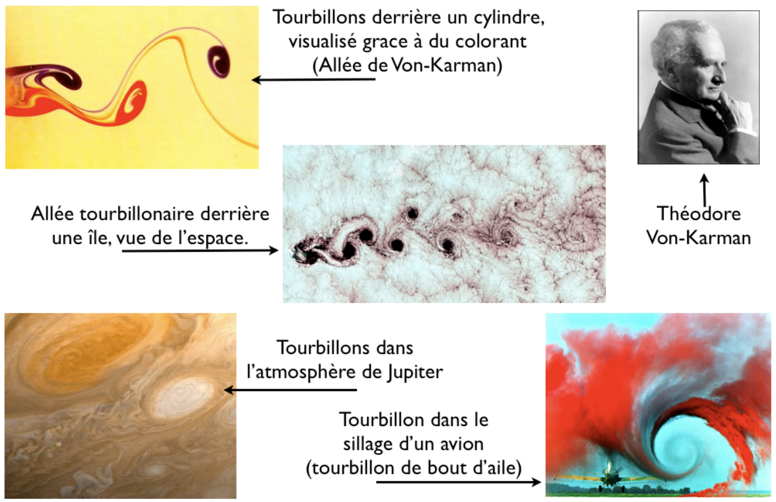
Matlab: Applications en mécanique

LA207, Université Pierre et Marie Curie.
`www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement`

2.7 TP7: dynamique tourbillonnaire

On trouve partout des tourbillons dans la nature; on peut en créer avec un petite cuillère dans une tasse à café, et voir comment ces tourbillons se déplacent. On peut les voir dans les fleuves dans le sillages des piles de ponts, on les observe dans l'atmosphère avec des dimensions gigantesque sous la forme de cyclones et d'anticyclones. Un cas célèbre de tourbillon s'observe dans le sillage d'un cylindre, c'est l'allée de Bénard-Von Karman,



On observe facilement ce type de mouvement fluide car c'est une structure très persistante. Une fois le tourbillon créé, il peut se déplacer et évoluer pendant longtemps tout en gardant sa cohérence, et peut même continuer à emmagasiner de l'énergie comme par exemple dans le cas des typhons et tornades destructrices. Dans ce TP, nous allons étudier la structure des tourbillons et voir comment ces tourbillons se déplacent.

Pour cela nous considérons un cas particulier, celui d'un fluide qui n'a pas de viscosité. Le mouvement de ces fluides est décrit par l'équation d'Euler. Ces équations ont une solution particulière que nous allons utiliser comme

modèle pour un tourbillon, c'est le *tourbillon ponctuel*. Chaque tourbillon est décrit par la position (x_0, y_0) de son centre, et par son intensité Γ.

Nous avons trois propriétés pour ce type de tourbillon:

1. Chaque tourbillon induit tout autour de lui un champ de vitesse (champ induit)

$$u(x,y) = \frac{-(y-y_0)}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\delta]}, \quad v(x,y) = \frac{(x-x_0)}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\delta]},$$

   Ici, δ est un paramètre qui évite que la vitesse tende vers l'infini en (x_0, y_0). Nous prendrons dans ce TP la valeur $\delta = 0.05$.

2. Le champ de vitesse induit par plusieurs tourbillons est la somme des champs de vitesse induit par chaque tourbillon (linéarité du champ de vitesse).

3. Chaque tourbillon se déplace à la vitesse induite en son centre par tous les autres tourbillons (advection du tourbillon).

2.7.1 Manipulations

1. Tracer avec la fonction `quiver` le champ de vitesse

$$u(x,y) = \sin(x)\cos(x), \quad v(x,y) = -\cos(x)\sin(y)$$

   pour $x \in [0, 2\pi], y \in [0, 2\pi]$, comme vu en cours. Pour ceci, vous utiliserez la fonction `meshgrid` pour génerer la grille.

2. Avec une boucle et la fonction `drawnow`, faites l'animation du champ de vitesse évoluant dans le temps:

$$u(x,y,t) = \sin(x)\cos(y-t), \quad v(x,y,t) = -\cos(x)\sin(y-t)$$

   pour $t \in [0, 4\pi]$.

