Matlab : applications en mécanique. LA207

Université Pierre et Marie Curie.
Licence de mécanique.
Examen final, juin 2012.
Sujet du matin.

Ex1 Compétences générales

1) Tracez la courbe paramétrée («coeur de Raphaël Laporte», cf mathcurve.com) pour le paramètre t variant de 0 à 2π :

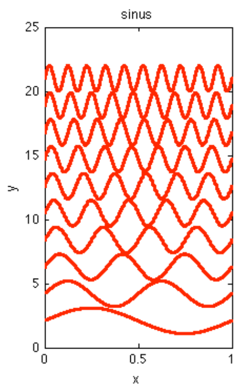
$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

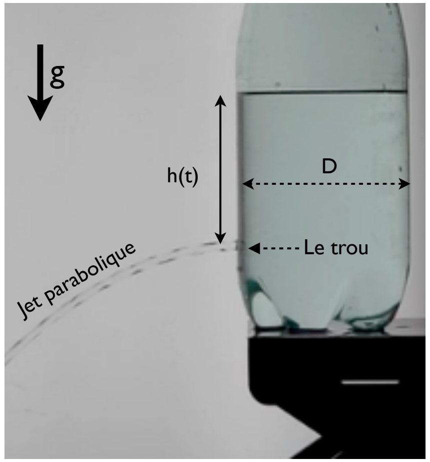
2) Ecrivez un code Matlab qui calcule la somme suivante (expansion de Taylor du cosinus en 0) pour une valeur donnée a=3π/4, et N=10 :

$$S_N(a) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}$$

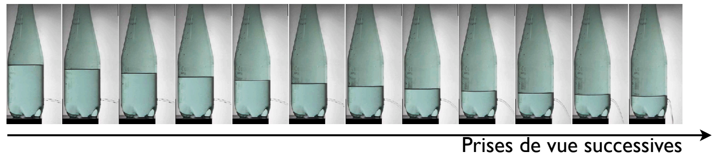
Tracez un graphique qui montre que cette somme tend vers -√2/2 lorsque N devient grand (la valeur de cos(3π/4)).

3) Ecrivez un code matlab qui reproduit qualitativement la figure ci dessous (une fonction sinus dont on fait varier la période et la hauteur) :





Ex2 Toricelli



L'image toricelli.tif représente la vidange d'une bouteille de Badoit qui a été percée d'un petit trou de diamètre d. C'est l'expérience de Toricelli. Avec l'équation de Bernoulli, on montre que la vitesse du jet à un temps donné est égale à √2gh, avec h la hauteur entre le trou et la surface de l'eau, et g=9.81m/s2. En prenant en compte la conservation du débit, on montre que la hauteur h évolue dans le temps comme ceci

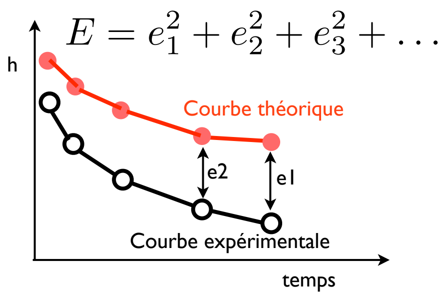
$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2$$

Ou h0 est la hauteur initiale, d le diamètre du petit trou, et D le diamètre de la bouteille. Nous allons étudier ce phénomène en comparant l'expérience à cette théorie.

1) Lisez l'image toricelli.tif et affichez là dans une fenêtre graphique.
2) Calculez la taille d'un pixel de l'image en prenant pour étalon de longueur le diamètre de la bouteille D=8 centimètres.
3) Le vecteur temps: Le film est pris à 30 prises de vue par seconde, et le numéro de chaque prise de vue est affiché sur l'image. Construisez le tableau tvec qui contient les valeurs successives des temps de notre expérience.
4) Avec la fonction ginput, mesurez les valeurs successives de h(t) en mètres: la hauteur entre le centre du petit trou et la surface de l'eau. Vous utiliserez pour la transformation de pixel en mètre la taille d'un pixel que vous avez calculée à la question 2.
5) Tracez le graphique de h (en mètres) en fonction de t (en secondes). Annotez votre graphique: labels et titre. Voici notre courbe expérimentale.

Nous allons maintenant comparer ce graphique expérimental avec la formule théorique.

6) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour d le diamètre du petit trou égal à 3 millimètres. Cette valeur du diamètre est elle trop grande ou trop petite? Justifiez votre réponse en décrivant le graphique.
7) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour 20 valeurs successives de d entre 3 et 6mm. En déduire une valeur estimée du diamètre d.
8) Maintenant une dernière manière pour estimer d: pour chaque valeur successive de d entre 3 et 6mm, calculez l'erreur E au sens des moindres carrés entre la courbe expérimentale et la courbe théorique. Cette erreur est la somme des carrés de l'erreur entre la valeur expérimentale et la valeur théorique. Tracez la courbe de E en fonction de d et déduisez en le diamètre du trou de notre bouteille de Badoit.

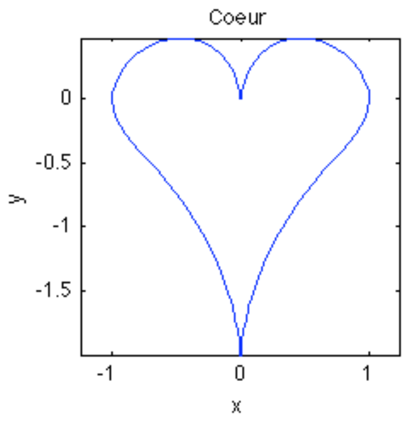


Ex I Compétences générales

1) Tracez la courbe paramétrée («coeur de Raphaël Laporte», cf mathcurve.com) pour le paramètre t variant de 0 à 2π:

$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

```
t=linspace(0,2*pi,100);
x=sin(t).^3; y=cos(t)-cos(t).^4;
plot(x,y)

axis equal
xlabel('x'); ylabel('y'); title('sinus')
```

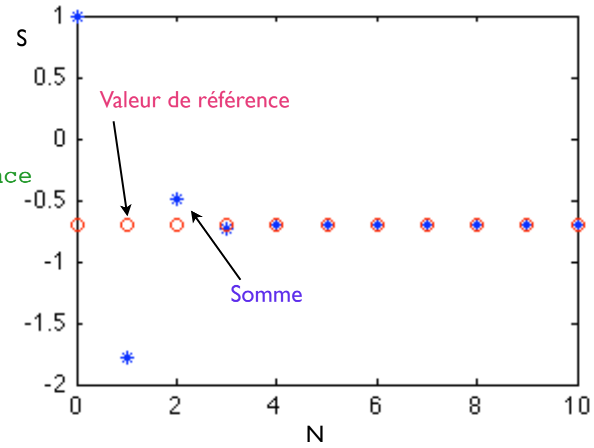


2) Ecrivez un code Matlab qui calcule la somme suivante (expansion de Taylor du cosinus en 0) pour une valeur donnée a=3π/4:

$$S_N(a) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}$$

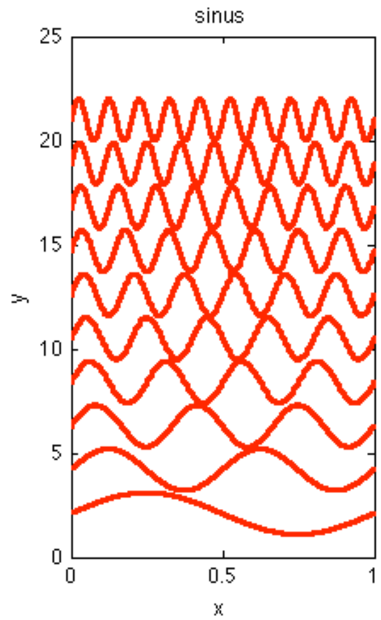
Tracez un graphique qui montre que cette somme tend vers -√2/2 lorsque N devient grand (la valeur de cos(3π/4)).

```
s=0; % on initialise la somme
N=10; % le nombre d'itérations
a=3*pi/4;
for k=0:N % la boucle
s=s+(-1)^k*a^(2*k)/(factorial(2*k))
% on trace la somme et la valeur de référence
plot(k,s,'*',k,-sqrt(2)/2,'ro'); hold on
end
```



