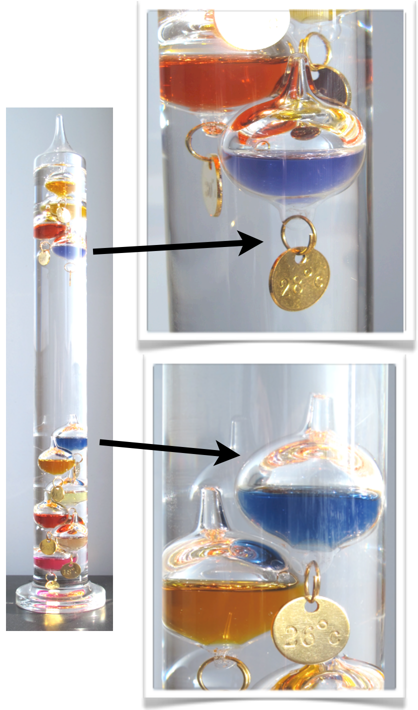
Préparation concours écoles d'ingénieurs

LM2S4. Université Pierre et Marie Curie.
Mécanique des fluides. Feuille de TD numéro 1.
Jérôme Hoepffner, Maître de conférences.



Ex. Dilatation thermique

1) Expliquez le fonctionnement du thermomètre de Galilée.

2) Dilatation de l'eau: 2.6*10^-4 K^-1, dilatation du verre: 9*10^-6 K^-1. Donnez la différence de masse entre les flotteurs pour deux degrés successifs.

Historique:

Cet instrument porte le nom de Galilée en l'honneur du physicien du xvie - xviie siècle, Galileo Galilei, qui aurait inventé un instrument approchant. Le thermomètre conçu par Galilée se présente en réalité sous la forme très simple[1] décrite par Castelli relatant une présentation de Galilée datant de 1602 - 1603 :

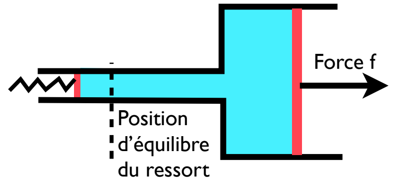
« Ayant pris une petite carafe de verre de la grosseur d'un petit œuf de poule, dont le col, du diamètre d'une tige de blé, avait deux palmes de long; et ayant bien chauffé dans la paume de ses mains le corps de la carafe, il la renversa et en plongea le col par son orifice dans un vase plein d'eau. Aussitôt qu'il eut dégagé de ses mains le corps de la carafe, l'eau se mit à monter dans le col et s'y éleva de plus d'une palme au-dessus de son niveau dans le vase. C'est d'après cette expérience que Galilée construit un instrument pour mesurer les degrés de chaud et de froid[2]. »

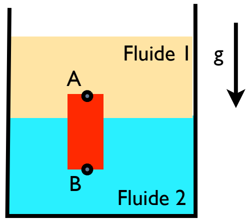
Mais Galilée s'est aussi beaucoup intéressé aux problèmes de flottabilité et à la mesure de densité jusqu'à mettre au point une balance hydrostatique[3].

Des thermomètres constitués de tubes contenant un liquide dans lequel se déplacent, selon la température, des sphères semblent exister, sous le nom de *termometro infingardo*[4] dès le xviie siècle si l'on en croit le catalogue du musée de la science de Florence[5]. Sa conception est en général attribuée au grand duc Ferdinand II de Médicis[6]. (source: wikipedia)

Ex. Presse hydraulique

Donnez l'expression de la force f en fonction des paramètres du problème. Nommez les paramètres dont vous aurez besoin.



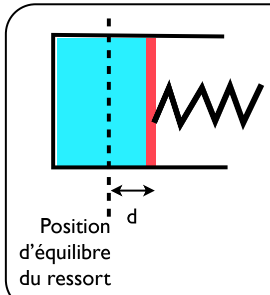


Ex. Cylindre entre deux eaux

Deux fluides de densité ρ_1 et ρ_2, et un cylindre de hauteur L, de section S et de masse m. Donnez de deux manières une relation d'inégalités entre les paramètres du problème pour que cette configuration soit un état déquilibre stable du système:

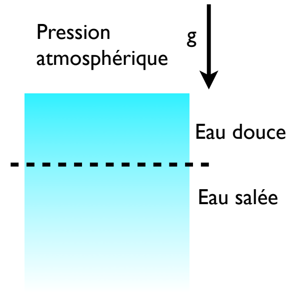
1) Avec le théorème d'Archimède

2) En considérant la pression en A et B.



Ex. Pression du ressort

Ressort de raideur k et d'allongement d, section du cylindre s. Donnez la pression du liquide à l'intérieur du cylindre. On négligera la variation hydrostatique de pression dans le cylindre.