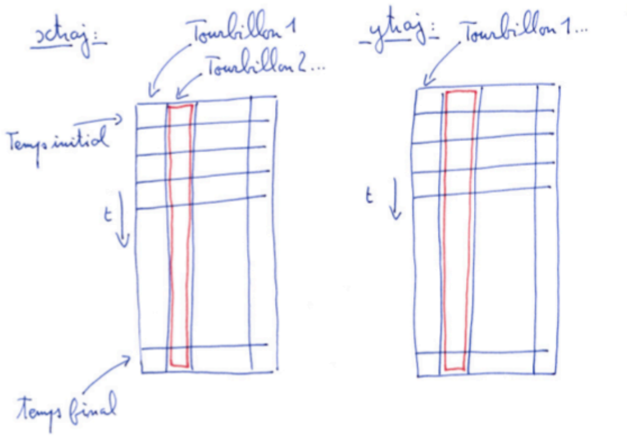
2.7.2 Etude

1. Pour commencer, nous allons tracer avec la fonction `quiver` le champ de vitesse induit par un tourbillon solitaire localisé à la position $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et d'intensité $\Gamma = 1$. Pour cela, on prendra une grille en x et en y Choisissez la grille en x et en y de sorte à ce que le champ induit soit bien visible. On ajoutera aussi un point rouge pour indiquer la position du tourbillon.

2. Tracez maintenant le champ de vitesse induit par deux tourbillons aux positions $(1, 2)$ et $(-1, 0)$, et d'intensités 1 et -2. Ajoutez des points de couleurs pour marquer sur le graphique la position de chaque tourbillon.

3. Nous allons maintenant étudier comment les tourbillons se déplacent dans le temps (en utilisant la propriété 3). Pour cela, nous vous fournissons une fonction qui calcule les trajectoires d'un ensemble de tourbillons:

```
[xtraj,ytraj,tvec]=tourbitraj(xloc,yloc,gamma,tmax)
```



Arguments d'entrée:
- `xloc`: vecteur des positions x initiales des tourbillons. On peut avoir autant de tourbillons que l'on veut. Si on a n tourbillons, ce vecteur sera donc de longueur n.
-`yloc`: vecteur des positions y initiales des tourbillons. Ce vecteur aussi aura n éléments.
-`gamma`: le vecteur des intensités de chaque tourbillon. C'est un vecteur à n éléments.
-`tmax`: le temps final du calcul: on calcule les trajectoires jusqu'à ce temps-là.
Arguments de sortie:
- `xtraj`: tableau des trajectoires des tourbillons selon la coordonnée x. Chaque colonne de ce tableau correspond à l'évolution dans le temps

de la position x d'un tourbillon.
- `ytraj`: tableau des trajectoires des tourbillons selon la coordonnée y. Chaque colonne de ce tableau correspond à l'évolution dans le temps de la position y d'un tourbillon.
- `tvec`: le vecteur du temps.

Deux tourbillons qui tournent dans la même direction (γ de même signe) sont dits *tourbillons corotatifs*, alors que deux tourbillons qui tournent dans des sens opposées (*gamma* de signes opposés) sont dits *contrarotatifs*.

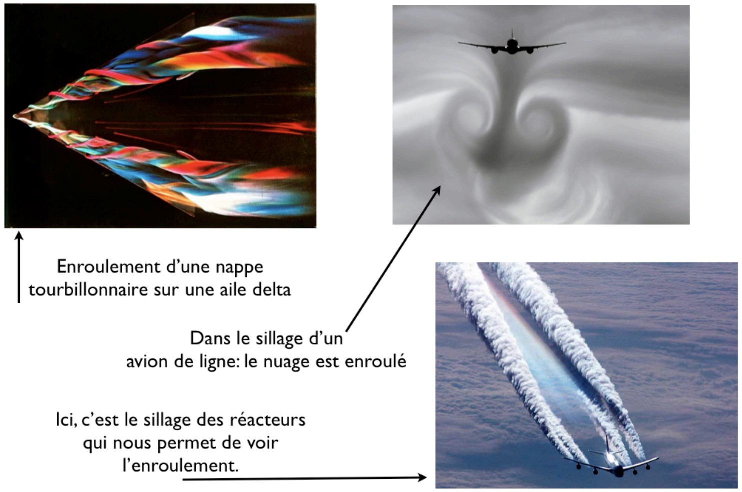
Utilisez cette fonction pour calculer la trajectoire de deux tourbillons localisés initialement ou vous le désirez. On prendra la même intensité pour les deux tourbillons. Tracez les deux trajectoires sur le même graph. On prendra des couleurs différentes pour distinguer les tourbillons.

On refait le même graph, mais avec des intensités `gamma` de signe opposé, par exemple, 1 et -1. Décrivez les différents types de trajectoires pour le cas corotatif et le cas contrarotatif.

4. Réalisez maintenant l'animation du déplacement de deux tourbillons, avec une boucle et la fonction `drawnow`.

5. Réalisez de nouveau l'animation des trajectoires, mais en traçant également le champ de vitesse induit avec la fonction `quiver`, comme pour la question 2.

