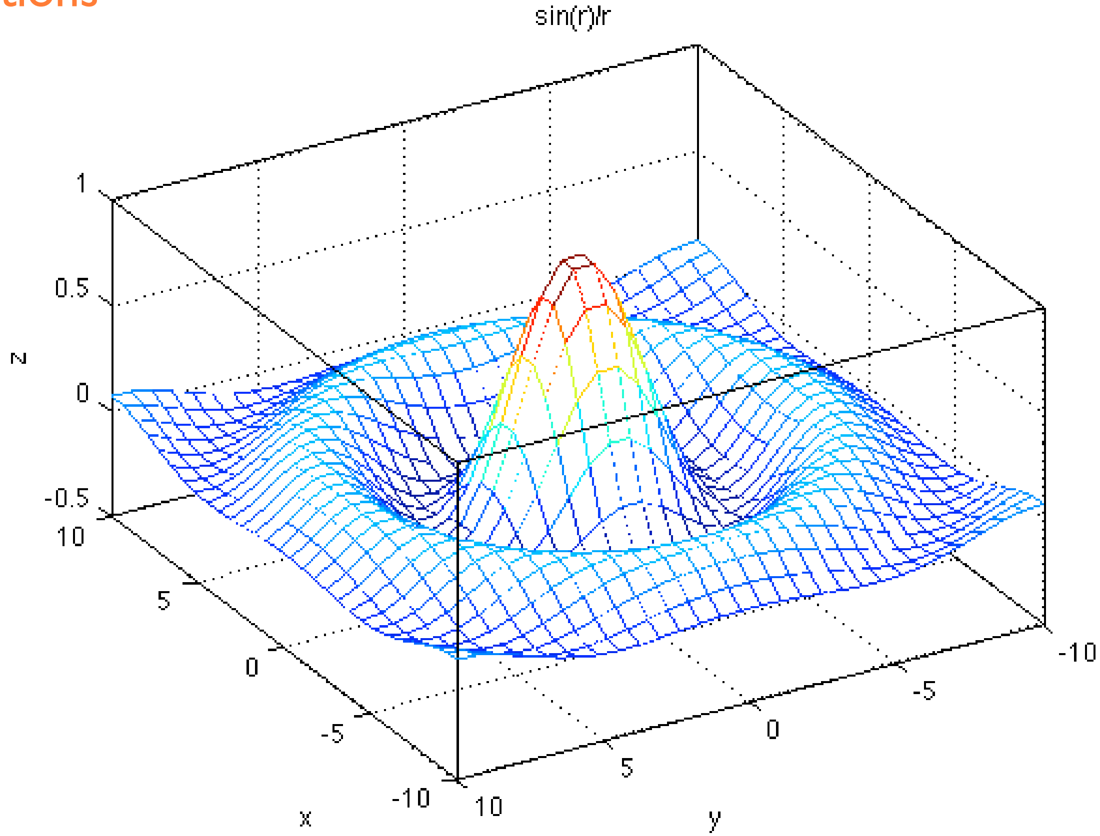
Matlab : applications en mécanique
LA207, 2010
http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement

Compte rendu TP6: attracteur de Lorenz

0) Manipulations

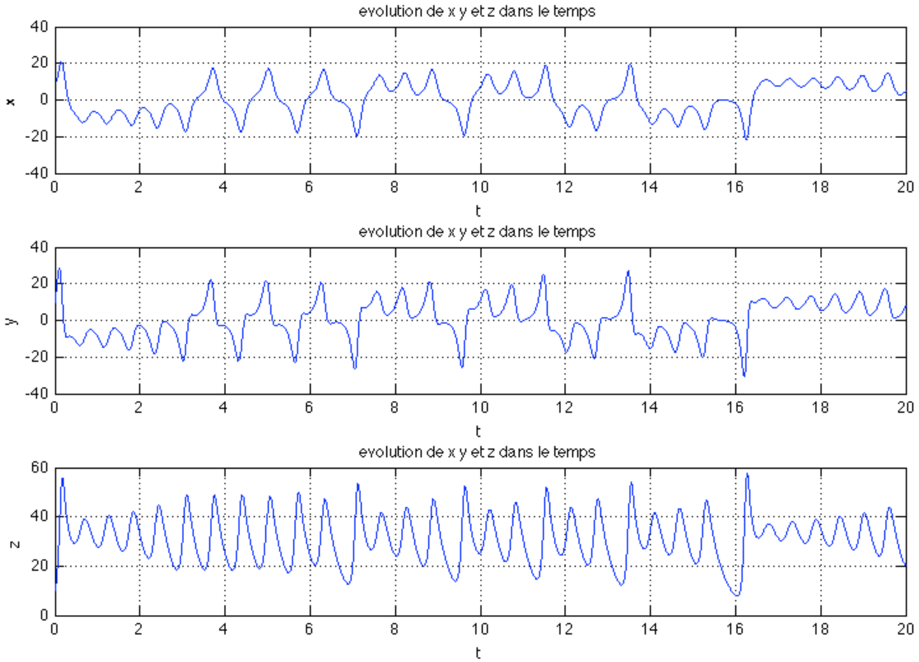



```
% manipulations
l=10;
x=linspace(-l,l,30);
y=linspace(-l,l,30);

[X,Y]=meshgrid(x,y);

R=sqrt(X.^2+Y.^2);
f=sin(R)./R;

mesh(X,Y,f);

xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
title('sin(r)/r')
grid on
box on
```

Tracé en 3D de la fonction sin(r)/r avec la fonction “mesh”.
Ici x et y sont dans l’intervale [-10,10].

Attracteur de Lorenz

1) Simulation et trajectoires



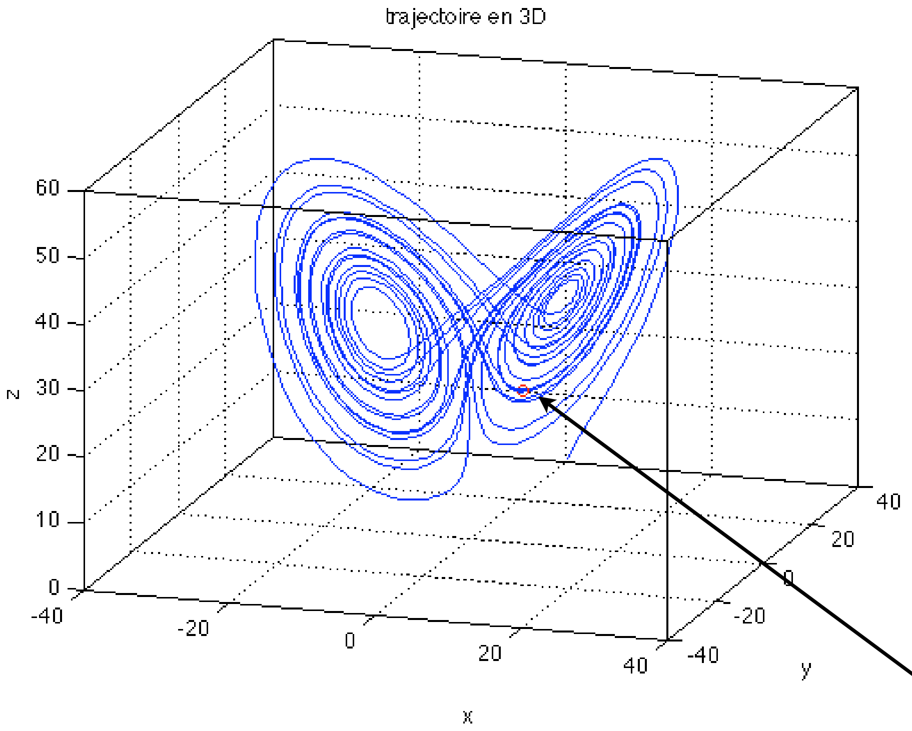
Nous avons tracé dans trois sous-graphiques l'évolution dans le temps des coordonnées x y et z pour t de 0 à 20, avec la condition initiale (10,10,10), et le paramètre r=35.

On observe que les trois coordonnées oscillent dans le temps, sans périodicité apparente.

