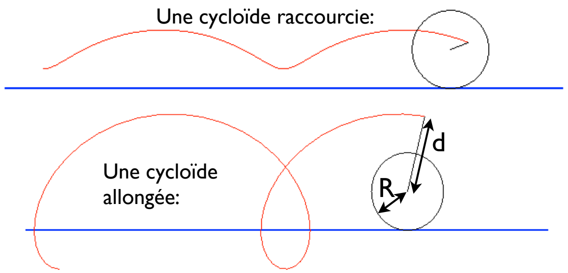
Matlab : applications en mécanique LA207, 2011-2012

Université Pierre et Marie Curie.
TP3: Les formes mathématiques dans la nature.

Ce TP est noté, en binôme, c'est votre compte-rendu seul qui est témoin de votre travail. Vous le remettrez sur le site Sakai au format pdf comme devoir évalué «TP3 du mardi ou du vendredi».

Trochoïdes



On désigne par trochoïde la courbe décrite par un point lié à un disque de rayon R roulant sans glisser sur une droite (D) ; autrement dit, c'est une roulette d'un mouvement plan sur plan dont la base est une droite et la roulante un cercle.

Pour $d < R$, la courbe s'appelle aussi *cycloïde raccourcie* et ressemble à une sinusoïde, ce qu'elle est si l'on néglige le terme dans x.

Pour $d = R$, on obtient la cycloïde.

Pour $d > R$, la courbe s'appelle aussi *cycloïde allongée* et peut prendre diverses formes, avec de plus en plus de points doubles à mesure que d augmente.

Le fait que la cycloïde allongée ait une boucle est à l'origine du paradoxe suivant :
Montrer que, dans un train, il y a toujours une portion de matière qui se déplace en sens inverse du train.
Réponse : le petit rebord des roues.

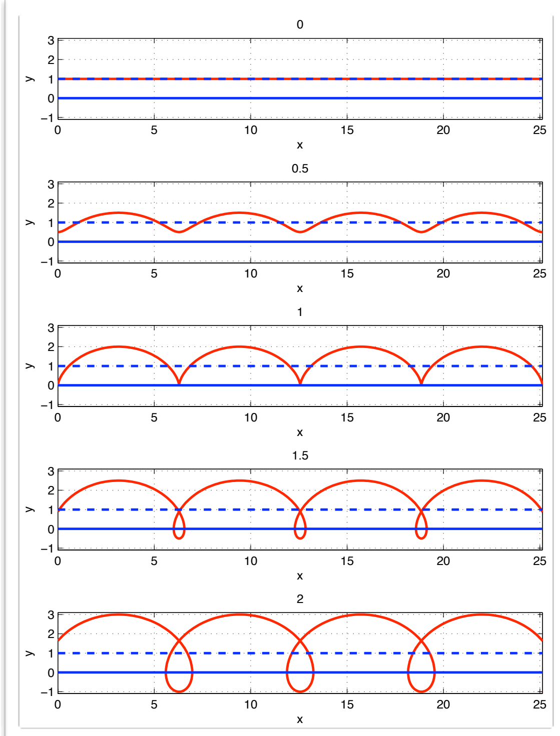
(source: www.mathcurves.com)

Voici l'équation des trochoïdes en coordonnées cartésiennes sous la forme d'une courbe paramétrée par la paramètre t:

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t \\ y = R - d\cos t \end{cases}$$

Question 1)
Tracé de trochoides. Ecrivez un script qui reproduit la figure ci-contre: R=1, on fait varier d de 0 à 2; le titre de chaque sous-figure est la valeur de d. On rajoute une ligne pointillée à la hauteur du centre de la roue, et une ligne continue au niveau du sol.

Insérez le script dans votre compte rendu, ainsi que votre figure. Chaque bloc de commande du script doit être commenté, et le graphique doit être annoté.