6. Nous allons maintenant considérer le mouvement d'une *nappe tourbillonnaire*. Une nappe tourbillonnaire est une ligne constituée de beaucoup de petits tourbillons. Par exemple, on observe une nappe tourbillonnaire dans le sillage d'un avion: la pression est plus élevée en dessous l'aile que au dessus de l'aile, ce qui entraîne un mouvement de rotation qui donne naissance à une nappe de tourbillons.



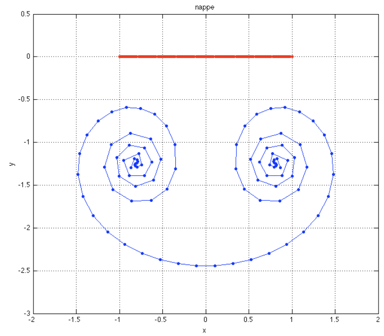
Les petits tourbillons qui constituent cette nappe obéissent eux aussi aux propriétés que nous avons décrites plus tôt. La nappe tend à s'enrouler en deux gros tourbillons de bout d'aile comme on le voit sur les images ci-dessus. Nous allons encore une fois utiliser notre fonction `tourbitraj` pour calculer l'évolution de cette nappe tourbillonnaire, qui est maintenant composée d'un grand nombre de tourbillons. On prendra la configuration initiale:

```
n=20;
xloc=linspace(-1,1,n);
yloc=zeros(1,n);
gamma=8*xloc.^3/n;
tmax=20;
```

Ici `n` est le nombre de tourbillons dans notre nappe. Ce choix de Γ correspond à une nappe de vorticité d'intensité $4x^3$.

Calculez avec la fonction `tourbitraj` l'évolution de cette nappe et faites une animation de l'évolution de la position des tourbillons. Plutôt que de simplement tracer un point au centre de chaque tourbillon, on peut aussi tracer les lignes qui joignent les centres pour bien voir la nappe. Utilisez la fonction `axis equal` pour avoir le même étirement des axes selon la verticale et l'horizontale, et imposez les limites des axes avec `xlim` et `ylim`. Pour cette animation, vous pouvez superposer

l'évolution de la nappe avec la position initiale de cette nappe pour comparaison.



7. Pour compléter cette animation, ajoutez de nouveau le champ de vitesse induit par tous les tourbillons de la nappe, avec la fonction `quiver`. Décrivez le champ de vitesse et comment il évolue en connexion avec le mouvement de la nappe.

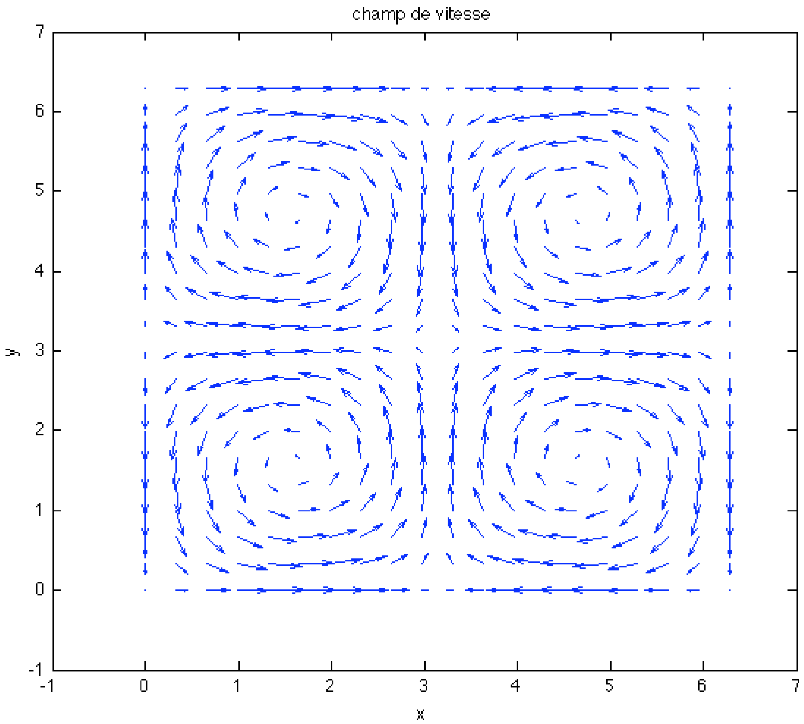
2.7.3 Pour aller plus loin

1. Nous avons vu dans la section précédente que la nappe tend à s'enrouler en deux gros tourbillons qui vont devenir les tourbillons de bout d'aile sur les avions. Nous voulons vérifier cette analogie en comparant l'évolution de la nappe avec le déplacement de deux tourbillons. Tracez un graphique qui montre que la nappe se comporte comme deux tourbillons localisés initialement en $(-1,0)$ et $(1,0)$, et d'intensité respectivement -1 et 1.

