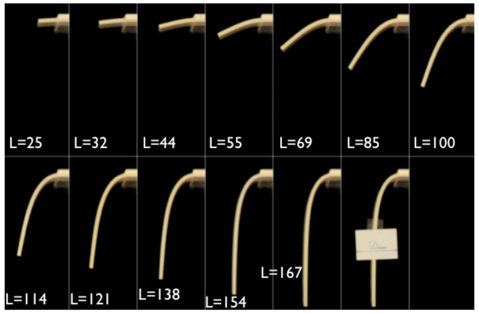
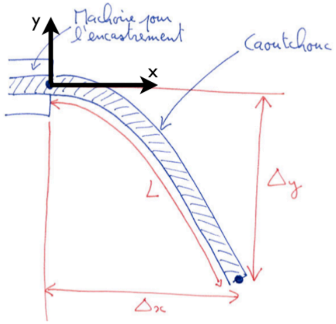
Matlab: Applications en mécanique

LA207, Université Pierre et Marie Curie.
www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement

2.6 TP7: Poutre ployant sous son propre poids

Nous allons étudier aujourd'hui la manière dont une poutre ploie sous l'effet de son propre poids. Pour une poutre d'un matériau donné et d'une épaisseur donnée, plus cette poutre sera longue, plus le poids aura tendance à la courber. L'image ci-dessous représente les photos de cette poutre faite en caoutchouc, que l'on allonge progressivement. Ces images sont l'expérience que nous allons comparer avec la théorie.





Les paramètres du système sont: la densité linéique de la poutre: $\lambda = 0.45$ kilogrammes par mètre; la longueur de la poutre L; l'accélération de la gravité $g = 9.81$; la rigidité en flexion de la poutre B, en Newton-mètres carrés.

la poutre déformée est caractérisée par la déformation en son bout: la "flèche" Δy et Δx selon x, comme décrit sur la figure de droite. Les longueurs de poutre sont données en millimètres sur la figure. On ne connaît pas la valeur de la rigidité, et nous allons utiliser diverses manières pour la mesurer.

Il est possible d'écrire un système d'équations différentielles non linéaires qui décrit la manière dont une poutre va se déformer sous l'effet de forces externes, comme par exemple ici sous l'effet de son poids: ce sont les équations de Euler-Bernoulli. Ces équations sont difficile à résoudre dans le cas général, mais lorsque la déformation est de faible amplitude (flèche petite par rapport à la longueur de la poutre) on peut écrire une approximation linéarisée de ces équations. On peut déduire de ces équations linéarisées une formule

explicite pour la forme de la poutre sous son poids:

$$y = -\frac{1}{6}\frac{\lambda g}{B}\left(\frac{(x-L)^4}{4} + xL^3 - \frac{L^4}{4}\right), \quad x \in [0, L].$$

Dans ce TP nous allons utiliser cette formule pour estimer la valeur de la rigidité de la poutre, et tester la validité de l'approximation linéarisée lorsque la déformation est de grande amplitude.

Compétences: mesurer des points sur une image; comparer des points de mesures expérimentaux à une formule théorique; estimer la valeur d'un paramètre physique à partir de la formule théorique; méthode systématique pour calculer l'erreur entre les points de mesure et une formule théorique.

2.6.1 Manipulations

1. L'image est stockée sur le disque dur sous le nom `sagging.jpg`. Charger l'image dans matlab avec la fonction `imread` et afficher l'image avec la fonction `image`. Avec l'aide de l'outil graphique d'étiquetage, mesurer grâce à l'étalon de longueur sur la figure, la taille en mètres d'un pixel.

2. On considère l'image de la poutre pour $L = 55mm$. Prendre une vingtaine de points de mesure avec `ginput` pour obtenir la forme de la poutre déformée. Enregistrez les valeurs mesurées dans un fichier sur le disque.

3. Opérez au changement de référentiel de sorte à ce que les points de mesure soient en mètres, et orientés comme sur le schéma ci-dessus à droite[1]. Tracez les points de mesure avec la fonction `plot`.

2.6.2 Etude

Faibles déformations

1. Tracez la forme théorique de la poutre pour $L = 55mm$, et $B = 0.001$.

2. En traçant la formule théorique et les points de mesure sur le même graphique, estimer la valeur de B avec deux chiffres significatifs[2].

[1] Réutilisez pour cela un des scripts que vous avez développé dans les TP précédents

[2] Plus la valeur B de la rigidité est grande, plus la poutre est tendue (moins elle ploie), et plus B est faible, plus la poutre ploie: la rigidité n'est plus capable de s'opposer au poids.

3. Nous allons maintenant utiliser une méthode un peu plus systématique pour obtenir la valeur de B. D'après la formule ci dessus on obtient que la déformation au bout de la poutre, c'est à dire lorsque $x = L$ est

