

TD 4 - Énergie turbulente. Modèle statistique $K - \varepsilon$.

On étudie le bilan d'énergie turbulente. On va utiliser le modèle statistique de turbulence $K - \varepsilon$, dans sa version proposée par Jones et Launder en 1972. Ici, K désigne l'énergie cinétique turbulente et ε le taux de dissipation associé. On rappelle ci-dessous les équations du modèle:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \mathcal{P} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} + \nu \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{K} (C_{\varepsilon_1} \mathcal{P} - C_{\varepsilon_2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

Les termes de production $\mathcal{P}$ et de viscosité turbulente ν_t sont donnés par les relations suivantes:

$$\mathcal{P} \equiv -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \simeq 2\nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} = \nu_t |\bar{S}|^2 \quad (3)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Dans ce qui suit, on se restreint aux écoulements incompressibles. De plus, on fait l'hypothèse que $\nu_t \gg \nu$ et que $\sigma_K = 1$.

1. Turbulence isotrope en décroissance libre.

On considère la décroissance autosimilaire de la turbulence isotrope. On se place dans le cas où le champ moyen $\bar{u}$ est nul. Cette configuration approche la turbulence de grille.

- (a) Récrire, à partir de (1) et (2), les équations d'évolution de K et de ε pour l'écoulement considéré.
- (b) En déduire une expression de la forme

$$\frac{\partial K}{\partial t} \propto K^{\beta_1} \quad (5)$$

où β_1 est une fonction de C_{ε_2} que l'on explicitera.

- (c) En déduire l'expression suivante:

$$K(t) = K(0) \left(\frac{t}{t_0} + 1 \right)^n \quad (6)$$

- (d) En déduire l'expression pour ε .
Discuter le résultat.

2. Cisaillement homogène.

On considère maintenant le cas de la turbulence homogène anisotrope soumise à un cisaillement pur. On posera $|S| = S$.

- (a) Récrire les équations d'évolution de K et ε adaptées pour cet écoulement.
(b) Proposer une échelle de temps turbulente τ . Y a-t-il une relation entre τ et S ?
(c) Considérant τ et $\mathcal{P}/\varepsilon$ constants, trouver la solution en fonction de ces paramètres.
(d) Discuter le résultat, sachant que $\mathcal{P}/\varepsilon \approx 1.7$.

3. Relations pour la couche limite turbulente.

On étudie la zone logarithmique de la couche limite turbulente, dans laquelle le bilan d'énergie cinétique est approché sous la forme "production = dissipation". En considérant un repère tel que $\vec{U} = (\bar{u}(y), 0, 0)$, on rappelle que

$$\mathcal{P} = -\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7)$$

et que, dans la zone logarithmique, le profil moyen exprimé en unités de paroi est donné par

$$\bar{u}^+(y^+) = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + C \quad (8)$$

avec $\kappa \simeq 0,41$ et $C = 5,1$. On rappelle que les unités de parois sont obtenues en utilisant la viscosité ν et la vitesse de frottement u_τ .

- (a) Rappeler la définition de u_τ .
(b) Trouver une expression de $d\bar{u}/dy$ en fonction de u_τ, κ et y .
(c) On fait l'hypothèse que, dans la zone logarithmique, $-\overline{u'v'}(y) = \text{constante} = u_\tau^2$. En déduire une expression de $\mathcal{P}$ en fonction de u_τ, κ et y .
(d) En utilisant les résultats précédents, trouver une expression de ν_t en fonction de u_τ, κ et y .

4. Couche limite turbulente: conditions aux limites pour K et ε sur la paroi solide.

On s'intéresse maintenant à la détermination des conditions aux limites à la surface de la paroi solide (positionnée en $y = 0$ par convention) au sein d'une couche limite turbulente de plaque plane.

(a) Montrer que l'on a

$$K(0) = 0, \quad \frac{d}{dy}K(0) = 0 \quad (9)$$

(b) Les deux conditions précédentes suffisent pour fermer le système (1) - (2). Mais, en pratique, la condition de Neumann sur K est abandonnée au profit d'une condition de Dirichlet pour ε . Trouver cette condition en prenant la limite de (1) pour $y \rightarrow 0$ (astuce : considérer le développement de Taylor de K en $y = 0$). En déduire que

$$\varepsilon(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\nu K}{y^2} \quad (10)$$