2. Comprenez-vous pourquoi dans notre cas, l'intensité des deux tourbillons de bout d'aile est de 1 et -1?

Matlab : applications en mécanique
LA207, 2010
http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement
Compte rendu TP7:Dynamique tourbillonnaire

0) Manipulations

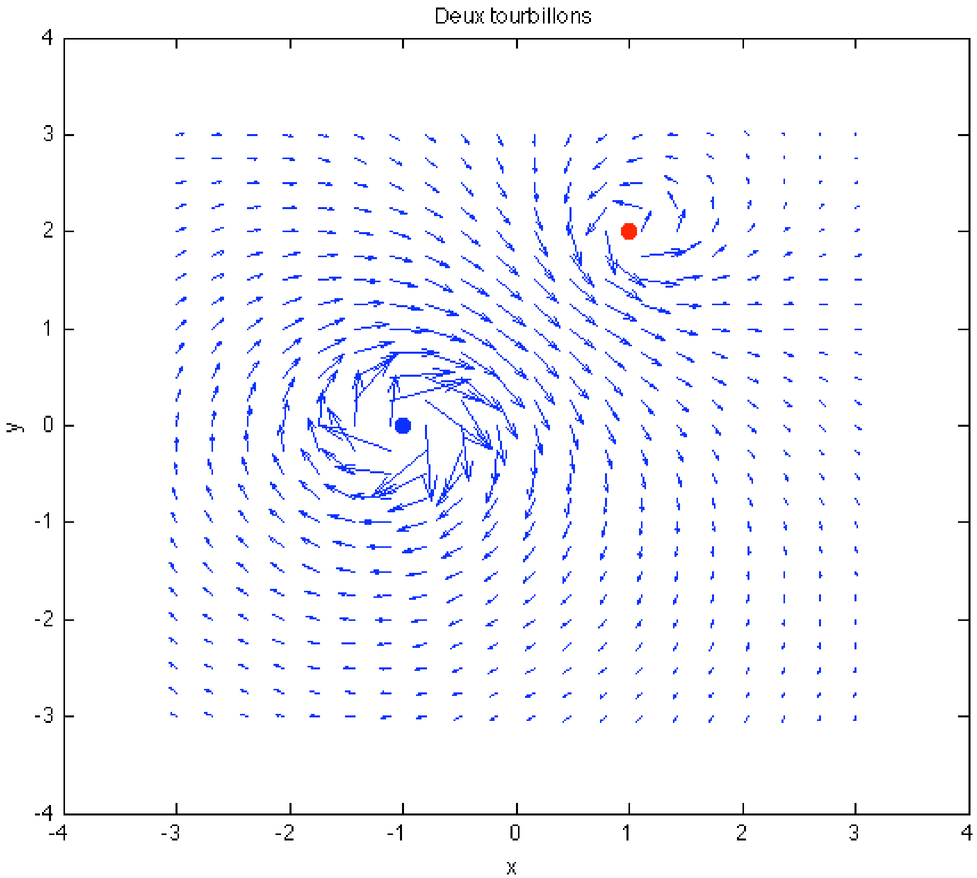


Script

```
% manipulations:
x=linspace(0,2*pi,20);
y=linspace(0,2*pi,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

n=100;
tvec=linspace(0,4*pi,n);
for ind=1:n
    t=tvec(ind);
    u=sin(X).*cos(Y-t);
    v=-cos(X).*sin(Y-t);

    quiver(X,Y,u,v,'b');
    xlabel('x');
ylabel('y');
    title('champ de
vitesse')
    drawnow
end
```

Tracé du champ de vitesse u=sin(x)cos(y), v=-cos(x)sin(y) avec quiver, et animation de l'évolution de ce champ dans le temps.

1) Champ de vitesse induit par deux tourbillons



Script

```
% grille 2D
x=linspace(-3,3,20);
y=linspace(-3,3,25);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

% position des tourbillons
x1=1; y1=2; g1=1;
x2=-1; y2=0; g2=-2;

% champ de vitesse pour chaque tourbillon
u1=-g1*(Y-y1)./(2*pi*((X-x1).^2+(Y-y1).^2+0.05));
v1=g1*(X-x1)./(2*pi*((X-x1).^2+(Y-y1).^2+0.05));

u2=-g2*(Y-y2)./(2*pi*((X-x2).^2+(Y-y2).^2+0.05));
v2=g2*(X-x2)./(2*pi*((X-x2).^2+(Y-y2).^2+0.05));

% somme des champs
u=u1+u2;
v=v1+v2;

% graph
quiver(X,Y,u,v,2); hold on
plot(x1,y1,'r.',x2,y2,'b.','markersize',20)
hold off

xlabel('x'); ylabel('y');
title('Deux tourbillons');
```

Le champ de vitesse induit par deux tourbillons est la somme des champs de vitesses induit par chaque tourbillon. Le signe de l'intensité du tourbillon (gamma) indique le sens de rotation.