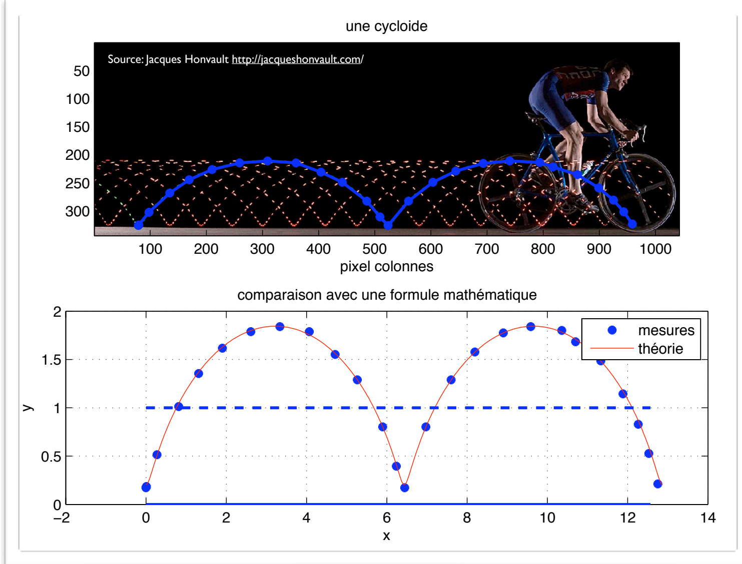


Question 2)
Comparaison mesure/théorie. Vous disposez de l'image nommée «cycloide.png» sur le répertoire commun du TP. Chargez là dans la mémoire de Matlab avec la fonction «imread», affichez là dans une fenêtre graphique avec la fonction «image». On va étudier la ligne de lumière verte. C'est une cycloide raccourcie, puisque la source lumineuse est attachée sur un des rayons de la roue.

1) Prenez une vingtaine de points de mesure à l'aide de la fonction ginput, insérez la liste des coordonnées des points de mesure dans votre compte-rendu. Superposez ces points à l'image originale et insérez cette image dans votre compte-rendu.

2) Opérez au changement de référentiel, le nouveau référentiel a pour origine (x0,y0), et l'échelle est telle que le rayon de la roue est 1. Tracez ces points dans le nouveau référentiel dans un second sous-graphique. Superposez à ces points de mesure une trochoide théorique en choisissant les deux paramètres R et d de sorte à avoir le meilleur accord possible. Inserez votre script et la figure dans votre compte-rendu, donnez les valeurs de R et d que vous avez choisies. Expliquez quelle méthode vous avez utilisée pour estimer la valeur des paramètres R et d.

Chaque bloc de commande du script doit être commenté, et le graphique doit être annoté.