Ex. Stratification de l'océan

1) Variation discontinue: tracez l'allure du graphique qui représente la variation de la pression en fonction de la profondeur pour un océan tel que sur la figure.

2) On suppose maintenant une variation continue de la densité de l'eau en fonction de la profondeur. Tracez l'allure de la courbe de pression pour un ocean dont la densité augmente avec la profondeur et pour un océan dont la densité diminue avec la profondeur.

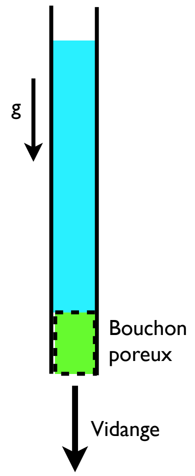
3) On suppose une loi de densité: $\rho=\rho_0+p*a$ ou ρ_0 est la densité à la surface, p est la profondeur et a une constante. Donnez l'expression de la loi de pression.

La masse volumique ou densité de l'eau de mer dépend de sa température, de sa salinité et de sa pression. Elle est égale en moyenne à 1028 kg/m^3 (densité : 1,028). Les variations de température, de salinité et de pression induisent des variations de densité : si l'on refroidit une eau de 5 °C, on crée une augmentation de densité identique à celle que l'on obtient par une augmentation de salinité de 1 %o ou par un enfoncement de deux cents mètres.

Sous l'effet de la pesanteur, l'océan est **stratifié** de façon stable : sa densité augmente avec la profondeur, les eaux les plus denses se trouvant toujours au fond. Néanmoins, sous l'effet des échanges avec l'atmosphère, cette stratification verticale peut subir quelques perturbations.

Par exemple, au cours de l'hiver, l'intensification conjointe de l'évaporation (augmentation de la salinité) et du refroidissement va contribuer à élever la masse volumique de l'eau de surface déclenchant un mélange vertical des masses d'eau (circulation thermohaline). On assiste alors à une perturbation saisonnière de la stratification verticale de l'océan. (Source: http://eduscol.education.fr/obter/appliped/ocean/theme/ocean22.htm)

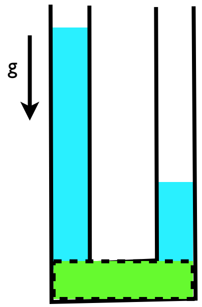
Ex. Dynamique lente de vidange



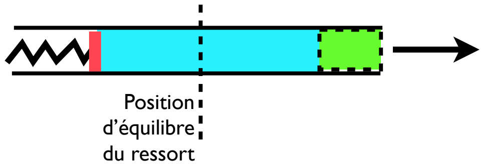
Le flux de volume à travers le bouchon poreux est égal au produit de sa porosité $\varkappa$ et du saut de pression entre les deux côtés.

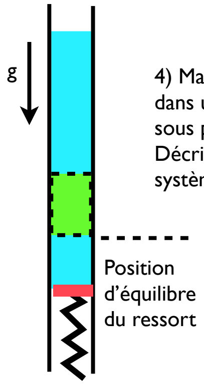
1) Ecrivez une équation diférentielle pour l'évolution de la hauteur d'eau dans cette colonne. Nommez les paramètres dont vous avez besoin. Tracez le graphique de l'évolution dans le temps de la hauteur d'eau.

2) Même question, ici la vidange est récupérée dans une seconde colonne

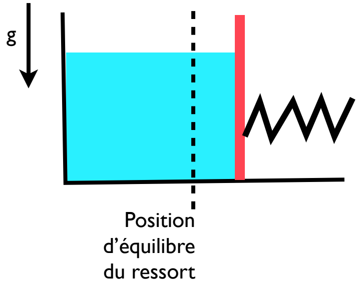


3) Même question, ici la surpression dans le cylindre est due à la compression d'un ressort (on néglige la variation hydrostatique de pression).





4) Maintenant le fluide est récupéré dans une section du cylindre et mis sous pression par le ressort. Décrivez la position d'équilibre de ce système.



Ex. Retenue avec translation

Mise en équation: la pression hydrostatique dans le fluide pousse la paroi, mais celle-ci est retenue par un ressort. Lorsque la paroi se déplace, la réaction du ressort augmente cependant que la force due au fluide diminue car la hauteur d'eau diminue. Mettez ce problème d'équilibre en équation pour décrire la position d'équilibre de ce système. Donnez des noms aux paramètres dont vous avez besoin: raideur du ressort, densité du fluide, accelleration de la gravité... Première étape: pour une hauteur d'eau donnée, calculez la force exercée par le fluide sur la paroi mobile.

On suppose que la raideur du ressort est grande: petit déplacement de la paroi, en déduire une solution approchée.