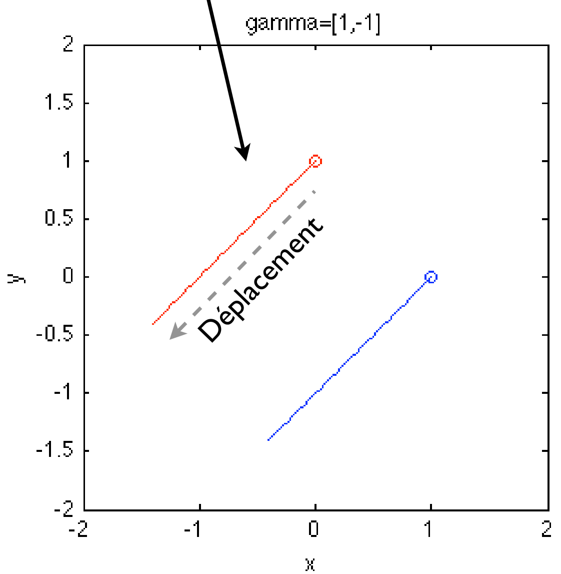
2) Déplacement des tourbillons

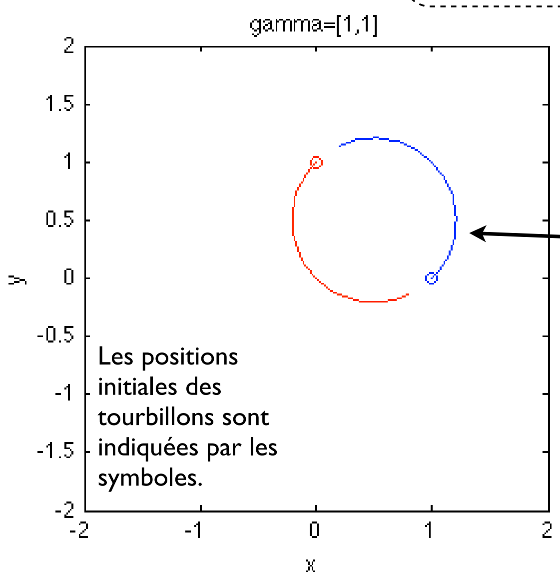
Chaque tourbillon induit un champ de vitesse qui va déplacer les autres tourbillons.

Script

```
% position initiale des deux tourbillons
xpos=[1,0];
ypos=[0,1];
tmax=18;

% Tourbillons corotatif
subplot(1,3,1)
gamma=[1,-1];
[xt,yt,t]=tourbitraj(xpos,ypos,gamma,tmax);

plot(xt(:,1),yt(:,1),'b',xt(:,2),yt(:,2),'r'); hold on;
plot(xpos(1),ypos(1),'bo',xpos(2),ypos(2),'ro'); hold
off
xlabel('x'); ylabel('y');
title('gamma=[1,-1]');
axis equal;   axis([-2,2,-2,2])

% Tourbillons contra-rotatif
subplot(1,3,2)
gamma=[1,1];
[xt,yt,t]=tourbitraj(xpos,ypos,gamma,tmax);

plot(xt(:,1),yt(:,1),'b',xt(:,2),yt(:,2),'r'); hold on;
plot(xpos(1),ypos(1),'bo',xpos(2),ypos(2),'ro'); hold
off
xlabel('x'); ylabel('y');
title('gamma=[1,1]');
axis equal;   axis([-2,2,-2,2])
```

Pour le cas de deux tourbillons corotatif (ils tournent dans le même sens) les trajectoires des deux tourbillons sont deux droites parallèles.





