Question 1

Bernoulli

Considérons l'equation de Bernouilli

$$y' = y + xy^2$$

Divisons les 2 membres par y^2

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} + x$$

Posons

$$u = -\frac{1}{y}$$

$$\longrightarrow \quad u' = \frac{y'}{y^2}$$

Il vient alors

$$u' = -u + x$$

L'équation sans second membre

$$u' = -u$$

donne

$$u = \alpha e^{-x}$$

Faisons varier la constante

$$\longrightarrow \quad u' = \alpha' e^{-x} - \alpha e^{-x}$$

Portons dans l'équation avec second membre

$$\longrightarrow \quad \alpha' e^{-x} - \alpha e^{-x} = -\alpha e^{-x} + x$$

$$\longrightarrow \quad \alpha' = x e^{x}$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = \int x e^{x} dx = x e^{x} - \int e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} + C$$

Cela donne

$$u = x - 1 + C e^{-x}$$

Comme $y = -\frac{1}{u}$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{1 - x - C e^{-x}}}$$

Question 2

Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x - 2x^2 y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 2x^2 y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x - 2x^2 y}{y} = \frac{x}{y} - 2x^2$$

'est une équation de Bernouilli

ivisons les 2 membres par x^2

$$\Rightarrow \quad \frac{x'}{x^2} = \frac{1}{xy} - 2$$

sons $u = -\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{x'}{x^2}$$

' vient

$$u' = -\frac{u}{y} - 2$$

équation sans second membre

$$u' = -\frac{u}{y}$$

nne

$$\frac{du}{u} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad uy = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\alpha}{y}$$

aisons varier la constante

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{\alpha'}{y} - \frac{\alpha}{y^2}$$

rtons dans l'équation avec second membre

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha'}{y} - \frac{\alpha}{y^2} = -\frac{\alpha}{y^2} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha' = -2y$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -y^2 + C$$

la donne

$$u = \frac{C - y^2}{y}$$

omme $x = -\frac{1}{\ldots}$

$$\boxed{x = \frac{y}{y^2 - C}}$$

Question 1

Considérons l'équation différentielle

$$x^2(y'-y^2) = xy + 1$$

$$\Longrightarrow \quad y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$$

C'est une équation de Ricatti

Ricatti

Une intégrale particulière est

$$y = -\frac{1}{x}$$

Posons alors

$$y = z - \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = z' + \frac{1}{x^2}$$

Il vient

$$z' + \frac{1}{x^2} = z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{z}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad z' + \frac{z}{x} = z^2$$

C'est une équation de Bernouilli

Divisons les 2 membres par $-z^2$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} = -1$$

Posons

$$u = \frac{1}{z}$$

$$\Longrightarrow \quad u' = -\frac{z'}{z^2}$$

Cela donne

$$u' - \frac{u}{x} = -1$$

L'equation sans second membre

$$u' - \frac{u}{x} = 0$$

donne

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{u}{x} = \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad u = \alpha x$$

Faisons varier la constante

$\rightarrow \quad u' = \alpha' x + \alpha$

Portons dans l'équation avec second membre

$\Rightarrow \quad \alpha' x + \alpha - \alpha = -1$

$\Rightarrow \quad \alpha' = -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad \alpha = -\operatorname{Log} Cx$

Cela donne

$u = -x \operatorname{Log} Cx$

$\Rightarrow \quad z = \frac{-1}{x \operatorname{Log} Cx}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x}\left[1 + \frac{1}{\operatorname{Log} Cx}\right]}$$

Question 2

Considérons l'équation différentielle

$(1-x^3)y' + x^2 y + y^2 = 2x$

C'est une équation de Ricatti

Une intégrale particulière est

$y = x^2$

Posons

$y = z + x^2$

$\rightarrow \quad y' = z' + 2x$

Il vient

$(1-x^3)(z'+2x) + x^2(z+x^2) + z^2 + 2zx^2 + x^4 = 2x$

$\Rightarrow \quad (1-x^3)z' + 2x - 2x^4 + x^2 z + x^4 + z^2 + 2zx^2 + x^4 = 2x$

$\Rightarrow \quad (1-x^3)z' + 3x^2 z = -z^2$

C'est une équation de Bernouilli

Divisons les 2 membres par $-(1-x^3)z^2$

$\Rightarrow \quad -\frac{z'}{z^2} - \frac{3x^2}{1-x^3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{1-x^3}$

$\rho \quad\quad 1$

$$\Longrightarrow \quad u' = -\frac{Z'}{Z^2}$$

Cela donne

$$u' - \frac{3x^2}{1-x^3}\, u = \frac{1}{1-x^3}$$

L'équation sans second membre

$$u' - \frac{3x^2}{1-x^3}\, u = 0$$

donne

$$\frac{du}{u} + \frac{d(1-x^3)}{1-x^3} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u(1-x^3) = \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{\alpha}{1-x^3}$$

Faisons varier la constante

$$\Longrightarrow \quad u' = \frac{\alpha'}{1-x^3} + \frac{3x^2\alpha}{(1-x^3)^2}$$

Portons dans l'équation avec second membre

$$\Longrightarrow \quad \frac{\alpha'}{1-x^3} + \frac{3x^2\alpha}{(1-x^3)^2} - \frac{3x^2\alpha}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{1-x^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha' = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = x + C$$

Cela donne

$$u = \frac{x+C}{1-x^3}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1-x^3}{x+C}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1-x^3}{x+C} + x^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{1+x^2C}{x+C}}$$

~~Question 3~~

~~Considérons l'équation différentielle~~

$$\cancel{(1-x^3)y' + 2xy^2 - x^2y = 1}$$