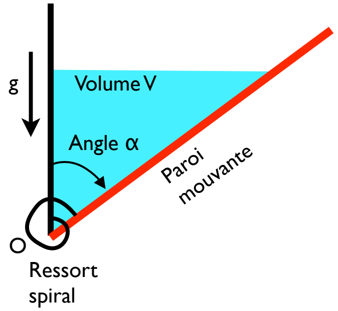
Ex. Retenue avec rotation

Un volume de liquide est retenu par une paroi qui peut tourner autour du point O, et est retenu par un ressort spiral de raideur k. Le ressort est au repos lorsque $\alpha=\alpha_0$, et applique un moment $k(\alpha-\alpha_0)$ en O.

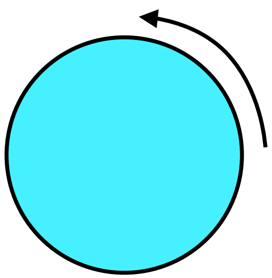
Lorsque l'angle alpha augmente, la hauteur d'eau diminue, mais la distance d'application entre ces efforts de pression et le point O augmente.

1) Donnez une expression qui caractérise l'état d'équilibre de ce système. Nommez les paramètres dont vous aurez besoin.

2) On suppose un ressort dont la position de repos est α_0=45 degrés, et de raideur très grande, donc on a des petits déplacements. En déduire une solution d'équilibre approchée.



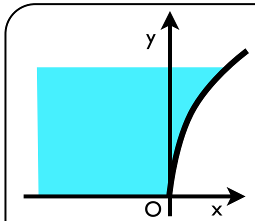
Ex. Récipient en rotation constante



Un fluide est dans un récipient qui tourne à vitesse constante. On néglige la gravité.

Donnez la distribution de pression. Nommez les paramètres dont vous aurez besoin. Tracez votre résultat sous la forme d'un graphique.

Tracez les lignes isobares dans le fluide.



Ex. Vane

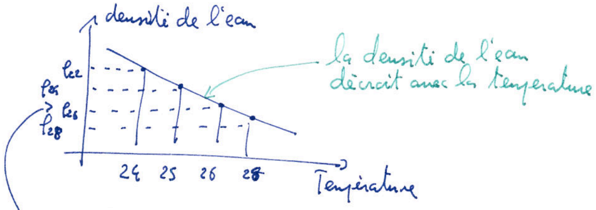
L'équation de la vanne est x=y^2/4. Calculez le moment à appliquer en O pour la maintenir en place. Nommez les paramètres dont vous aurez besoin.

Préparation concours écoles d'ingénieurs

Ex Dilatation thermique

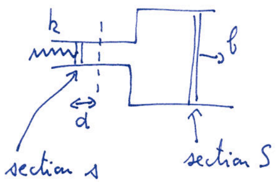
1) Le verre des flotteurs se dilate très peu par rapport à la dilatation du fluide, donc les flotteurs ne changent ni de masse ni de volume, leur densité est constante.

Lorsque la température augmente, la densité de l'eau dans la colonne diminue, ce qui diminue la poussée d'Archimède → les flotteurs dont la densité se retrouve être plus faible que la densité de l'eau vont donc couler.



Voici la densité du flotteur indicateur de la température 26°.

Ex Presse hydraulique



Le ressort impose une force kd (raideur, écrasement)

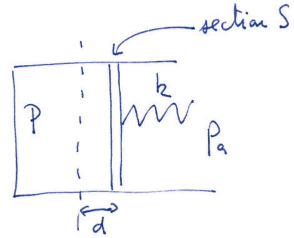
Donc la pression dans le fluide est $P = P_a + \frac{kd}{s}$

La force f est due à cette pression contre le piston de grande section S moins l'effet de la pression atmosphérique :

$$\boxed{f = PS - P_aS = \left(\cancel{P_a} + \frac{kd}{s}\right)S - \cancel{P_aS} = \underbrace{kd}_{\text{force due au ressort}}\ \underbrace{\frac{S}{s}}_{\text{rapport des section.}}}$$

L'effet démultiplicateur de la presse hydraulique pour la force provient du rapport des sections $\frac{S}{s}$ qui peut être très grand.

Ex Pression du ressort

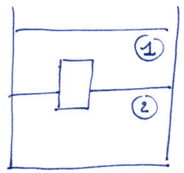


La force du ressort plus la force due à la pression atmosphérique sur le piston équilibrent la pression dans le cylindre :

$$PS = kd + P_aS \rightarrow \boxed{P = \frac{kd}{S} + P_a}$$

Ex Cylindre entre deux eaux

1)

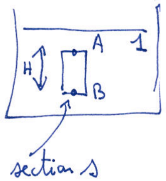


Le cylindre peut se maintenir entre deux eaux lorsqu'il est trop lourd pour flotter dans le fluide 1 et trop léger pour couler dans le fluide 2.