3) Ecrivez un code matlab qui reproduit qualitativement la figure ci dessous (une fonction sinus dont on fait varier la période et la valeur moyenne):

```
x=linspace(0,1,1000); % les valeurs des x
for n=1:10 % une boucle de 1 à 10
y=2.1*n+sin(n*x*(2*pi)); % le sinus
plot(x,y,'r','linewidth',2); % on trace le graphique
hold on; % pour superposer les graphiques
end
xlabel('x'); ylabel('y'); title('sinus')
```



Ex2 Toricelli

L'image toricelli.tif représente la vidange d'une bouteille de Badoit qui a été percée d'un petit trou de diamètre d. C'est l'expérience de Toricelli. Avec l'équation de Bernoulli, on montre que la vitesse du jet à un temps donné est égale à $\sqrt{2gh}$, avec h la hauteur entre le trou et la surface de l'eau, et g=9.81m/s2. En prenant en compte la conservation du débit, on montre que la hauteur h évolue dans le temps comme ceci

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2$$

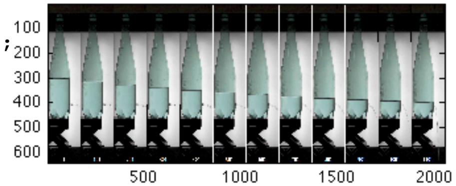
Ou h0 est la hauteur initiale, d le diamètre du petit trou, et D le diamètre de la bouteille. Nous allons étudier ce phénomène en comparant l'expérience à cette théorie.

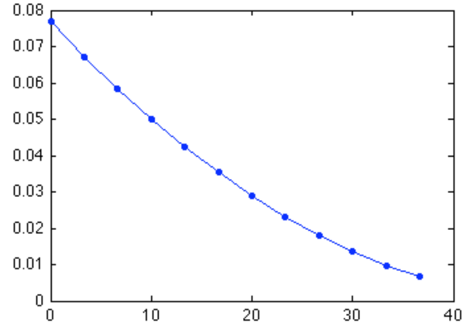
1) Lisez l'image toricelli.tif et affichez là dans une fenêtre graphique.
2) Calculez la taille d'un pixel de l'image en prenant pour étalon de longueur le diamètre de la bouteille D=8 centimètres.
3) Le vecteur temps: Le film est pris à 30 prises de vue par seconde, et le numéro de chaque prise de vue est affiché sur l'image. Construisez le tableau tvec qui contient les valeurs successives des temps de notre expérience.
4) Avec la fonction ginput, mesurez les valeurs successives de h(t) en mètres: la hauteur entre le centre du petit trou et la surface de l'eau. Vous utiliserez pour la transformation de pixel en mètre la taille d'un pixel que vous avez calculée à la question 2.
5) Tracez le graphique de h (en mètres) en fonction de t (en secondes). Annotez votre graphique: labels et titre. Voici notre courbe expérimentale.

Nous allons maintenant comparer ce graphique expérimental avec la formule théorique.

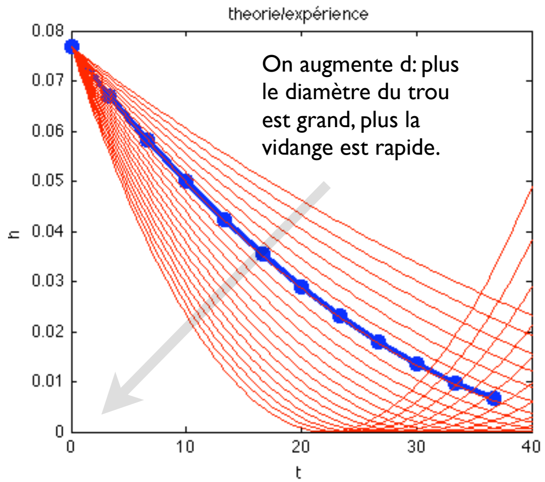
6) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour d le diamètre du petit trou égal à 3 millimètres. Cette valeur du diamètre est elle trop grande ou trop petite? Justifiez votre réponse en décrivant le graphique.
7) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour 20 valeurs successives de d entre 3 et 6mm. En déduire une valeur estimée du diamètre d.
8) Maintenant une dernière manière pour estimer d: pour chaque valeur successive de d entre 3 et 6mm, calculez l'erreur E au sens des moindres carrés entre la courbe expérimentale et la courbe théorique. Cette erreur est la somme des carrés de l'erreur entre la valeur expérimentale et la valeur théorique. Tracez la courbe de E en fonction de d et déduisez en le diamètre du trou de notre bouteille de Badoit.

```
% on lit et affiche l'image
a=imread('films_matlab/toricelli.tif');
subplot(1,2,1)
image(a);

% la taille des pixels en mètres
taillepix=0.08/(801-692);

% les points mesurés sur l'image
d=1000*[ 0.0626    0.3024
    0.2245    0.3157
    0.3864    0.3275
    0.5592    0.3388
    0.7409    0.3493
    0.9100    0.3588
    1.0882    0.3676
    1.2519    0.3755
    1.4228    0.3827
    1.5974    0.3885
    1.7683    0.3938
    1.9356    0.3980];

% transformation de référentiel
h=d(:,2);
h=-taillepix*(h-407);
```