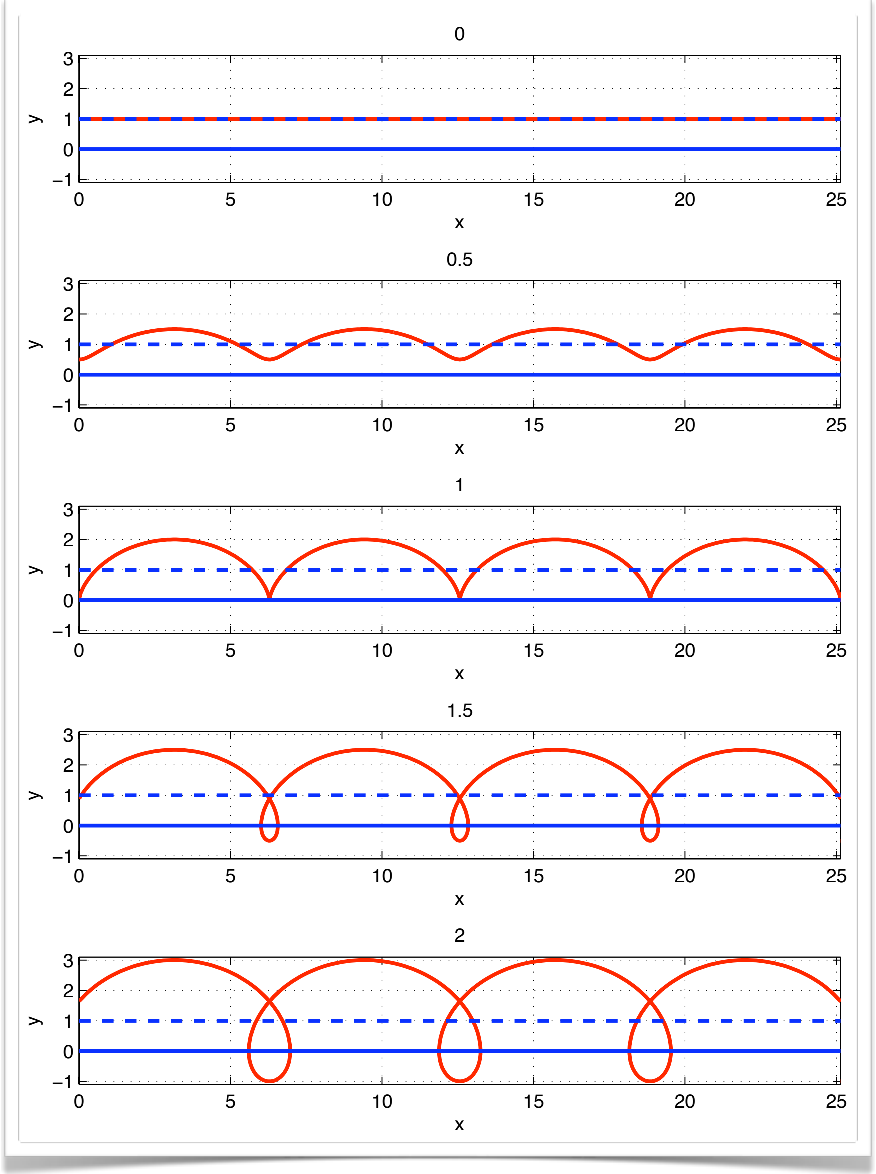


Matlab : applications en mécanique
LA207, 2011-2012

Université Pierre et Marie Curie.
TP3: Les formes mathématiques dans la nature.

Question 1.

Compte-rendu modèle



$d=0$, la courbe est une droite confondue avec le moyeu.

Une cycloide racourcie.

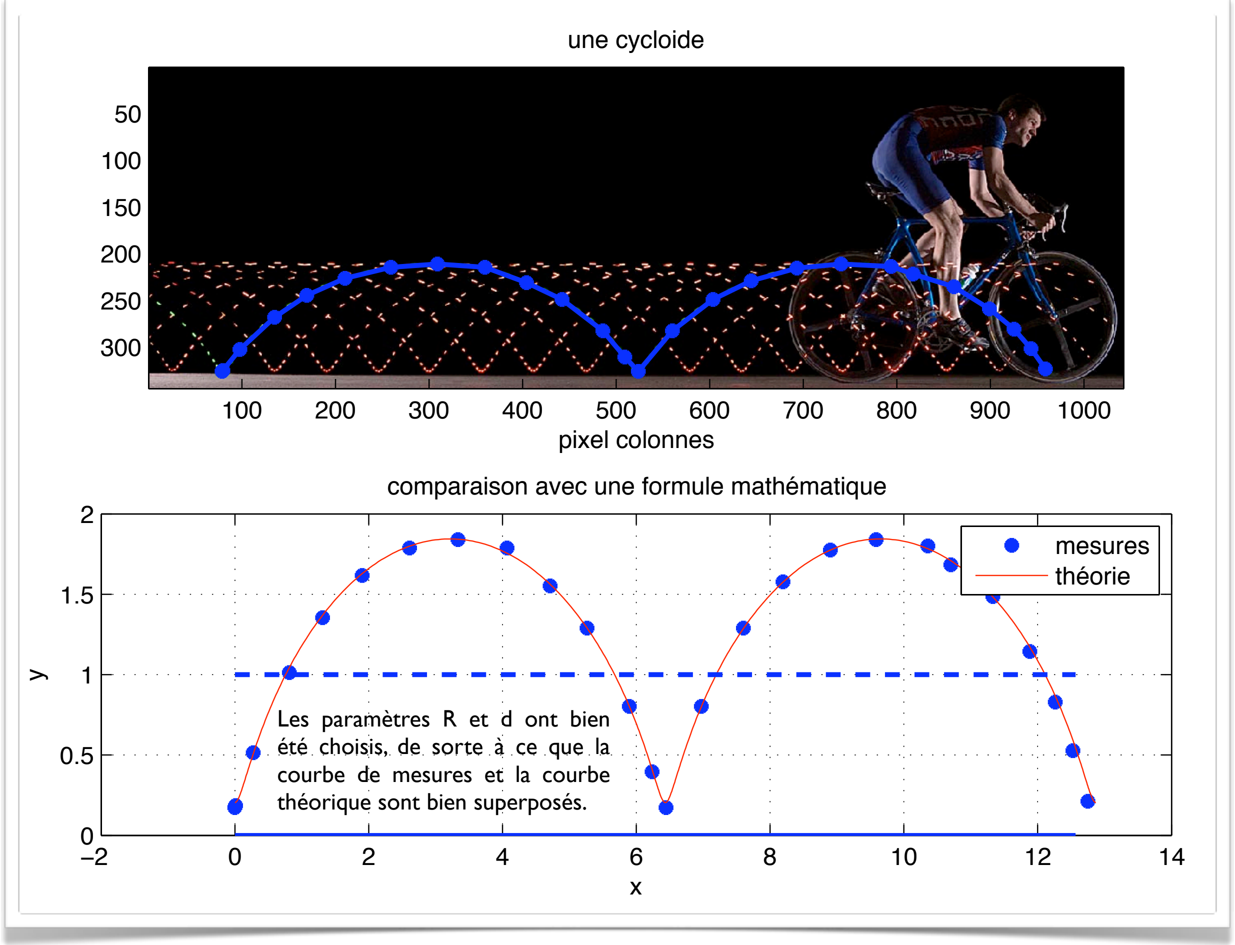
$d=R$, c'est la cycloide.