V : volume du cylindre
m : masse du cylindre

$$\boxed{\underbrace{\rho_1 V g < mg}_{\text{coule dans 1}}\ \underbrace{< \rho_2 V g}_{\text{flotte dans 2}}}$$

2) On exprime juste l'inégalité "coule dans 1" :



poids $>$ $\underbrace{\text{poussée vers le haut en B}}_{P_B s}$ $-$ $\underbrace{\text{poussée vers le bas en A}}_{P_A s}$

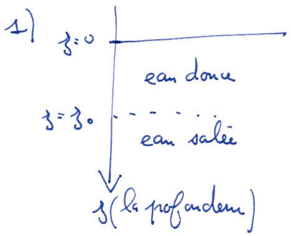
$P_B = P_A + \rho_1 g H$ (hydrostatique)

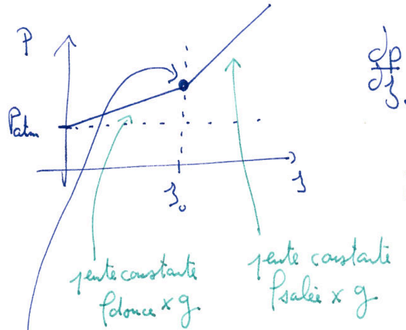
$$\rightarrow mg > \underbrace{(\cancel{P_A} + \rho_1 g H)s - \cancel{P_A}s}_{\rho_1 g \underbrace{Hs}_{V}} \rightarrow \boxed{m > \rho_1 V}$$

OK!

Ex Stratification de l'océan

1)

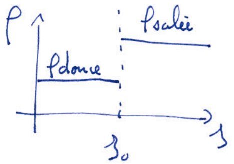




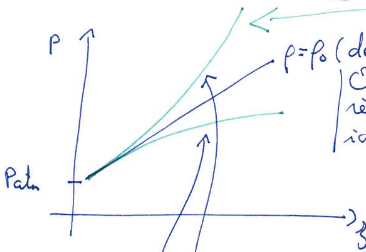
$\frac{dP}{dz} = \rho g$ ← profondeur.

$P(z=0) = P_{atm}$.

Discontinuité de la pente à la profondeur où la densité est discontinue



2)



$\rho=\rho_0$ (densité constante) On trace cette courbe de référence pour fixer les idées.

la densité augmente avec z donc la pente augmente

la pente diminue

OK !

3) $\rho = \rho_0 + z a$ ← une constante dont on peut choisir le signe

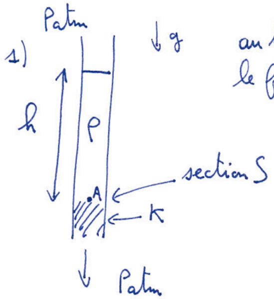
z : profondeur ; ρ_0 : densité de référence

| $a>0$ → la densité augmente avec z
| $a<0$ → ——— diminue ———

$\frac{dP}{dz} = \rho(z) g = (\rho_0 + az) g \rightarrow \boxed{P(z) = \underbrace{\underbrace{P_{atm} + \rho_0 g z}_{\text{pour une densité constante}} + \frac{a z^2}{2} g}_{\text{densité variable}}} \rightarrow$ si $a>0$ la dérivée seconde est positive

Ex Dynamique lente de vidange

1)



au temps initial : $h = h_0$

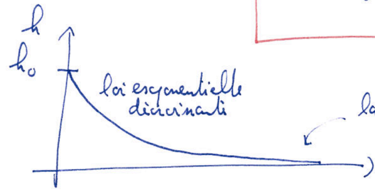
le flux dans le bouchon est $Q = k(P_A - P_{atm}) = k\rho g h$, avec $P_A = P_{atm} + \rho g h$

Pendant un court intervalle de temps dt le volume d'eau $V = Sh$ diminue de $Q\,dt$:

$S(h(t+dt) - h(t)) = -k\rho g h\,dt$ | Variation du volume dans la colonne.

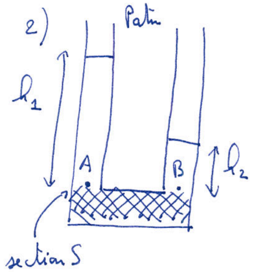
$\rightarrow \dot{h} = -\frac{k\rho g}{S} h$ eq. différentielle linéaire temporelle pour l'inconnue h.

$\rightarrow \boxed{h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{k\rho g}{S} t\right)}$



la colonne ne sera donc jamais sèche !

