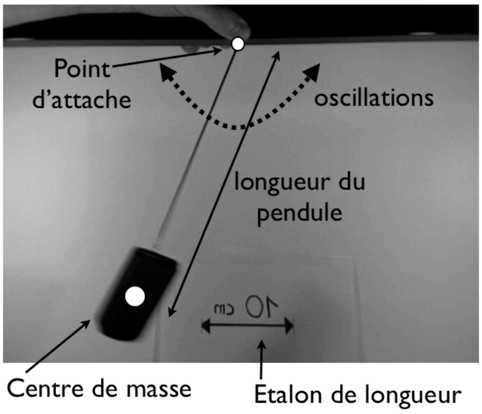
Matlab: Applications en mécanique

LA207, Université Pierre et Marie Curie.
www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement

2.7 2011 TP6: Mesures d'après un film, le pendule

La caméra est un instrument scientifique irremplaçable. Tout ce que l'on voit de nos yeux, on peut le capturer avec une caméra. Pour les phénomènes 3D, il faut deux caméras: deux points-de vue, mais pour ce qui se passe plus ou moins dans un plan, une seule caméra suffit; ce sera le cas ici. Une fois que l'image est enregistrée, toute l'information est disponible, et peut être traitée avec l'ordinateur. Dans ce TP, nous allons mesurer comment la fréquence d'oscillation T d'un pendule dépend de la longueur L de ce pendule, et comparer cette mesure avec la prédiction théorique $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$.



Sur l'image ci-dessus, on voit un poids qui pend au bout d'un fil noir sur fond blanc. Nous avons un étalon de longueur, 10 centimètres, qui va nous permettre d'estimer la distance L entre le centre de masse du poids et le point d'attache. Avec le film, nous allons obtenir une fonction du temps dont la fréquence d'oscillation nous renseignera sur notre pendule.

2.7.1 Manipulations

1. Extraction de sous-tableaux: On peut extraire d'un tableau des éléments sous la forme d'un sous tableau. Par exemple le code

```
a=randn(10,10)
sel1=[1,2];
sel2=[1,2];
e=a(sel1,sel2)
```

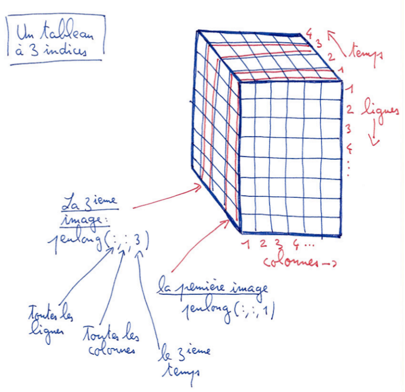
met dans `e` le tableau des deux premières lignes et colonnes de `a`. Ecrivez les commandes qui extraient de `a` le sous tableau qui correspond aux lignes dont l'indice est pair et aux colonnes dont l'indice est impair.

2.7.2 Etude

Les fichier qui contiennent les images se trouvent sur le disque sous le format `.mat`. C'est un format qui permet de sauver sur le disque des variables de matlab. Il y en a deux, qui correspondent à deux longueurs de pendule: `penlong.mat` et `pencourt.mat`. Nous allons commencer par travailler sur `penlong.mat`. On le charge dans le workspace de matlab avec la fonction `load`:

```
>> load penlong.mat
```

Vous avez maintenant une matrice dans votre workspace, `m`. C'est une matrice à trois dimensions, c'est à dire à trois indices. Le premier indice correspond à la position selon l'axe vertical, le second indice correspond à la position selon l'axe horizontal, et le troisième indice correspond à la position dans le temps. Par exemple, la quinzième image est le sous-tableau `m(:,:,15)`.



L'image est stockée dans la matrice par l'intensité des tons de gris: la valeur la plus petite du tableau correspond au noir et la valeur la plus grande du tableau correspond au blanc.

1. **Visionner le film**: chaque image individuelle se visualise avec la fonction `imagesc`. Ecrire un code qui fasse l'animation du film. On utilisera les commandes `axis equal; axis tight` pour que l'image aie le bon rapport d'aspect. Vous afficherez comme titre le numéro de l'image. Vous utiliserez la commande `colormap gray` de sorte à ce que l'image soit affichée en noir et blanc.

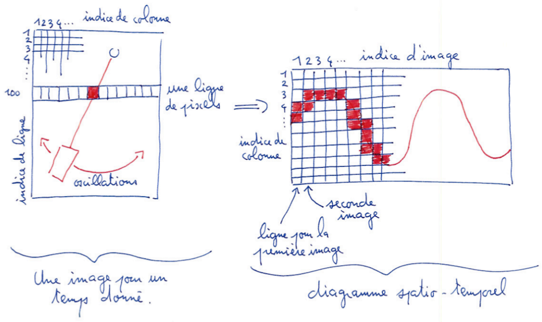
2. **Détermination de la longueur L du pendule:** A partir des images originales du film, en utilisant l'étalon de longueur visible, mesurez la longueur (en mètres) entre le point d'attache et le centre de masse du pendule. Choisissez parmi les images du film une image pour laquelle cette mesure est facile (par exemple pour laquelle le fil est vertical). Utiliser pour cette mesure l'outil d'étiquetage:


3. **Eclaircissement d'une sous-fenêtre:** Les valeurs stockées dans le tableau des images correspondent au ton de gris de chaque pixel. Plus cette valeur est élevée, plus la teinte est claire. Réalisez de nouveau

l'animation en mettant en évidence les pixels qui sont entre les lignes 100 et 280 et entre les colonnes 50 et 240 en les rendant plus clair, par exemple en multipliant le ton de gris qui correspond à ces pixels par trois. Vecteurs de selection du sous-tableau:

```
selx=50:240; sely=100:280;
```

4. **Diagramme spatio-temporel**: Nous allons maintenant travailler avec la sous fenêtre de la question précédente, que l'on stocke dans le tableau `f=m(selx,sely,:)`. Nous avons vu que le sous-tableau `f(:,:,15)` correspond à la quinzième image de l'animation. Par ailleurs, le sous-tableau `f(100,:,:)` correspond à l'évolution dans le temps de la 100ième ligne de l'image: c'est un sous tableau qui contient l'évolution selon x et t de ces pixels:



Dans trois sous-fenêtres graphiques, représenter ce diagramme spatio-temporel pour trois choix de ligne de pixels, qui correspondent donc à la corde du pendule à trois hauteurs différentes. On choisira pour la suite des questions la hauteur pour laquelle l'oscillation est la plus clairement visible.

Ici encore, le tableau qui vous affichez est une image en tons de gris, à tracer avec la fonction `imagesc`. Notez que la taille des matrices correspondant à cette sélection est $(1, 351, 100)$, puisque nous avons sélectionné une seule valeur du premier indice. Pour éliminer le premier indice qui ne sert plus à rien, utilisez la fonction `squeeze` (tapez `help squeeze` pour comprendre comment l'utiliser).

5. **Le vecteur temporel:** Jusqu'à maintenant nous avons représenté les images avec pour indices les indices de lignes et de colonnes de pixels, et les numéros d'image. Maintenant, nous allons indicer les images avec le vrai temps pour ensuite en tirer la période d'oscillation T. Construire le vecteur `tvec`, sachant que le film a 100 images, et est pris avec 13 images par seconde. On prendra $t = 0$ pour la première image.

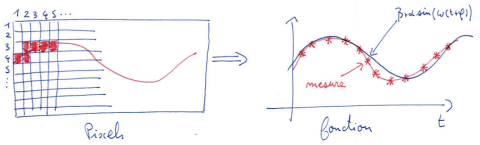
6. **De l'image vers la fonction:** Le diagramme spatio-temporel que nous avons obtenu aux questions précédentes est encore une image: il s'agit de tons de gris, et non de la valeur de la position de la corde du pendule. Nous allons maintenant en extraire une fonction du temps: pour chaque temps nous aurons la position de la corde dans le diagramme spatio-temporel.

   Pour cela, construisez un vecteur `osc` qui a autant d'éléments que nous avons d'images. Et pour chaque temps, emmagasiner dans ce vecteur l'indice du point le plus sombre (la valeur de ton de gris la plus faible). Ce pixel le plus sombre correspond normalement au centre de la corde. Pour cela on utilisera la fonction `min`:

```
[val,lov]=min(vec);
```

   ou l'argument d'entrée `vec` est un tableau 1D, donne dans l'argument de sortie `val` la valeur de l'élément le plus petit, et son indice dans l'argument de sortie `loc`.

   Tracez maintenant le graph de `osc` en fonction du temps, on tracera avec une ligne continue et des marqueurs pour bien voir les points de mesure.



7. **Comparaison avec un sinus:** La théorie veux que l'oscillation obtenue soit proche d'une oscillation sinusoïdale. Nous allons vérifier cela. Superposez au graph de la question précédente la fonction

$$g(t) = \beta + \alpha \sin[\omega(t + \phi)]$$

ou β correspond à la valeur moyenne autour de laquelle le sinus oscille, α correspond à l'amplitude de l'oscillation, ω est la pulsation, c'est à dire 2π divisé par la période d'oscillation, et ϕ est un déphasage. Estimez les paramètres $\beta, \alpha, \omega, \phi$ qui donnent la plus grande ressemblance entre la mesure expérimentale et le sinus tracé. Ici encore, vous pouvez utiliser l'outil d'étiquetage pour mesurer la période, l'amplitude et le déphasage sur l'oscillation mesurée.

8. **Pendule court:** A partir de `pencourt.mat`, estimer la longueur du pendule et la période d'oscillation du pendule court. Pour cela, vous pouvez sautez des étapes par rapport à la procédure que nous avons suivie pour le pendule long.

9. **Comparaison avec la théorie:** La théorie dit que pour une faible amplitude d'oscillation, la période d'oscillation est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

   avec $g = 9.81$ l'accélération de la gravité[2]. Tracez le graph de la variation de T en fonction de L (puisque ici g est fixé). Superposez à ce graph, les point (L_1, T_1) et (L_2, T_2) qui correspondent à nos deux mesures expérimentales. La théorie marche-t'elle?

[2]Cette formule est exacte pour des oscillations d'amplitude infinitésimale, et a une erreur d'environ 5% pour un angle maximum de 50°.