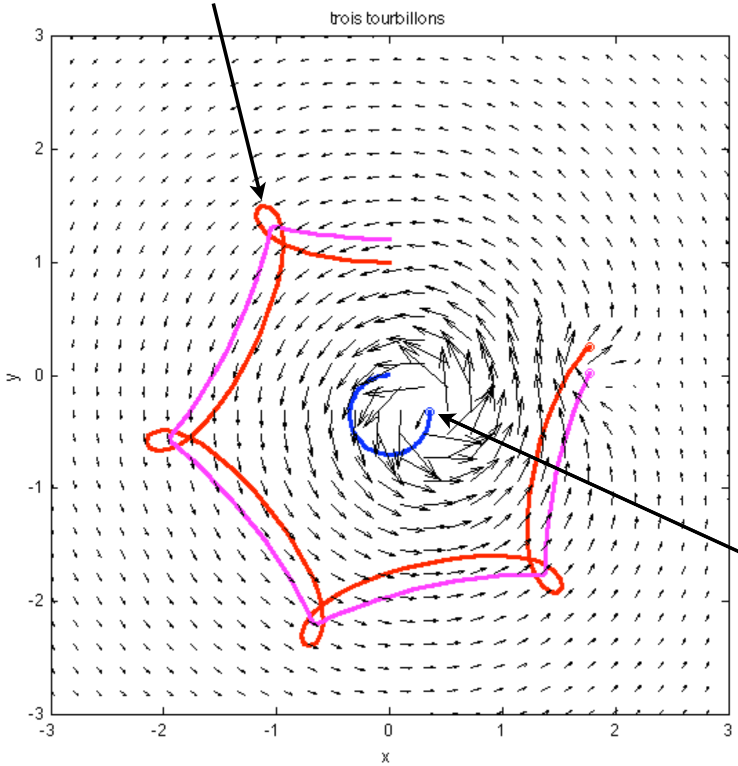
Les positions initiales des tourbillons sont indiquées par les symboles.

Pour deux tourbillons contra-rotatifs: même intensité mais sens de rotation opposé, les trajectoires sont deux cercles concentriques

3) Déplacement des tourbillons

Animation des trajectoires des tourbillons et aussi du champ de vitesse induit. Ici nous avons fait l'animation pour trois tourbillons plutôt que deux.

Trajectoire complexe des deux petits tourbillons "en orbite". La trajectoire de trois tourbillons en interaction est dite pseudo-périodique: elle se répète dans le temps mais ne revient pas à la configuration initiale.



Le tourbillon central est le plus intense (trajectoire en bleu). On voit bien le champ de vitesse qui lui est dû, qui entraîne autour de lui les deux petits tourbillons.

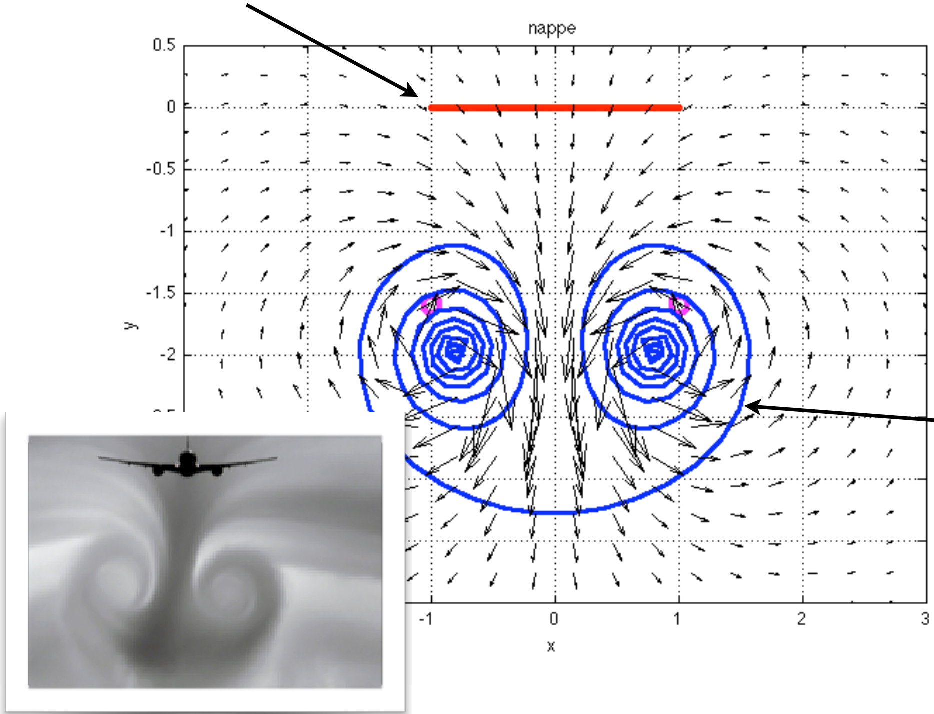
Script

```
% état initial des tourbillons
xpos=[0,0,0];
ypos=[0,1,1.2];
gamma=[0.5,0.1,-0.2];
tmax=150;

% calcul des trajectoires
[xt,yt,t]=tourbitraj(xpos,ypos,gamma,tmax);

% grille pour la champ de vitesse
x=linspace(-3,3,30);
y=linspace(-3,3,30);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

% animation
for ind=1:length(t)
    % trajectoires
    sel=1:ind;
    plot(xt(sel,1),yt(sel,1),'b',xt(sel,2),yt(sel,2),'r',xt(sel,
3),yt(sel,3),'m','linewidth',2)
    hold on;
    plot(xt(ind,1),yt(ind,1),'bo',xt(ind,2),yt(ind,2),'ro',xt(ind,
3),yt(ind,3),'mo')

    % champ de vitesse
    u=0*X; v=0*X;
    for gre=1:3
        x0=xt(ind,gre); y0=yt(ind,gre);
        uu=-gamma(gre)*(Y-y0)./(2*pi*((X-x0).^2+(Y-y0).^2+0.05));
        vv=gamma(gre)*(X-x0)./(2*pi*((X-x0).^2+(Y-y0).^2+0.05));
        u=u+uu; v=v+vv;
    end
    quiver(X,Y,u,v,2,'k');

    xlabel('x'); ylabel('y');
    title('trois tourbillons');
    axis equal; axis([-3,3,-3,3])
    hold off; drawnow;
end
```