2)



Le flux : $Q = k(P_A - P_B) = k\rho g(h_1 - h_2)$, avec $P_A = P_{atm} + \rho g h_1$ et $P_B = P_{atm} + \rho g h_2$

h_1 et h_2 sont liées par la conservation du volume de liquide : $h_1 + h_2 = cste$

On considère le cas $\underbrace{h_1(t=0) = h,\ h_2(t=0) = 0}_{h_2 = h - h_1}$

$S(h_1(t+dt) - h_1(t)) = -Q\,dt = -k\rho g(h_1 - \underbrace{h_2}_{h - h_1})dt$, avec $h_1 - h_2 = 2h_1 - h$

| Variation du volume dans la colonne de gauche

$\dot{h}_1 = -\frac{k\rho g}{S}(2h_1 - h)$

| eq. différentielle linéaire temporelle non homogène pour h.

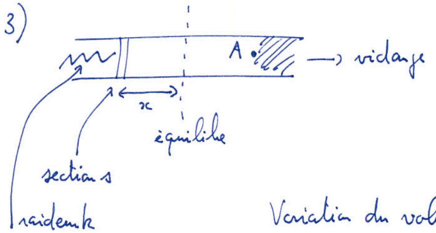
Changement de variable : $x = 2h_1 - h$ $\dot{x} = 2\dot{h}_1$

$\rightarrow \dot{x} = -\frac{k\rho g}{2S} x \rightarrow x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{k\rho g}{2S} t\right)$, avec $x = 2h_1(t) - h$ et $x_0 = h$

$\boxed{h_1(t) = \frac{h}{2}\left(1 + \exp\left(-\frac{k\rho g}{2S} t\right)\right)}$

$h_1(0) = h$, $h_1 \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{h}{2}$ } OK c'est correct.

3)



le flux sortant : $Q = K(P_A - P_{atm}) = K k x s$

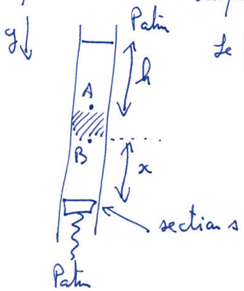
$P_{atm} + kxs$

Variation du volume de fluide dans le cylindre :

$\cancel{s}(x(t+dt) - x(t)) = -Q\,dt = -Kkx\cancel{s}\,dt$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = -Kkx \\ x(t=0) = x_0 \text{ condition initiale}\end{array}\right\} \to \boxed{x(t) = x_0 \exp(-Kkt)}$

4) On demande simplement la position finale d'équilibre :



Le flux à travers le bouchon : $Q = k(P_A - P_B) = 0$ à l'équilibre

$\to P_A = P_B$

$\cancel{P_{atm}} + \underbrace{\rho g h}$ — hydrostatique dans la colonne du haut

$\cancel{P_{atm}} + \frac{kx}{s} - \underbrace{\rho g x}$ — hydrostatique dans la colonne du bas

$\frac{kx}{s}$: pression induite par le ressort.

$\rho g h = \underbrace{kx - \rho g x}_{(k-\rho g)x}$

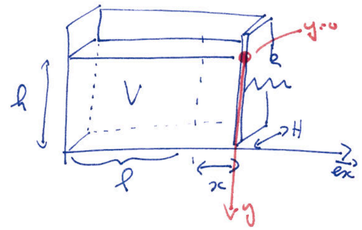
$x = \frac{\rho g h}{(k - \rho g)}$

on suppose que initialement $x = 0$ et $h = h_0$. Par conservation du volume : $h + x = h_0 \to h = h_0 - x$

$x = \frac{\rho g}{k - \rho g}(h_0 - x) \to \boxed{x = \frac{\frac{\rho g h_0}{k - \rho g}}{1 + \frac{\rho g}{k-\rho g}} = \frac{\rho g h_0}{k}}$

Il est plus naturel d'exprimer x en fonction des paramètres du système.

Ex : Retenue avec translation



Force due au fluide sur le piston : L'effet de la pression atmosphérique s'annule à droite et à gauche du piston :

$F = \int_0^h \rho g y H\,dy = \frac{\rho g H h^2}{2}$ selon $\vec{e}_x$

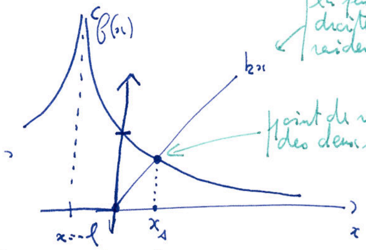
x et h sont liés par la conservation du volume : $V = h(\ell + x)H \to h = \frac{V}{H(\ell+x)}$

$\to F(x) = \underbrace{\frac{\rho g H}{2} \times \frac{V^2}{H^2}}_{\frac{\rho g V^2}{2H}} \times \underbrace{\frac{1}{(\ell+x)^2}}_{f(x)} = C f(x)$

équilibre du piston : $\underbrace{kx = Cf(x)}$ →

$\left.kx = \frac{C}{(\ell+x)^2}\right\} \to \underbrace{x(\ell+x)^2 = \frac{C}{k}}$

polynome d'ordre 3.



