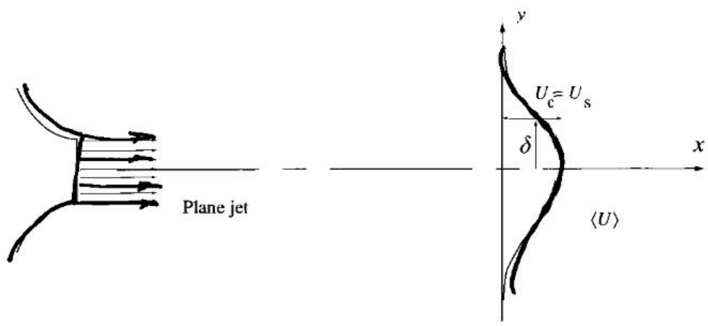
Université Pierre et marie Curie
Master 2. Dynamique et modélisation de la turbulence

TD 2 - Jet plan

Nous considérons un jet plan dans un milieu au repos généré par une ouverture de largeur H. La vitesse est initialement uniforme $u = U_0$. La pression peut toujours être assumée uniforme. Le nombre de Reynolds $Re_0 = \frac{U_0 H}{\nu} \gg 1$, est assez élevé pour que l'écoulement soit pleinement turbulent. **Cela nous permet de négliger la viscosité moléculaire.**



Le jet est dirigé le long de la coordonné longitudinale x, se développe selon la direction transverse y, et peut être considéré statistiquement indépendant de la direction z. **Le problème peut donc être considéré 2-D**. La largeur caractéristique du jet est appelé δ, la longueur caractéristique longitudinale est L.

Etant donné que nous sommes intéressés dans les quantités moyennes, on appliquera la décomposition de Reynolds. $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ (on pourra aussi utiliser les symboles $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$). Les vitesses caractéristiques sont U, V pour la composante x et y respectivement. U est la vitesse moyenne au centre du jet. L'écoulement est considéré statistiquement stationnaire.

On rappelle les équations de Navier-Stokes

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} &+ u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \\
\frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0
\end{aligned}
$$

Partie 1 : poser le problème

1. **Equations**
   Usant de la décomposition de Reynolds, écrire l'équation de continuité moyennée.
2. Ecrire les équations pour le moment de la vitesse moyenne (RANS). Le stress de Reynolds sera nommé $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$
3. Etant donné que le milieu est initialement au repos, donner les conditions limites à l'infini ($y = \pm\infty$), pour $\bar{u}, \bar{v}, R_{12}$.
4. **Analyse dimensionnelle**
   On assume que la croissance de la largeur du jet est suffisamment lente pour négliger les dérivées longitudinales par rapport aux transverses :
   $$\frac{\frac{\partial}{\partial x}}{\frac{\partial}{\partial y}} = O(\delta/x) \ll 1 \ , \tag{1}$$
   où le rapport $\delta/x = \alpha$ représente le taux d'étalement.
   Utilisant l'équation de continuité moyenne (point 1), faire l'analyse dimensionnelle et montrer que
   $$V \sim \alpha U$$
5. Afin de résoudre le problème, on doit modéliser le tenseur de Reynolds. On va utiliser l'approximation de viscosité turbulente. La viscosité turbulente aura la forme
   $$\nu_t = C U^a \delta^b, \tag{2}$$
   où C est un paramètre constant du modèle. Donner les exposant a, b par analyse dimensionnelle.
   Donner une estimation du paramètre C du modèle sachant que le nombre de Reynolds défini $Re_t = \frac{U\delta}{\nu_t}$ peut être approché $Re_t \approx 20$.
   Justifier l'usage de U, δ comme échelle de longueur en (2).
6. **Flux de moment** Utilisant l'analyse dimensionnelle de (1), et le fait que l'écoulement est au repos à $|y| \gg \delta$, simplifier les équations RANS longitudinales and transversales obtenues à la question (2) à une seule équation pour le moment longitudinal. Il est rappelé que les termes visqueux et de pression peuvent être négligés.
7. A l'aide de l'équation de continuité, montrer que l'éq. moyenne pour le moment longitudinal peut être écrite
   $$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial R_{12}}{\partial y} \tag{3}$$
8. On définie le flux total de moment par unité de longueur
   $$J = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2 dy \ , \tag{4}$$

Intégrer l'équation (3) sur y. Se souvenant que l'écoulement est au repos à l'infini, utiliser la condition limite définie à la question 3, et montrer que le flux total du moment est indépendant de x :

$$\frac{dJ}{dx} = 0$$

Donner les dimensions de J.