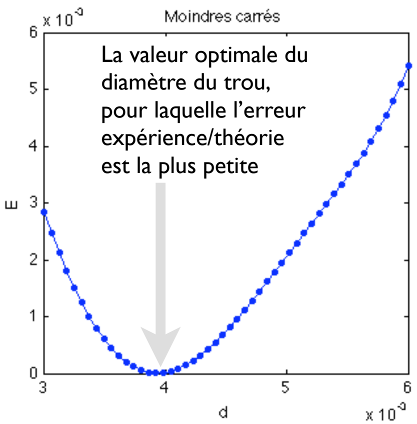



```
subplot(1,2,2);
% le vecteur du temps
t=((1:100:1101)-1)/30;
% on trace les données expérimentales
plot(t,h,'b.-');
```




```
% boucle pour faire varier le diamètre
for d=linspace(0.003,0.006,20)
h0=h(1);
tt=linspace(0,40,100);
htheo=(sqrt(h0)-(d^2/0.08^2)*sqrt(9.81/2)*tt).^2;

plot(tt,htheo,'r')
end
xlabel('t'); ylabel('h'); title('theorie/expérience')

break
```

```
% calcul de l'erreur moindres carrés
dvec=linspace(0.003,0.006,50); % les valeurs de d
Evec=zeros(50,1); % un tableau pour mémoriser l'erreur

% la boucle
for ind=1:length(dvec)
h0=h(1); % la valeur initiale de h
d=dvec(ind); % la valeur actuelle du diamètre

% la formule théorique
htheo=(sqrt(h0)-(d^2/0.08^2)*sqrt(9.81/2)*t).^2;

% calcul de l'erreur aux moindres carrés
Evec(ind)=sum((htheo-h').^2);
end

% on trace le graphique
plot(dvec,Evec,'b.-');
xlabel('d'); ylabel('E'); title('Moindres carrés')
```



Matlab : applications en mécanique.
LA207

Université Pierre et Marie Curie.
Licence de mécanique.
Examen final, juin 2012.
Sujet de l'après-midi.

Ex1 Compétences générales

1) Tracez la courbe paramétrée en coordonnées polaires («papillon de T. Fay», cf mathcurve.com) pour le paramètre θ variant de 0 à 2π :

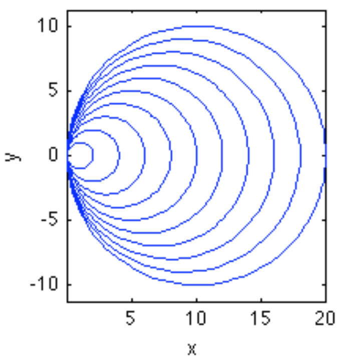
$$r = e^{\cos(\theta)} - 2\cos(4\theta)$$

2) Ecrivez un code Matlab qui calcule la somme suivante (expansion de Taylor de l'exponentielle en 0) pour une valeur donnée a=2 :

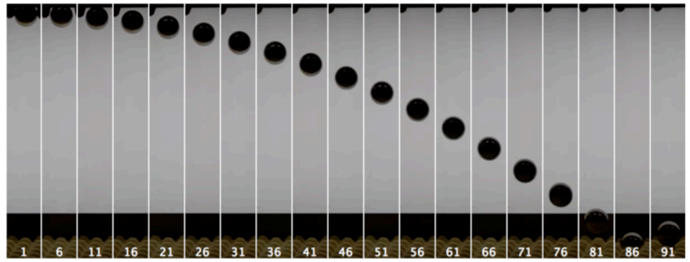
$$S_N(a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!}$$

Tracez un graphique qui montre que cette somme tend vers exp(2) lorsque N devient grand.

