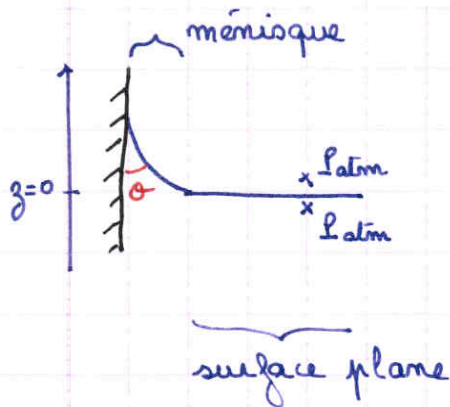
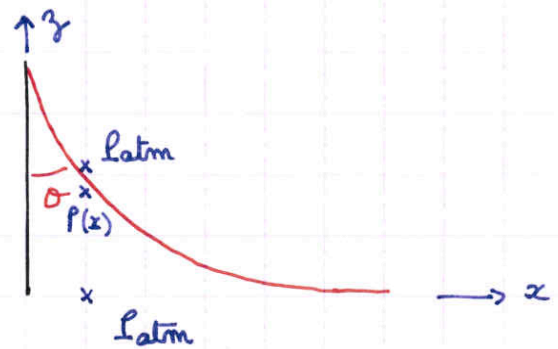


• Le ménisque



• Equation du ménisque



On a  $f(x) < l_{atm}$ .

La formule du saut de Laplace donne :

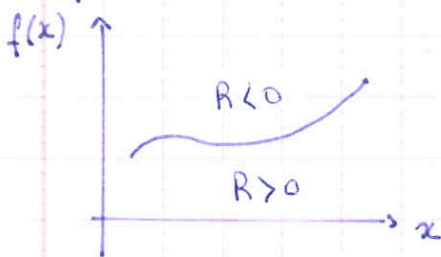
$$\rightarrow \Delta p = p_{atm} - (p_{atm} - \rho g z) = \frac{-\sigma}{R(x)}$$

↙ rayon de courbure en x.

→ Equation du ménisque :

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\rho g}{\sigma} z$$

• Que vaut  $R(x)$  ?



• Si  $f' \ll 1$ , alors  $1/R = -f''(x)$ .  
• Dans le cas général :

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{-f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

→ L'interface du ménisque s'écrit en  $z = f(x)$  :

$$\frac{-f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}} = \frac{-\rho g}{\sigma} f(x)$$

Supposons que  $\theta \approx \frac{\pi}{2}$  (interface quasiment plane).  
On a alors :

$$f''(x) - \frac{\rho g}{\sigma} f(x) = 0.$$

$$f(x) = A \exp\left(\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x\right).$$

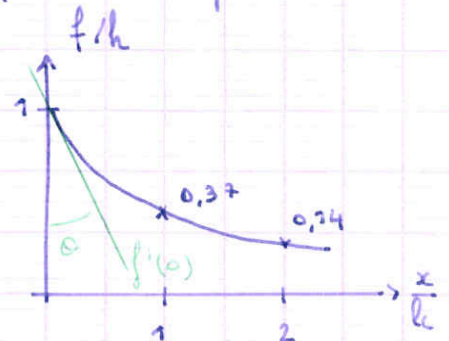
L'interface ne va pas jusqu'à l'infini quand  $x \rightarrow +\infty$ .

$$f(x) = h \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x\right)$$

-  $h$  hauteur maximale

-  $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = l_c$  : longueur capillaire ( $\approx 2$  mm pour de l'eau).

$$f(x)/h = \exp\left(-\frac{x}{l_c}\right)$$



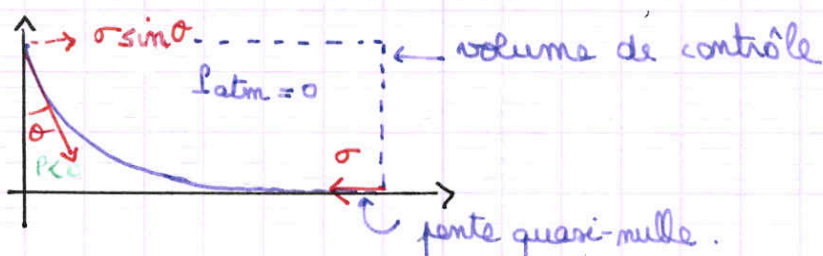
•  $h$  et angle de contact :

$$f(x) = h \exp\left(-\frac{x}{l_c}\right) \text{ et } f'(0) = -\frac{h}{l_c} \text{ et } \tan \theta = -\frac{1}{f'}$$

$$\text{Donc } h = \frac{l_c}{\tan \theta}$$

$$f(x) = \frac{l_c}{\tan \theta} \exp\left(-\frac{x}{l_c}\right)$$

• Longueur non-linéaire du ménisque.