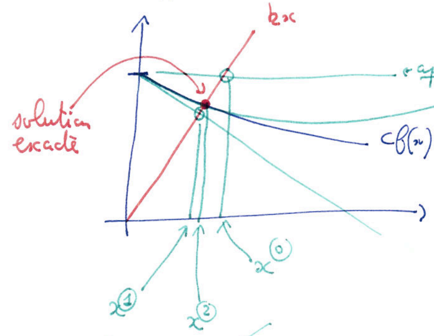
la pente de cette droite est la raideur du ressort.

point de rencontre des deux courbes

on ne s'intéresse pas aux x négatifs.

c'est la position statique du piston qui satisfait l'équilibre des deux forces.

Solution approchée : x est petit



approximation quadratique ②

approximation constante ⓪

approximation linéaire ①

Les 3 premiers termes de l'expansion de Taylor de $Cf(x)$ en $x=0$

3 approximations successives de plus en plus précises de la position d'équilibre.

représentation graphique des approximations.

Expantion de taylor de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + x\,\underbrace{f'(0)} + \frac{x^2}{2}\underbrace{f''(0)} + \dots$$

$f(0) \to \frac{1}{\ell^2}$

$f'(0) \to \underbrace{-\frac{2(\ell+x)}{(\ell+x)^4}\Big|_{x=0}}_{-\frac{2}{\ell^3}}$

$\left(\frac{-2}{(\ell+x)^3}\right)' = +2\cdot\frac{3(\ell+x)^2}{(\ell+x)^6} = \underbrace{+\frac{6}{(\ell+x)^4}\Big|_{x=0}}_{\frac{6}{\ell^4}}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\ell^2} - \frac{2x}{\ell^3} + \frac{3x^2}{\ell^4} + \dots}$$

$\underline{x^{(0)}}$: $kx^{(0)} = \frac{c}{\ell^2} \to \boxed{x^{(0)} = \frac{c}{k\ell^2}}$

$\underline{x^{(1)}}$: $\frac{kx^{(1)}}{c} = \frac{1}{\ell^2} - \frac{2x^{(1)}}{\ell^3} \to x^{(1)}\underbrace{\left(\frac{k}{c} + \frac{2}{\ell^3}\right)}_{\frac{k\ell^3+2c}{c\ell^3}} = \frac{1}{\ell^2}$ $\quad \boxed{x^{(1)} = \frac{c\ell}{k\ell^3 + 2c}}$

c'est le nouveau terme induit par la correction

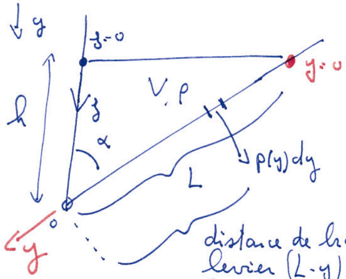
$\underline{x^{(2)}}$: $\frac{kx^{(2)}}{c} = \frac{1}{\ell^2} - \frac{2x^{(2)}}{\ell^3} + \frac{3(x^{(2)})^2}{\ell^4}$

$$\to (x^{(2)})^2\left(\frac{3}{\ell^4} - \frac{k}{c}\right) + x^{(2)}\left(-\frac{2}{\ell^3}\right) + \frac{1}{\ell^2} = 0$$

polynome d'ordre 2... à résoudre si on a le temps et la patience.

OK.

Ex Ressort avec rotation



pression dans le fluide : $p = \rho g z$ (on sait déjà que l'effet de la pression atmosphérique est nul)

De plus : $h = L\cos\alpha$

et $z = y\cos\alpha \to \dots \to p = \rho g y \cos\alpha$

la pression en fonction de y

distance de bras de levier $(L-y)$ pour le moment

$$M_0 = \int_{y=0}^{L} (L-y)\times(\rho g y\cos\alpha)\,dy$$

(selon une direction orthogonale à la feuille.)