3) Ecrivez un code matlab qui reproduit qualitativement la figure ci dessous (un cercle dont on fait varier le rayon et le centre):



Ex2 Chute libre



Prises de vues successives

L'image chutelibre.tif représente la chute d'une boule sans vitesse initiale. Cet objet est soumis à la seule force de son poids, puisque aux vitesses qu'elle atteint et pour sa masse, on peux négliger la contribution des forces de frottement aérodynamiques. La boule chute donc à accélération constante, ce qui fait que la distance x au point de lâcher évolue comme :

$$x = gt^2/2$$

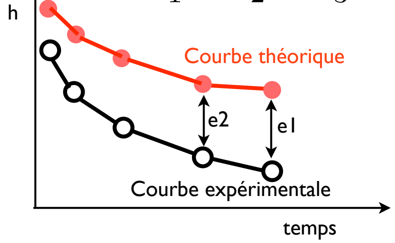
Ou g est l'accélération de la gravité dont nous allons estimer la valeur grâce à cette expérience, et t est le temps compté depuis le lâcher de la boule (l'image initiale).

1) Lisez l'image chutelibre.tif et affichez là dans une fenêtre graphique.
2) Calculez la taille d'un pixel de l'image en prenant pour étalon de longueur la hauteur de fenêtre lumineuse dans le fond de l'image H=35.5cm.
3) Le vecteur temps: Le film est pris à 300 prises de vue par seconde, et le numéro de chaque prise de vue est affiché sur l'image. Construisez le tableau tvec qui contient les valeurs successives des temps de notre expérience.
4) Avec la fonction ginput, mesurez les valeurs successives de x(t) en mètres: la hauteur entre le point le plus bas de la boule à t=0, et le point le plus bas de la boule aux temps t successifs. Vous utiliserez pour la transformation de pixel en mètre la taille d'un pixel que vous avez calculée à la question 2.
5) Tracez le graphique de x (en mètres) en fonction de t (en secondes). Annotez votre graphique : labels et titre. Voici notre courbe expérimentale.

Nous allons maintenant comparer ce graphique expérimental avec la formule théorique.

6) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour g=5. Cette valeur de g est elle trop grande ou trop petite? Justifiez votre réponse en décrivant le graphique.
7) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour 20 valeurs successives de g entre 5 et 15. En déduire une valeur estimée de g.
8) Maintenant une dernière manière pour estimer g : pour chaque valeur successive de g entre 5 et 15, calculez l'erreur E au sens des moindres carrés entre la courbe expérimentale et la courbe théorique. Cette erreur est la somme des carrés de l'erreur entre la valeur expérimentale et la valeur théorique. Tracez la courbe de E en fonction de g et déduisez-en l'accélération de la gravité à la surface de notre planète la terre.

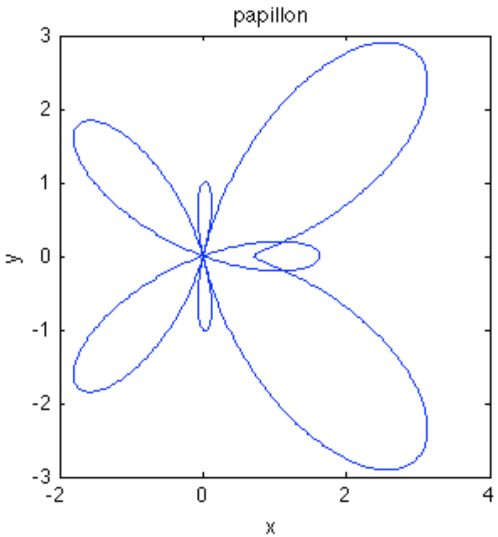
$$E = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots$$