Script

```
% tp6: attracteur de Lorenz
clear all; clf


r=35;
sigma=10;
b=8/3;

% position initiale
p0=[10 10 10];

% temps final
tmax=20;

% simulation
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);


% évolution des trois coordonnées
subplot(3,1,1); plot(t,x);
xlabel('t')
ylabel('x')
title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on

subplot(3,1,2); plot(t,y);
xlabel('t')
ylabel('y')
title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on

subplot(3,1,3); plot(t,z);
xlabel('t')
ylabel('z')
title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on
```

2) Trajectoire en 3D



Ici pour la même condition initiale et les même paramètres, nous avons tracé la trajectoire en 3D avec la fonction plot3. On observe une structure en papillon.

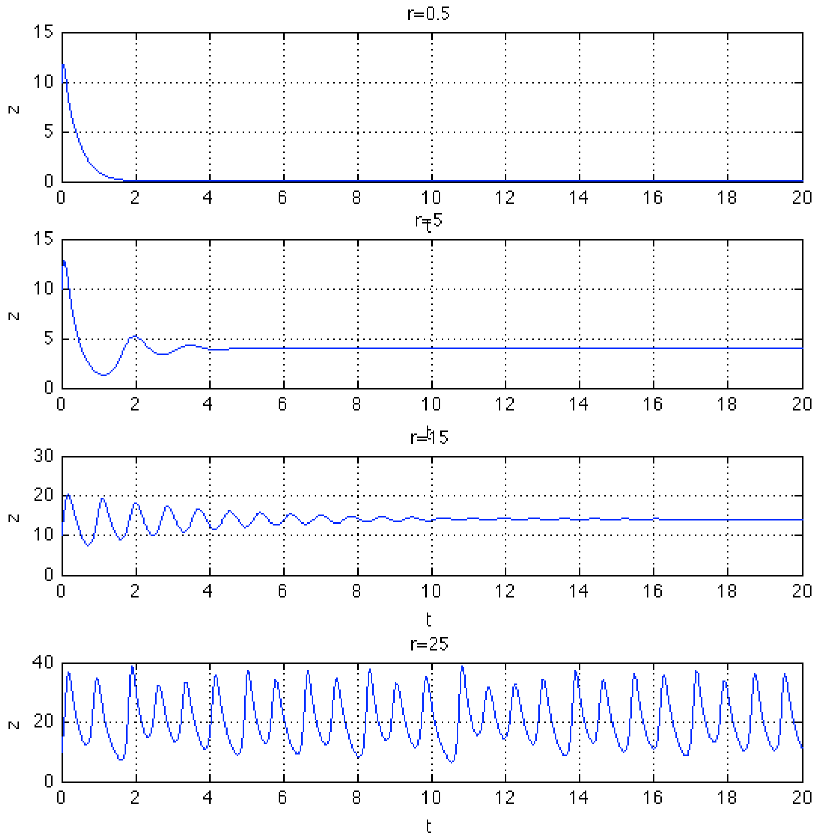
L'animation de la trajectoire montre bien que le point (x,y,z) tourne pendant un certain temps autour de chaque aile de ce papillon, et change de côté lorsque le rayon de rotation devient grand.

Pour l'animation, on trace la trajectoire depuis le temps zéro jusqu'à l'indice courant de la boucle "ind", et on ajoute un cercle rouge qui positionne la position courante

Script

```
% la trajectoire statique
clf
plot3(x,y,z)
box on
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('trajectoire en 3D');
view(18,22)


% animation de la trajectoire
for ind=1:5:length(t)

    sel=1:ind;
    plot3(x(sel),y(sel),z(sel))
    hold on
    plot3(x(ind),y(ind),z(ind),'ro')
    hold off

    box on
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel('z')
    title('trajectoire en 3D');
    xlim([-40,40]);ylim([-40,40]);zlim([0,60]);
    view(18,22)
    drawnow
end
```