9. Loin de la sortie de la tuyère, $x \gg H$, et jusqu'à ce que le nombre de Reynolds du jet reste assez large pour pouvoir négliger les effets visqueux sur l'écoulement moyen, les seuls paramètres qui peuvent contrôler le comportement du jet sont : le moment conservé J, et x. Par l'analyse dimensionnelle, trouver les deux groupes sans dimensions qui peuvent être formés avec les quantités pertinentes : J, x, δ, U.
10. Utilisant cette information, obtenir la loi d'évolution pour $U(x)$, $\delta(x)$ et le nombre de Reynolds local de l'écoulement $Re = \frac{U\delta}{\nu}$.
11. Si le jet est initialement turbulent, reste-t-il toujours turbulent ou y a-t-il relaminarisation ?

Partie 2 : Solution auto-similaire

On cherche une solution auto-similaire pour la vitesse moyenne.

On définie l'épaisseur du jet δ comme le point où la vitesse moyenne est $\bar{u}(\delta) = U/2$. Les lois obtenues précédemment suggèrent que l'écoulement devrait être exprimé en terme de la seule varible $\xi = y/\delta$.

1. Puisque l'écoulement est incompressible, il est utile d'utiliser la fonction de courant ψ, plutôt que la vitesse, pour imposer l'incompressibilité. On rappelle la définition

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \bar{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

La solution similaire a la forme

$$\Psi = A f(\xi) \ ,$$

où A est donné par les échelles pertinentes. Par analyse dimensionnelle, donner A en termes de J, δ. Justifier le choix de ce deux échelles.

2. Se souvenant que $\delta = \alpha x$, eq. (1), calculer la vitesse en termes de f. Ces sont les solutions similaires en forme symbolique.
3. Utilisant la définition (4), montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} {f'}^2 d\xi = 1 \qquad (5)$$

Donner les conditions limites pour f'.

En outre, étant donné que par symétrie $\xi = 0$ est une ligne de courant, on peut définir $f(0) = 0$.

4. On regarde maintenant d'écrire l'équation pour f.
   Utilisant l'approximation de viscosité turbulente $R_{12} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, avec ν_t donné par (2), écrire l'équation différentielle pour le moment en fonction de f.
5. Intégrer les équations précédentes, utilisant les conditions limites trouvées à la question 4, et montrer que on obtient l'équation suivante
$$Kf' = f_\infty^2 - f^2,$$
   où K est une constante, dont l'expression peut être déduite du point précédent.
6. La solution de l'équation est donné par
$$f(\xi) = f_\infty tanh(f_\infty \xi / K) \tag{6}$$
   De cette équation, calculez $f'(0)$, et utilisant la définition de K donner la valeur de f_∞/K.
7. On peut utiliser les valeurs expérimentales pour le taux de croissance, $d\delta/dx \approx 0.1$, pour estimer la constante empirique C utilisé en (2). Il se trouve que $C \approx 0.32$.
   Est-ce que cela est en accord avec la réponse au point 5 de la première partie ? Quel est la valeur impliquée pour le nombre de Reynolds turbulent $Re_t = U\delta/\nu_t$?
8. Le flux de masse moyen par unité de longueur est définie
$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} dy \ .$$
   Par analyse dimensionnelle, calculer le comportement avec x du flux de masse moyen. Qu'on peut déduire à propos de l'entrainement du fluide par (du) le jet ? Y a-t-il entrainement (ou expulsion) ?
9. Calculer l'évolution de la vitesse latéral correspondante à l'infini, v_I.
10. Calculer f_∞, utilisant le fait que $sech^2 h = 1/2$, pour $h = (1+\sqrt{2}) \approx 0.88$.