4) Nappe tourbillonnaire

Un modèle pour le comportement du fluide autour d'une aile d'avion: nappe de vorticité. ici représentée par un grand nombre de petits tourbillons alignés selon un segment de droite.

Configuration initiale de la nappe tourbillonnaire



La nappe s'est enroulée en deux tourbillons de bout d'aile. On observe bien le champ de vitesse dû à la paire de tourbillons contrarotatifs: souffle vers le bas entre les deux tourbillons. Dans les aéroports, la fréquence des décollages/atterrissages est limitée par ces tourbillons: l'avion qui passe juste derrière est mis en danger.

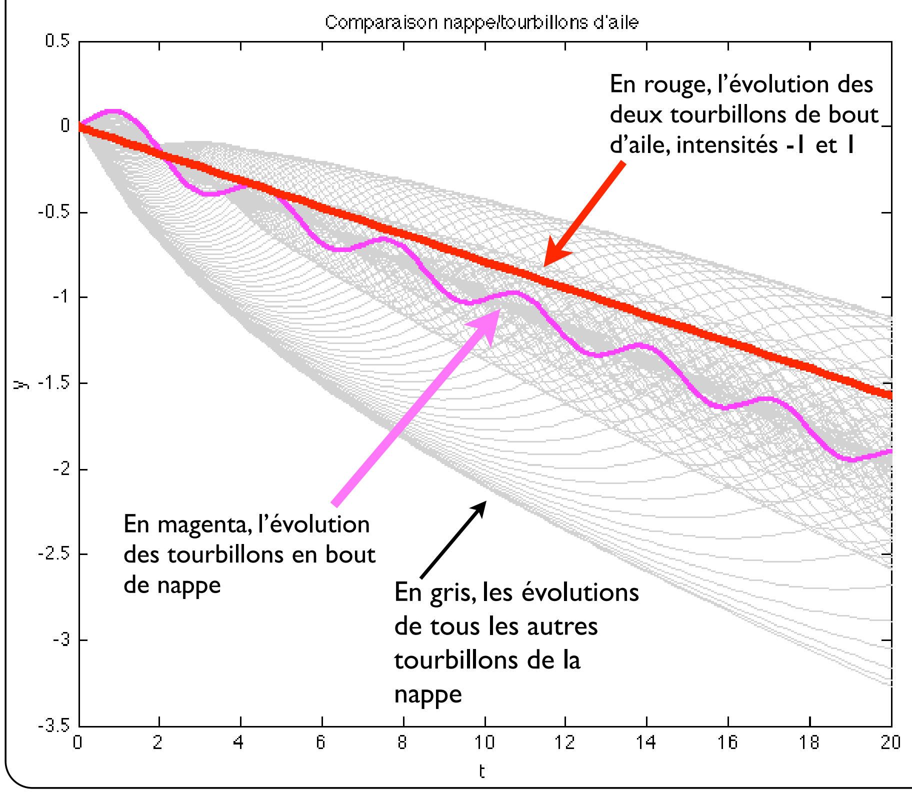
Script

```
n=200; % nombre de tourbillons
x=linspace(-1,1,n); % positions selon x
y=zeros(1,n); % positions selon y
gamma=8*x.^3/n; % les intensités des tourbillons

% marche en temps de la condition initiale
[xt,yt,t]=tourbitraj(x,y,gamma,20);

% grille pour le champ de vitesse
x=linspace(-3,3,20);
y=linspace(-4,0.5,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

for ind=1:length(t);
    % position initiale en rouge
    plot(xt(1,:),yt(1,:),'r.-','markersize',10); hold on

    % position présente en bleu
    plot(xt(ind,:),yt(ind,:),'b.-','markersize',10);

    % champ de vitesse
    u=0*X; v=0*X;
    for gre=1:n
        x0=xt(ind,gre); y0=yt(ind,gre);
        uu=-gamma(gre)*(Y-y0)./(2*pi*((X-x0).^2+(Y-y0).^2+0.05));
        vv=gamma(gre)*(X-x0)./(2*pi*((X-x0).^2+(Y-y0).^2+0.05));
        u=u+uu; v=v+vv;
    end
    quiver(X,Y,u,v,2,'k'); hold on

    hold off; axis equal;    axis([-3,3,-4,0.5]);
    xlabel('x'); ylabel('y'); title('nappe');grid on
    drawnow
end
```

