telles que

   $$\left(\frac{d}{dt} \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^2 \right)$$

   est symétrique sont admissibles.

   (d) Démontrer l'équation de quantité de mouvement et de conservation de la masse pour le champ de vitesse fluctuant $\underline{u}'$.

   (e) En déduire l'équation de Poisson que vérifie la pression fluctuante p'. Démontrer que p' est la somme de deux contributions: la pression rapide, qui dépend de $\underline{\underline{A}}$, et la pression lente, qui ne dépend que de $\underline{u}'$

   (f) Déduire de ce qui précède les équations de quantité de mouvement et de Poisson, dans lesquelles on néglige les termes non-linéaires selon $\underline{u}'$.

2. **Distorsion Rapide "sans pression": solution générale**.
   On va maintenant chercher à résoudre les équations de la RDT par une méthode lagrangienne. Pour simplifier le problème, on néglige les effets de pression et de la viscosité moléculaire.

   (a) Ecrire les équations du problème ainsi obtenu.

(b) Récrire ce problème sous forme lagrangienne le long d'une ligne de courant associée au cham moyen $\underline{\bar{u}}$.

(c) On écrit la solution lagrangienne le long de la trajectoire $\underline{x}(\underline{X}, t_0, t)$ sous la forme

$$u'_i(\underline{x}, t) = G_{ij}(x, t_0, t)u'_j(\underline{X}, t_0), \quad \dot{G}_{ij} = -A_{ik}G_{kj} \tag{2}$$

Donner l'expression correspondante pour les tensions de Reynolds $R_{ij}(x, t) = \overline{u'_i u'_j}(x, t)$.

3. **Cas des déformations+rotations constantes planes**

On restreint l'analyse aux combinaisons de déformations et de rotations coplanaires constantes en temps, pour lesquelles

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -D & -\Omega & 0 \\ \Omega & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On montre (admis ici) que, si $\underline{\underline{A}}$ est indépendante du temps, on a $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$, où $\underline{\underline{F}}$ est la matrice de Cauchy définie comme:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad \dot{F}_{ij} = A_{ik}F_{kj} \tag{4}$$

(a) Que représentent physiquement les réels D et Ω ?

(b) Trouver $\underline{\underline{F}}$ (astuce: trouver une équation du 2e ordre pour F_{ij}). Discuter les différents régimes obtenus en fonction du paramètre $\sigma = \sqrt{D^2 - \Omega^2}$.

(c) Trouver l'expression du tenseur de Reynolds dans le cas d'un écoulement initialement isotrope. En déduire l'évolution du tenseur d'anisotropie, et sa limite lorsque $t \longrightarrow +\infty$.