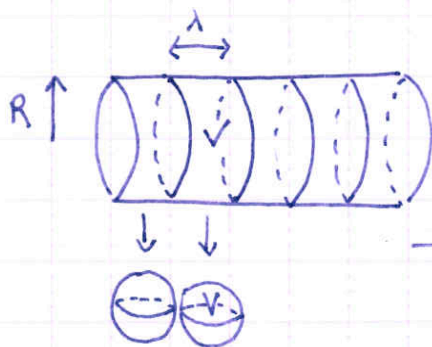


A l'équilibre, la pression négative tire le fluide vers la paroi :

$$\sigma \sin \theta + \int_0^h \rho g z \cdot dz = \sigma$$

→ On trouve  $h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sin \theta)}{\rho g}}$

Instabilité de Rayleigh-Plateau



$$E_V = \sigma \cdot S$$

→ Quelle configuration minimise la surface ?

$V = \lambda \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi r^3$  par conservation du volume.

$S_{\text{cylindre}} = 2\pi R \lambda$   
 $S_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$

Si  $\frac{S_S}{S_C} > 1$  : stable,  $< 1$  instable.

$$\frac{S_C}{S_S} = \frac{2\pi R \lambda}{4\pi r^2} = \frac{\lambda}{2} \frac{R}{r^2} \text{ et } r = \left(\frac{3}{4} \lambda R^2\right)^{1/3}$$

$$\frac{S_C}{S_S} = \frac{\lambda R}{2} \left(\frac{3}{4} \lambda R^2\right)^{-2/3} = \dots$$

$$\frac{S_S}{S_C} \approx 1,65 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{1/3}$$

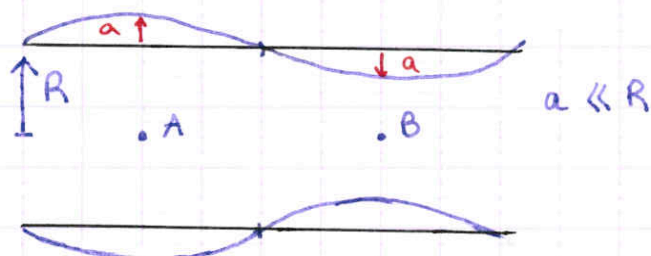
→ instable pour les grands  $\lambda$

→ longueur d'onde critique d'instabilité

$$\lambda_c = \frac{3R}{2}$$

Autre approche

$$r = R \left(1 + a \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)\right)$$



- Si  $P_B > P_A$ , on a un écoulement de B vers A qui vient amplifier la perturbation.

$$P_A = P_{atm} + \underbrace{\frac{\sigma}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}}_{>0}$$

avec  $R_1$ , le rayon de courbure dans la section perpendiculaire à l'axe du cylindre, et  $R_2$  dans le plan de l'axe du cylindre.

$$P_B = P_{atm} + \frac{\sigma}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}$$

$>0 \quad <0$

$$\text{et } \frac{1}{R_2} \approx \frac{-\partial^2 z}{\partial x^2} = +\frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ra \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$= +\frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ra \quad \underbrace{\quad}_{=1}$$

$$P_A = P_{atm} + \sigma \left( \frac{1}{R+ar} + Ra \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right)$$

$$P_B = P_{atm} + \sigma \left( \frac{1}{R-ar} - Ra \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right)$$

→ Instabilité si  $P_B > P_A$

$$\frac{1}{R-ar} - Ra\alpha^2 > \frac{1}{R+ar} + Ra\alpha^2 \quad : \text{notons } \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\alpha = \alpha R$

$$\frac{1}{1-a} - a\alpha^{-2} > \frac{1}{1+a} + a\alpha^{-2}$$

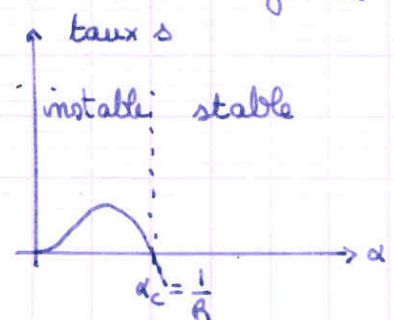
$$(1+a) - a\alpha^{-2} > (1-a) + \alpha^{-2}a \Leftrightarrow 2a > 2a\alpha^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 R^2 < 1$$

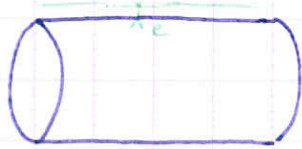
→ Critère d'instabilité  $\alpha R < 1 \rightarrow \lambda > 2\pi R$

→ le système est instable lorsque la longueur d'onde est plus grande que le périmètre. Quelle est la longueur d'onde la plus instable ?  $\lambda = 2\pi R \sqrt{2}$

$$a(t) = a_0 \exp(st)$$



• Lubrication



Instable si  $\lambda > 2\pi (R+e)$ ,  $e \ll R$ .