3) Effet du paramètre r



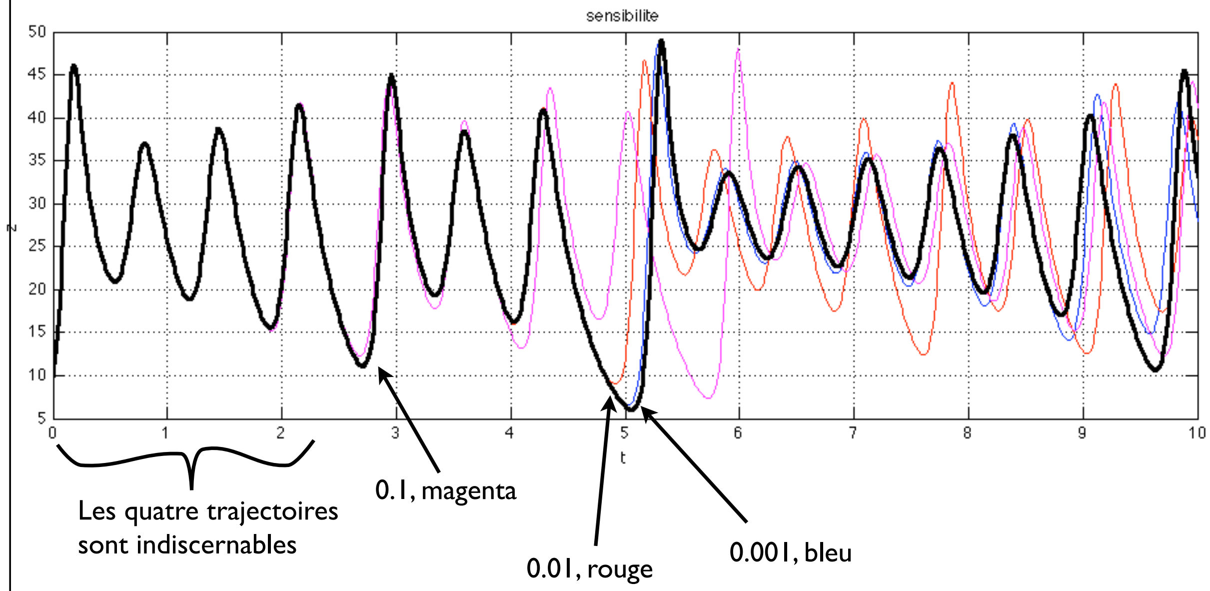
Script

```
% etude du paramètre r
r=0.5
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
subplot(4,1,1);
plot(t,z)
grid on
xlabel('t'); ylabel('z');
title('r=0.5');

r=5
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
subplot(4,1,2);
plot(t,z)
grid on
xlabel('t'); ylabel('z');
title('r=5');

r=15
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
subplot(4,1,3);
plot(t,z)
grid on
xlabel('t'); ylabel('z');
title('r=15');

r=25
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
subplot(4,1,4);
plot(t,z)
grid on
xlabel('t'); ylabel('z');
title('r=25');
```

Voici l'évolution dans le temps de la coordonnée z pour quatre valeurs du paramètre r: 0.5, 5, 15 et 25. On observe que pour 0.5, z tend rapidement vers 0: il n'y a pas d'oscillations. Pour 5, le système tend vers a peu près 4. Pour 15, le système oscille longtemps avant de tendre vers à peu près 13. Enfin, pour r=25, le système oscille de manière chaotique comme ce que nous avons observé dans les graphiques précédents.

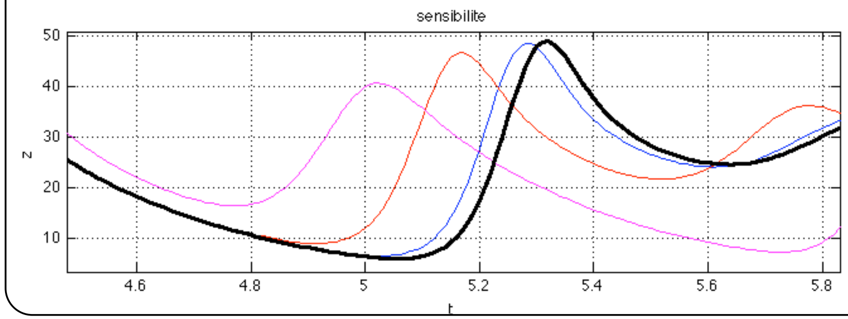
On peut en déduire que r est un paramètre clé pour le comportement du système: plus r est grand plus le comportement est chaotique. Pour r=350, le système diverge.

4) Sensibilité aux conditions initiales



Quatre trajectoires très similaires

Ici nous avons représenté l'évolution de la coordonnée z pour quatre conditions initiales proches de (10,10,10). Jusqu'à t=2.5, les quatre trajectoires sont indiscernables. Ensuite, les trajectoires s'éloignent de la trajectoire de référence. A t=2.7 pour 0.1, à t=4.9 pour 0.01, et à t=5.1 pour 0.001. Plus la perturbation est petite, plus la trajectoire dévie tard de la trajectoire de référence.

