Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
Dynamique et modélisation de la turbulence

TD 3 - Couche limite turbulente.

Ce TD est dédié à l'analyse des propriétés du champ moyen turbulent au sein d'une couche limite turbulente. Pour simplifier l'analyse (sans perte de généralité quant aux conclusions), on choisit une configuration de canal plan turbulent de longueur et de largeur infinies. L'écoulement est choisi incompressible. L'écoulement moyen se fait dans la direction $\underline{e}_x$, et la hauteur du canal selon la direction $\underline{e}_y$ est $2h$. Les deux parois solides sont positionnées en $y = 0, 2h$. Sauf indication contraire, on pose donc que le champ moyen est invariant par translation suivant $\underline{e}_x$ et $\underline{e}_z$, et qu'il est symétrique par rapport à la ligne $y = h$.

1. **Détermination de la forme analytique du champ de vitesse moyen turbulent**. On va démontrer (de manière classique) l'expression du cham moyen turbulent.

   (a) Ecrire les équations de quantité de mouvement pour le champ moyen turbulent. On notera $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$.

   (b) En intégrant les équations précédentes suivant y, démontrer la relation fondamentale suivante:

   $$-R_{12}(y) + \nu \frac{d}{dy}\bar{u}(y) = u_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (1)$$

   où la vitesse de frottement est définie comme $u_\tau = \sqrt{\nu \frac{d}{dy}\bar{u}(y = 0)}$. On démontrera la relation $u_\tau^2 = -h \frac{\partial}{\partial x}\bar{p}(x, y = 0)$. On définit le *nombre de Reynolds de fottement* comme $Re_\tau = hu_\tau/\nu$.

   (c) **Solution extérieure**. On va tout d'abord étudier la forme de $\bar{u}(y)$ dans la région centrale du canal. Dans cette région, une échelle de longueur pertinente pour décrire le mouvement est h. On pose $\eta = y/h$.

      i. Déduire de (1) la relation:

      $$-\frac{R_{12}}{u_\tau^2} + \frac{1}{Re_\tau}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\bar{u}}{u_\tau}\right) = 1 - \eta \quad (2)$$

      En déduire une échelle caractéristique pertinente pour R_{12} à grand nombre de Reynolds.

      ii. On observe (admis ici) que l'équation de bilan de l'énergie cinétique turbulente se simplifie sous la forme (équilibre entre production et dissipation):

$$-R_{12}\frac{d}{dy}\bar{u} = \varepsilon \tag{3}$$

où ϵ est dissipation d'énergie cinétique turbulente. Par analyse dimensionnelle, trouver une expression de ε en fonction de u_τ et h. En déduire, à l'aide de la question précédente, que, dans la limite des très grands nombres de Reynolds, on peut écrire:

$$\frac{\bar{u}(\eta) - \bar{u}_c}{u_\tau} = F(\eta) \tag{4}$$

où $F(\eta)$ est une fonction (inconnue) sans dimension de l'ordre de l'unité telle que $F(1) = 0$, et $\bar{u}_c$ est la vitesse moyenne au centre du canal.

(d) **Solution intérieure**. On va maintenant étudier $\bar{u}$ à proximité de la paroi solide. Dans cette région, les effets visqueux sont importants et ne peuvent plus être négligés. On définit donc l'échelle de longueur visqueuse $l_\nu = \nu/u_\tau$. On notera dans ce qui suit par un exposant '+' toutes les quantités adimensionnées en utilisant l_ν et u_τ.

i. Déduire de (1) la relation:

$$-\frac{R_{12}}{u_\tau^2} + \frac{d}{dy^+}\bar{u}^+ = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \tag{5}$$

ii. En déduire que, pour les très grands nombres de Reynolds, on peut écrire

$$\bar{u}^+ = f(y^+), \quad -\frac{R_{12}}{u_\tau^2} = g(y^+), \quad f(0) = g(0) = 0 \tag{6}$$

où f et g sont des fonctions inconnues de l'ordre de l'unité.

(e) **Raccord des solutions intérieure et extérieure: zone logarithmique**. On va maintenant assurer que les deux solutions, intérieure et extérieure, se raccordent. On impose que $d\bar{u}/dy$ se raccorde continuement. En déduire les relations

$$F(\eta) = \frac{1}{\kappa}\log\eta + cste, \eta \ll 1, \quad f(y^+) = \frac{1}{\kappa}\log y^+ + cste, y^+ \gg 1 \tag{7}$$

où $\kappa \simeq 0,41$ est la constante introduite par Von Karman en 1931.

(f) **Compatibilité avec la condition d'adhérence: sous-couche visqueuse**. La solution intérieure déterminée au moyen de la condition de raccord est-elle compatible avec la condition d'adhérence à la paroi ? Donner une explication physique.

En prenant en compte l'amortissement des fluctuations turbulentes très près de la paroi, déduire de (5) que

$$u^+ = y^+, \quad y^+ \longrightarrow 0 \tag{8}$$

2. **Forme globale du frottement turbulent - formule FIK** (Fukagata et al., *Phys. Fluids*, 2002)
On va maintenant étudier les différents phénomènes qui contribuent à produire le frottement en régime turbulent. On utilisera la formule globale récemment démontrée par Fukagata, Iwamoto et Kasagi, qui a l'avantage de permettre une analyse très fine des dispositifs de réduction de trainée.

   Dans cette partie, on choisit comme échelle caractéristique la demi-hauteur h et le double de la vitesse débitante $\bar{u}_b$.

   (a) On définit le *coefficient de frottement* $C_f = u_\tau^2 / \frac{1}{2}\bar{u}_b^2$. Montrer que

   $$\frac{1}{8}C_f = \frac{d}{d\hat{y}}\left(\hat{R}_{12}(\hat{y}) - \frac{1}{Re_b}\frac{d}{d\hat{y}}\hat{\bar{u}}(\hat{y})\right), \quad Re_b = \frac{h2\bar{u}_b}{\nu} \qquad (9)$$

   (b) En appliquant $\int_0^1 d\hat{y} \int_0^{\hat{y}} dy \int_0^{\hat{y}} dy$ à la formule précédente, montrer que:

   $$C_f = \frac{12}{Re_b} + 12\int_0^1 2(1-y)(-R_{12})dy \qquad (10)$$

   Interpréter physiquement cette formule. Quelles indications donne-t-elle sur les possibilités de réduire la trainée turbulente ?