UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009

LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°5

I

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$U_n(z) = [\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}]\, z^n$$

Calculer le rayon de convergence de la série

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(z)$$

en admettant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

II

Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \qquad A_n, z \in \mathbb{C}$$

supposée convergente sur un ouvert

$$D = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| < 1\}$$

Montrer que si l'on vérifie

$$\begin{cases} A_1 \neq 0 \\ \sum_{n=2}^{+\infty} n|A_n| \leq |A_1| \end{cases}$$

alors la fonction f ainsi définie est injective et la série converge sur $\overline{D}$.

III

1°) Calculer $|\sin z|$.

A quelle condition $|\sin z|$ augmente-t-il indéfiniment ?

Résoudre l'équation

$$\sin z = 2$$

3°) Calculer $|ch\, z|$.

A quelle condition $|ch\, z|$ augmente-t-il indéfiniment ?

Résoudre l'équation

$$\text{ch}\, z = -1$$