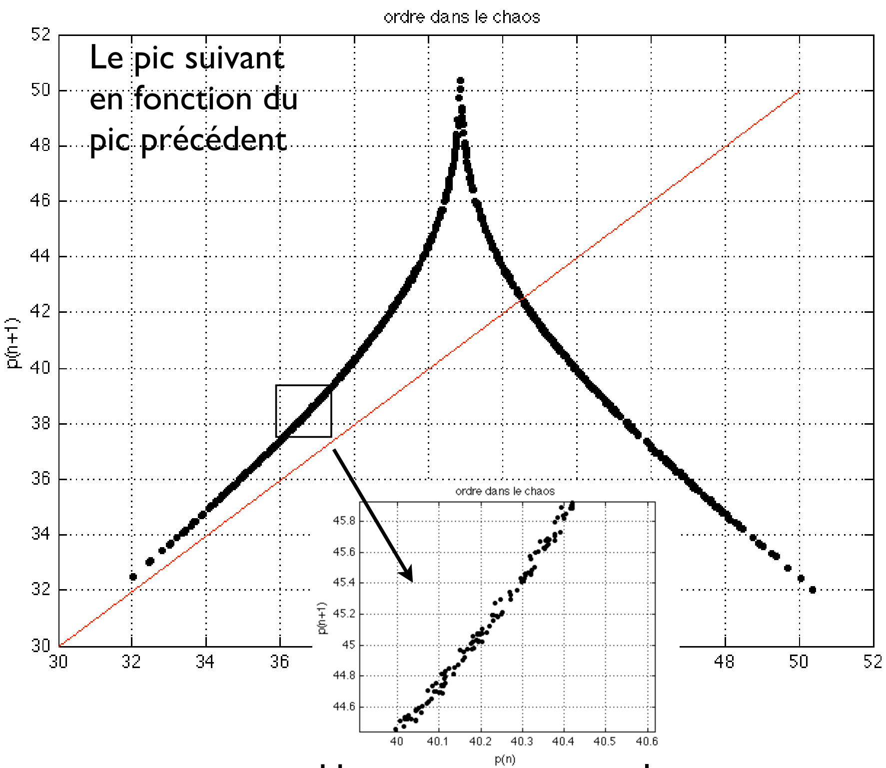


zoom autour de t=5, lorsque les trois trajectoires perturbées s'éloignent de la trajectoire de référence.

Script

```
% sensibilité aux conditions initiales

r=30
tmax=10;

p0=[10 10 10];
[x1,y1,z1,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);

p0=[10 10 10.001];
[x2,y2,z2,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);

p0=[10 10 10.01];
[x3,y3,z3,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);

p0=[10 10 10.1];
[x4,y4,z4,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);


subplot(1,1,1);
plot(t,z2,'b',t,z3,'r',t,z4,'m')
hold on
plot(t,z1,'k','linewidth',2);
hold off
grid on
xlabel('t'); ylabel('z');
title('sensibilite');
```

5) Pour aller plus loin



Un zoom montre que la ligne à bien une épaisseur: c'est en fait un ensemble fractal.

Script

```
% ordre dans le chaos
r=30
tmax=500;
p0=[10 10 10];
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);

% trouver les maximums
p=[];
n=length(t);
for ind=2:n-1;
if (z(ind)>z(ind-1))&(z(ind)>z(ind+1));
    p=[p,z(ind)];
end
end

% tracer les points
for ind=1:length(p)-1;
    plot(p(ind),p(ind+1),'k.','markersize',5); hold on
end

plot([0,50],[0,50],'r');
xlim([30,52]); ylim([30,52]);
hold off
grid on

xlabel('p(n)');
ylabel('p(n+1)');
title('ordre dans le chaos');
```

Nous avons calculé les pics de l'évolution de la coordonnée z, pour t de 0 à 300. Ces pics sont tracés dans le graphique par des points: p(n) en abscisse et p(n+1) en ordonnée. On observe une structure très nette et symétrique.

La ligne rouge représente la diagonale: les points au dessus de cette ligne correspondent à des pics tels que le pic suivant est plus grand, les points au dessous correspondent à des pics tels que le pic suivant est plus petit.