Ex I Compétences générales

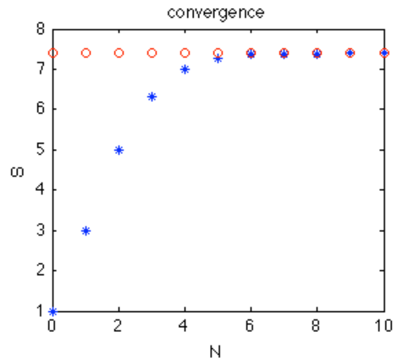
1) Tracez la courbe paramétrée en coordonnées polaires («papillon de T. Fay», cf mathcurve.com) pour le paramètre θ variant de 0 à 2π:

```
% le tableau des valeurs de theta
th=linspace(0, 2*pi,1000);

% evolution du rayon
r=exp(cos(th))-2*cos(4*th);

% transformation en coordonnées cartésoennes
x=r.*cos(th);
y=r.*sin(th);

% on trace
plot(x,y,'b')
xlabel('x');ylabel('y')
title('papillon');
```



2) Ecrivez un code Matlab qui calcule la somme suivante (expansion de Taylor de l'exponentielle en 0) pour une valeur donnée a=2:

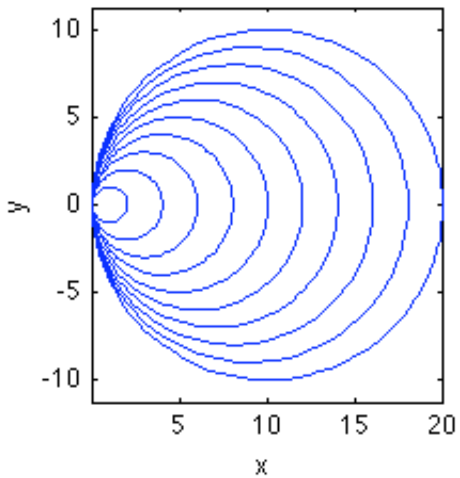
```
s=0; % on initialise la somme
N=10; % le nombre d'itérations
a=2;
for k=0:N % la boucle
s=s+a^k/(factorial(k));
% on trace la somme et la valeur de référence
plot(k,s,'*',k,exp(a),'ro'); hold on
end
xlabel('N');ylabel('S'); title('convergence');
```



Tracez un graphique qui montre que cette somme tend vers exp(2) lorsque N devient grand.

3) Ecrivez un code matlab qui reproduit qualitativement la figure ci dessous (un cercle dont on fait varier le rayon et le centre):

```
% le tableau des theta
th=linspace(0,2*pi,100);
% les valeurs de x et y pour un cercle de centre 0
x=cos(th);
y=sin(th);

% une boucle pour faire varier le rayon et le centre
for a=1:10;
    % on trace un cercle
    plot(x*a+a,y*a,'b','linewidth',1);
    hold on
end
% on annote le graphique
axis equal
xlabel('x'); ylabel('y')
```



Ex2 Chute libre

L'image chutelibre.tif représente la chute d'une boule sans vitesse initiale. Cet objet est soumis à la seule force de son poids, puisque aux vitesses qu'elle atteint et pour sa masse, on peux négliger la contribution des forces de frottement aérodynamiques. La boule chute donc à accélération constante, ce qui fait que la distance x au point de lâcher évolue comme:

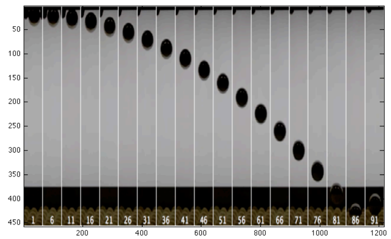
Ou g est l'accélération de la gravité dont nous allons estimer la valeur grâce à cette expérience, et t est le temps compté depuis le lâcher de la boule (l'image initiale).

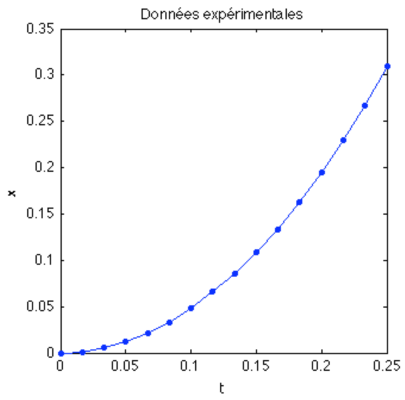
1) Lisez l'image chutelibre.tif et affichez là dans une fenêtre graphique.
2) Calculez la taille d'un pixel de l'image en prenant pour étalon de longueur la hauteur de fenêtre lumineuse dans le fond de l'image H=35.5cm.
3) Le vecteur temps: Le film est pris à 300 prises de vue par seconde, et le numéro de chaque prise de vue est affiché sur l'image. Construisez le tableau tvec qui contient les valeurs successives des temps de notre expérience.
4) Avec la fonction ginput, mesurez les valeurs successives de x(t) en mètres: la hauteur entre le point le plus bas de la boule à t=0, et le point le plus bas de la boule aux temps t successifs. Vous utiliserez pour la transformation de pixel en mètre la taille d'un pixel que vous avez calculée à la question 2.
5) Tracez le graphique de x (en mètres) en fonction de t (en secondes). Annotez votre graphique: labels et titre. Voici notre courbe expérimentale.