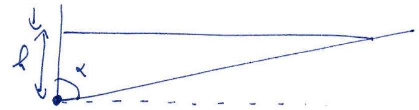
$$M_0 = \rho g\cos\alpha\left(\underbrace{\left[\frac{Ly^2}{2}\right]_0^L}_{L^3/2} - \underbrace{\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L}_{L^3/3}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{L^3/6 \,=\, \frac{h^3}{6\cos\alpha^3}}$$

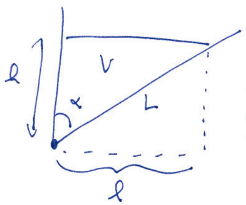
$$\boxed{M_0 = \frac{\rho g h^3}{6\cos\alpha^2}}$$

voici notre premier calcul et notre premier résultat

pour h constant le moment tend vers l'infini lorsque la paroi tend vers l'horizontale :



Conservation du volume :



$h = L\cos\alpha$
$\ell = L\sin\alpha$

$\frac{\ell}{\sin\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha} \to \ell = h\tan\alpha$

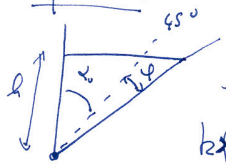
et $V = \frac{h\ell}{2} = \frac{h^2\tan\alpha}{2}$

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{2V}{\tan\alpha}}}$$

Une loi pour la hauteur du fluide

Tend vers l'infini lorsque $\alpha \to 0$

Equilibre :



on dénote par φ la petite variation d'angle par rapport à la position de repos du ressort $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

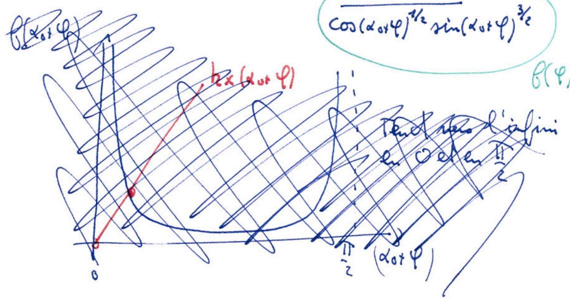
$$k\varphi = \frac{\rho g h^3}{6\cos(\alpha_0+\varphi)^2} = \frac{\rho g}{6\cos(\alpha_0+\varphi)^2}\cdot\frac{(2V)^{3/2}}{(\tan(\alpha_0+\varphi))^{3/2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\rho g(2V)^{3/2}}{6}}_{A} \times \underbrace{\frac{\cos(\alpha_0+\varphi)^{3/2}}{\cos(\alpha_0+\varphi)^2\sin(\alpha_0+\varphi)^{3/2}}}_{f(\varphi)}$$

$$\frac{\cos(\alpha_0+\varphi)^{3/2}}{\cos(\alpha_0+\varphi)^2\sin(\alpha_0+\varphi)^{3/2}} = \frac{1}{\cos(\alpha_0+\varphi)^{1/2}\sin(\alpha_0+\varphi)^{3/2}} \quad f(\varphi)$$

équilibre : $k\varphi = A f(\varphi)$

et $f(\varphi)$ est une fonction un peu trop compliquée...



$k\varphi = A f(\varphi)$ → on approxime avec une série de Taylor

$$f(\varphi) = f(0) + \varphi f'(0) + \dots$$

| Il faut faire ces calculs soigneusement !

$f(0) \to \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})^{1/2}\sin(\frac{\pi}{4})^{3/2}} = \underbrace{}\ \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2$

$f'(0) \to -\underbrace{\frac{\left(-\frac{1}{2}\sin(\alpha_0)\cos(\alpha_0)^{-1/2}\sin(\alpha_0)^{3/2}\right) + \left(\cos(\alpha_0)^{1/2}\frac{3}{2}\cos(\alpha_0)\sin(\alpha_0)^{1/2}\right)}{\cos(\alpha_0)^{1}\sin(\alpha_0)^{3}}}$

on note $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = C$

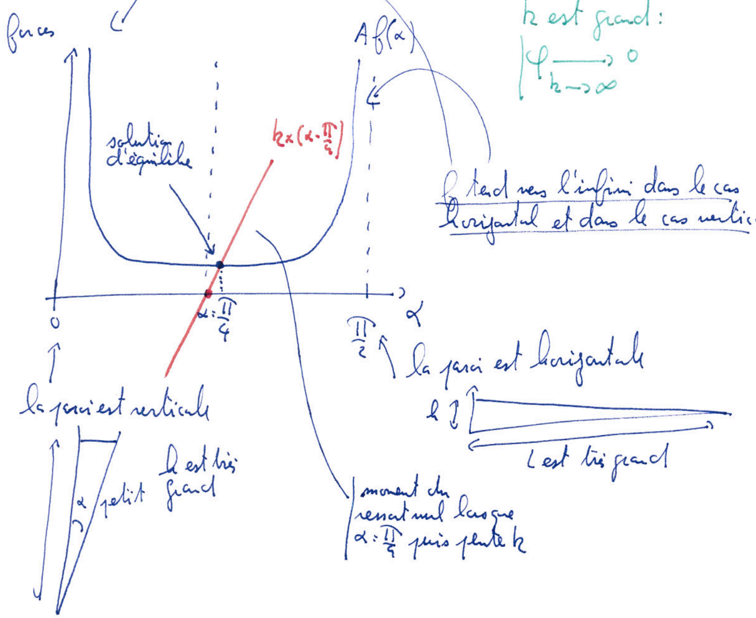
$$\to \frac{\frac{1}{2}C^2 - \frac{3}{2}C^2}{C^4} = -C^{(2-4)} = -\frac{1}{C^2} = -\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -2$$