5) Deux tourbillons de bout d'aile

On compare l'enroulement de la nappe tourbillonnaire avec l'évolution de deux tourbillons contrarotatifs, positionnés initialement en bout d'aile, d'intensités -1 (à gauche) et 1 (à droite).

Sur le graph, on trace l'évolution de la position y de tous les tourbillons (leur descente au cours du temps).



Script

```
% comparaison avec deux tourbillons

n=200; % nombre de tourbillons
x=linspace(-1,1,n); % positions selon x
y=zeros(1,n); % positions selon y
gamma=8*x.^3/n; % les circulations
tmax=20; % temps final

% marche en temps de la condition initiale
[xt,yt,t]=tourbitraj(x,y,gamma,tmax);

% trajectoire de deux tourbillons en bouts d'aile:
[xtt,ytt,tt]=tourbitraj([-1,1],[0,0],[-1,1],tmax);

% graph des position selon y de tous les tourbillons de la nappe
plot(t,yt,'k'); hold on

% graph des positions des premiers et derniers tourbillons de la
nappe
plot(t,yt(:,[1,end]),'m','linewidth',2);

% graph evolution des deux tourbillons
plot(tt,ytt,'r','linewidth',4);

xlabel('t'); ylabel('y');
title('Comparaison nappe/tourbillons d''aile')
```

L'intensité totale de la nappe est la somme des intensités de chaque tourbillons qui la constitue. L'intégrale de l'intensité de chaque côté de l'aile est égale à -1 pour la gauche et 1 pour l'aile droite (intégrale de $\Gamma=4x^3$ entre -1 et 0 puis entre 0 et 1).

Ainsi, lorsque tous les tourbillons de la nappe de chaque côté d'aile s'enroulent, cela est équivalent à deux grand tourbillons.

Cette équivalence est un bon modèle pour comprendre le sillage des avions, mais n'est pas exact, comme on le voit sur le graphique.

6) La fonction tourbitraj

```
function [xtraj,ytraj,tvec]=tourbitraj(x,y,g,tmax);
% calcule la trajectoire de pleins de tourbillons en interaction
global gamma; gamma=g(:);

% utilise ode45 pour la marche en temps
% avec la fonction tourbiv
[tvec,sol]=ode45(@tourbiv,[0,tmax],[x(:);y(:)]);

% extraction du resultat sous le bon format
n=length(x);
xtraj=sol(:,1:n);
ytraj=sol(:,n+1:2*n);


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function speed=tourbiv(t,pos)
% cette fonction donne la vitesse induite aux points x,y
% par des tourbillons de circulation gamma en ces positions

global gamma
delta=0.05; % paramètre de régularisation

n=length(pos)/2;
x=pos(1:n); y=pos(n+1:2*n);

% allocation des tableaux pour les vitesses
u=zeros(n,1);
v=zeros(n,1);

% boucle sur les tourbillons
for ind=1:n
    sel=1:n; sel(ind)=[];
    % le denominateur (régularisé)
    d=2*pi*((x(ind)-x(sel)).^2+(y(ind)-y(sel)).^2+delta);

    % vitesses selon x et y
    u(ind)=sum(-gamma(sel).*(y(ind)-y(sel))./d);
    v(ind)=sum(gamma(sel).*(x(ind)-x(sel))./d);
end
speed=[u;v];
```

Fonction

Cette fonction calcule les trajectoires d'une famille de tourbillons de positions initiale et intensité donnés. Elle utilise la fonction de Matlab ode45 pour simuler l'équation différentielle du mouvement.

Ici le champ de vitesse induit par chaque tourbillon est décrit dans la fonction tourbiv