Nous allons maintenant comparer ce graphique expérimental avec la formule théorique.

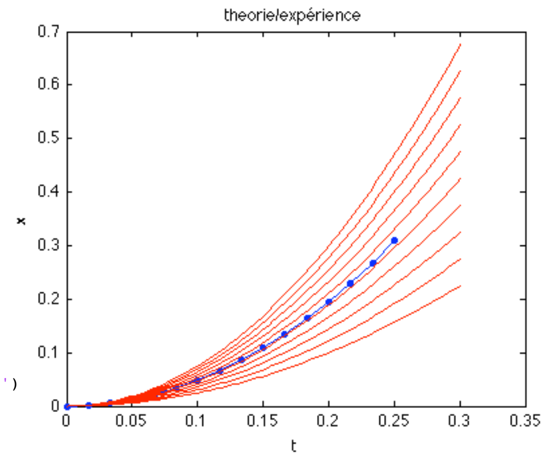
6) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour g=5. Cette valeur de g est elle trop grande ou trop petite? Justifiez votre réponse en décrivant le graphique.
7) Superposez la courbe expérimentale avec la formule théorique pour 20 valeurs successives de g entre 5 et 15. En déduire une valeur estimée de g.
8) Maintenant une dernière manière pour estimer g: pour chaque valeur successive de g entre 5 et 15, calculez l'erreur E au sens des moindres carrés entre la courbe expérimentale et la courbe théorique. Cette erreur est la somme des carrés de l'erreur entre la valeur expérimentale et la valeur théorique. Tracez la courbe de E en fonction de g et déduisez en l'accélération de la gravité à la surface de notre planète la terre.

```
% chute libre

% on lit et affiche l'image
a=imread('films_matlab/chutelibre.tif');
subplot(1,2,1)
image(a);

% la taille des pixels en mètres
taillepix=0.355/(376-8);

% les points mesurés sur l'image
d=[ 36.8688    44.2553
  101.0489   45.2788
  164.3733   50.3964
  227.6977   57.0493
  291.0222   66.7727
  354.3466   78.5431
  417.6710   94.4076
  481.8512  112.3191
  546.0313  132.7895
  610.2115  156.3303
  674.3916  182.9418
  737.7160  213.6473
  801.0405  246.3998
  866.0764  281.7111
  930.2565  321.6282
  994.4367  365.6394];

% transformation de référentiel
x=d(:,2);
x=taillepix*(x-x(1));


subplot(1,2,2);
% le vecteur du temps
t=((1:5:76)-1)/300;
% on trace les données expérimentales
plot(t,x,'b.-');
xlabel('t'); ylabel('x'); title('Données expérimentales')
```






```
hold on

% boucle pour faire varier g
for g=linspace(5,15,10)
tt=linspace(0,0.3,100);
xtheo=g*tt.^2/2;

plot(tt,xtheo,'r')
end
xlabel('t'); ylabel('x'); title('theorie/expérience')
```




```
% calcul de l'erreur moindres carrés
N=50; % le nombre de valeurs de g à tester
gvec=linspace(5,15,N); % les valeurs de d
Evec=zeros(N,1); % un tableau pour mémoriser l'erreur

% la boucle
for ind=1:length(gvec)
g=gvec(ind); % la valeur actuelle du diamètre

% la formule théorique
xtheo=g*t.^2/2;
% calcul de l'erreur aux moindres carrés
Evec(ind)=sum((xtheo-x').^2);
end

% on trace le graphique
plot(gvec,Evec,'b.-');
xlabel('g'); ylabel('E'); title('Moindres carrés')
```