UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE **ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009**

LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°4

I

On définit une fonction holomorphe f par

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)=Re^{i\Phi}$$

1°) Montrer que les conditions de Cauchy s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}=R\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=-R\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \end{cases}$$

2°) Déterminer les fonctions holomorphes f telles que

a) R ne dépende que de x.

b) $\dfrac{Q}{P}$ ne dépende que de x.

II

Soit la série entière

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \qquad A_n, z\in \mathbb{C}.$$

définie par les relations de récurrence suivantes

$$A_0=0 \qquad A_1=1 \qquad A_n=A_{n-1}+A_{n-2} \quad \forall n\geq 2$$

1°) Montrer que les coefficients A_n vérifient la double inégalité

$$0<A_n\leq 2^{n-1} \qquad \forall n\geq 1$$

En déduire que le rayon de convergence R_0 de la série est tel que $R_0\geq 1/2$.

2°) Montrer que l'on a, dans le disque de convergence

$$f(z)=\frac{z}{1-z-z^2}$$

3°) Décomposer $f(z)$ en éléments simples et en déduire la valeur des coefficients A_n.

4°) Déterminer le rayon de convergence R_0 de la série.