Donc on a le développement limité : $f(\varphi) \simeq 2 - 2\varphi$

→ équilibre : $k\varphi = 2 - 2\varphi \to \varphi(k+2) = 2 \to \boxed{\varphi = \frac{2}{k+2}}$ On aboutit à une solution très simple.

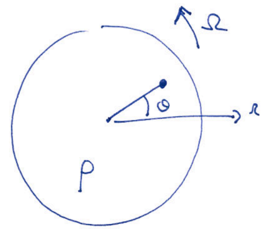
Cette perturbation d'angle de repos est effectivement petite si le ressort est très raide : k est grand :

$$\varphi \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$



Interprétation graphique de la position d'équilibre

Ex : Récipient en rotation constante



$-\vec{\nabla} p$: forces externes de volume

| force centrifuge dans le référentiel en rotation → purement radiales } $f(r) = \rho r \Omega^2$ accélération centripète en m/s^2

$= -\frac{dp}{dr}$ | variation radiale de la pression

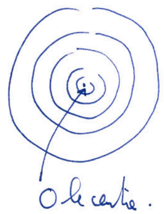
la pression est constante selon la direction azimuthale

$$\to -\frac{dp}{dr} = \rho r \Omega^2 \to p(r) = \rho \frac{r^2}{2}\Omega^2 + p_0$$

↑ pression au centre

} la pression augmente comme le carré du rayon et le carré de la vitesse de rotation Ω.

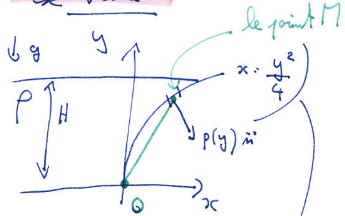
Isobares :



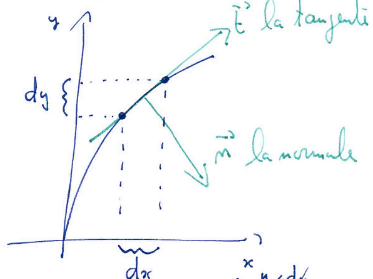
des cercles concentriques centrés en O.

O le centre.

Ex Vane



| Il faut d'abord écrire la normale et la surface de la vane en fonction de la position du point M :



$dx = \frac{dy}{2}\,y \to \vec{t} = \frac{1}{dy\sqrt{1+y^2/4}}\begin{vmatrix} y/2\,dy \\ 1\,dy \end{vmatrix}$ et la normale : $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2/4}}\begin{vmatrix} +1 \\ -y/2 \end{vmatrix}$

$$\vec{M}_O = \int_{y=0}^{H} \left(\vec{OM} \times \frac{\rho g (H-y)}{\sqrt{1+y^2/4}} \begin{vmatrix} +1 \\ -y/2 \end{vmatrix} \right) d\ell \longrightarrow \text{intégration le long de la surface}$$

le bras de levier

l'intensité de la pression

la normale d'amplitude normalisée

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1+y^2/4}$$

$$\begin{vmatrix} x = \frac{y^2}{4} \\ y \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = \rho g \int_{y=0}^{H} \left(\frac{H-y}{\cancel{\sqrt{1+y^2/4}}} \underbrace{\begin{vmatrix} y^2/4 \\ y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ -y/2 \end{vmatrix}}_{-\frac{y^3}{8} - y} \right) dy \cancel{\sqrt{1+y^2/4}}$$

$$\vec{M}_O = -\rho g \int_0^H (H-y)\left(\frac{y^3}{8} - y\right) dy$$

$$= -\rho g \int \left(\frac{Hy^3}{8} - Hy - \frac{y^4}{8} + y^2 \right) dy$$

$$= -\rho g \left[\frac{Hy^4}{4\times 8} - \frac{Hy^2}{2} - \frac{y^5}{5\times 8} + \frac{y^3}{3} \right]_0^H$$

$$= -\rho g \left(\frac{H^5}{4\times 8} - \frac{H^3}{2} - \frac{H^5}{5\times 8} + \frac{H^3}{3} \right)$$

On prend $H=1$ et on simplifie, avec un peu de temps et de patience...