Ici deux cycloides allongées.

```
% pour le TP3 noté 2011-2012
clear all; clf

% une activité de traçage

% boucle sur la valeur de d
N=5;
dvec=linspace(0,2,N); % les valeurs
for ind=1:N
subplot(N,1,ind); % le sous-graphique

% on trace une trochoide
t=linspace(0,8*pi,500);
R=1;d=dvec(ind);
xx=R*t-d*sin(t);
yy=R-d*cos(t);

% on trace
plot(xx,yy,'r','linewidth',2); grid on
hold on

% annotations
axis equal; axis tight;
axis([0,8*pi,-1.1,3.1]);
title(d)
xlabel('x'); ylabel('y');
end
```

Question 2.
Pour estimer la valeur des paramètres:
1) on mesure avec l'outil d'étiquetage l'altitude du point le plus bas de la courbe mesurée: c'est la valeur de R-d.
2) On obtient R en mesurant la période de la courbe: c'est une courbe périodique de période 2 pi R, le périmètre de la roue. On se rend compte qu'on a ainsi une estimation du paramètre plus précis que celui que la valeur 1 que l'on est censé avoir à cause de la normalisation dans le référentiel mathématique: cette mesure n'était pas assez précise. Ensuite on a ajusté cette valeur par dichotomie successive en regardant comment le graphique change lorsqu'on ajuste la valeur de R, on aboutit ainsi à un facteur correctif 0.99.

Ce graphique montre clairement que les points de mesure ont bien été pris.
On observe deux périodes d'une trochoide:




```
% la comparaison entre la théorie et la photo

% on charge et on affiche l'image
subplot(2,1,1);
a=imread('cycloide.png');
image(a);
axis equal ; axis tight

xlabel('pixel lignes');xlabel('pixel colonnes');
title('une cycloide')

% les coordonnées des points obtenus avec ginput
d=[   79.7826  325.1757
   78.8765  326.0817
   97.9043  302.5235
  135.0539  268.0922
  169.4852  244.5339
  210.2591  226.4122
  259.1878  214.6330
  309.0226  211.0087
  359.7635  214.6330
  404.1617  230.9426
  442.2174  249.0643
  485.7096  282.5896
  509.2678  310.6783
  523.7652  326.0817
  560.0087  282.5896
  603.5009  249.0643
  644.2748  229.1304
  693.2035  215.5391
  740.3200  211.0087
  793.7791  213.7270
  817.3374  221.8817
  860.8296  235.4730
  898.8852  259.0313
  925.1617  280.7774
  943.2835  301.6174
  958.6870  323.3635];
x=d(:,1); y=d(:,2);
hold on

%on trace sur l'image
plot(x,y,'b*-','linewidth',2)

% changement de référentiel
x0=79;
y0=338;
taillepix=1/(266-197);

x=(x-x0)*taillepix;
y=-(y-y0)*taillepix;

% le sous-graphique de comparaison
subplot(2,1,2);
plot(x,y,'b*','linewidth',2);
hold on

% formule théorique
t=linspace(0,4*pi,500);

% valeur des paramètres
R=0.99*6.5/(2*pi); d=0.82;
xx=R*t-d*sin(t);
yy=R-d*cos(t);

% graphique et annotations
plot(xx,yy,'r'); grid on
xlabel('x');ylabel('y');
legend('mesures','théorie');
title('comparaison avec une formule mathématique');
grid on

% on rajoute le sol et la hauteur du moyeu
plot([0,4*pi],[0,0],'b',[0,4*pi],[1,1],'b--','linewidth',2)
```