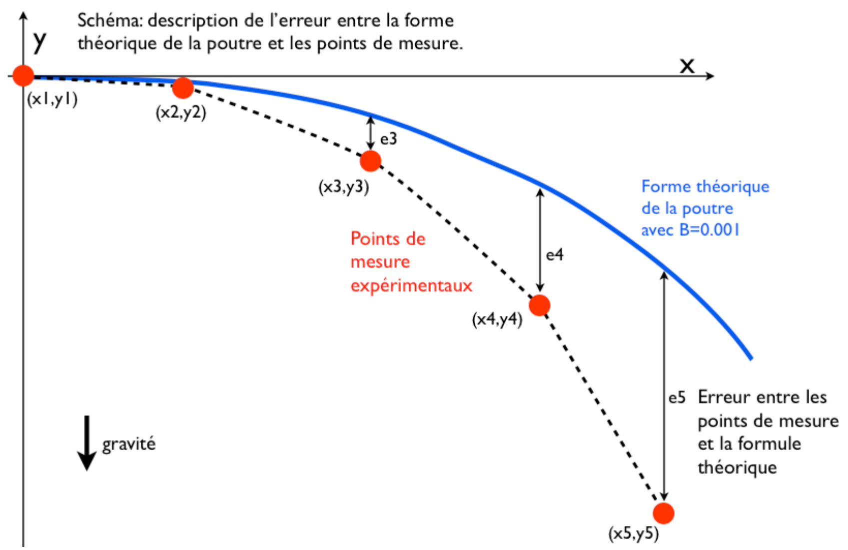
$$y(x = L) = -\frac{1}{8}\frac{\lambda g}{B}L^4$$

Avec cette formule et la valeur mesurée pour le bout de la poutre, obtenez la valeur de B. Tracez sur un même graphique les points mesurés et la formule avec cette valeur de la rigidité.

4. Nous allons maintenant utiliser une troisième méthode pour obtenir B. Nous allons calculer l'erreur totale entre les points mesurés et la formule pour différentes valeurs de B. Cette erreur E est

$$E = (e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 + \cdots + (e_N)^2$$

C'est la somme des carrés des distances entre les points de mesure et la courbe théorique. Lorsque la valeur de cette erreur est minimale, la valeur de B est optimale[3]. Calculez E pour $B = 0.001$.



[3]Cette méthode s'appelle la *méthode des moindres carrés*.

5. Calculez maintenant cette erreur pour un grand nombre de valeurs de B dans l'intervalle $[0.0001, 0.001]$. Tracez la courbe qui représente comment E dépend de B. En déduire une estimation de B pour notre expérience. Tracez sur un même graphique les points de mesure, la formule théorique avec $B = 0.0001$ et $B = 0.001$ et avec la valeur de B que vous avez obtenue avec notre méthode.

Grandes déformations

6. Mesurez maintenant la forme de la poutre pour $L = 154mm$ [4]. Utilisez de nouveaux la méthode des moindres carrés pour estimer la valeur de la rigidité. Tracez sur le même graphique les points de mesure et la forme théorique de la poutre pour la valeur optimale de B [5].

7. Mesurer Δx et Δy (en mètres) avec la fonction `ginput` pour chaque valeur de L, et tracer la courbe Δy en fonction de Δx. C'est la trajectoire que suit le bout de la poutre lorsque sa longueur augmente progressivement[6].

8. Sur ce même graphique, tracez Δy et $\Delta x = L$ selon la formule théorique linéaire pour comparaison[7].

[4]Réutilisez le même code que vous avez développé pour les questions précédentes, en le changeant le moins possible.

[5]On voit bien sur ce graphique que même avec la meilleure valeur de B, la poutre théorique ne ressemble pas à la vraie poutre: c'est parce que l'amplitude de la déformation de la poutre est grande et donc l'approximation linéaire n'est plus valide.

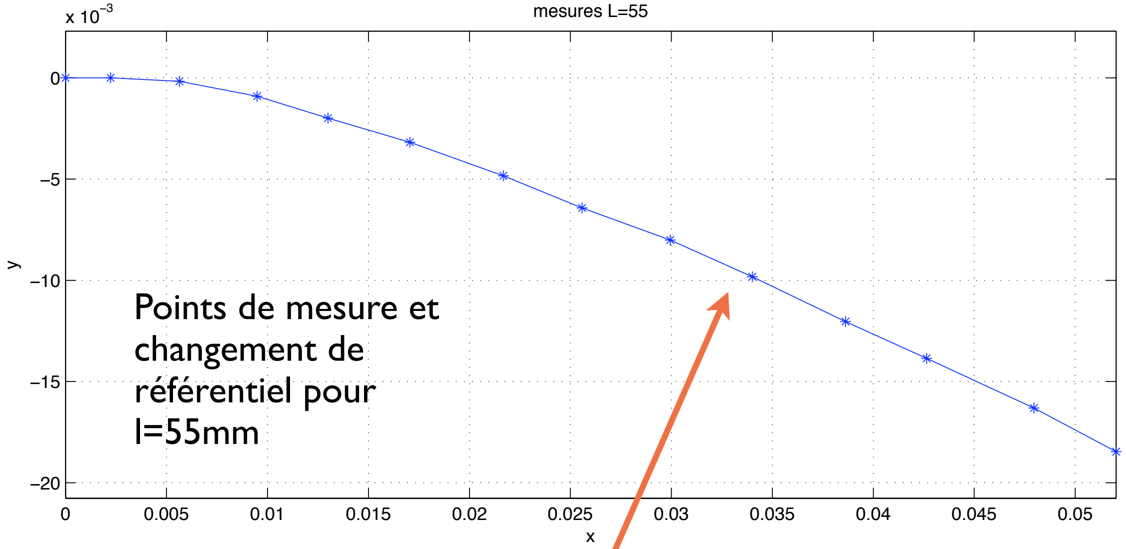
[6]Un conseil: mesurez tous les points en une seule fois avec ginput: position du point d'encastrement et position du bout de la poutre, et traitez ensuite les données à partir du tableau des points de mesure

[7]On voit que l'approximation linéaire est bonne lorsque la poutre est courte, c'est à dire lorsque la flèche Δy est faible par rapport à la longueur L de la poutre.

Matlab : applications en mécanique
LA207, 2010-2011

Compte rendu modèle TP7:
Poutre ployant sous son propre poids

1) Manipulations

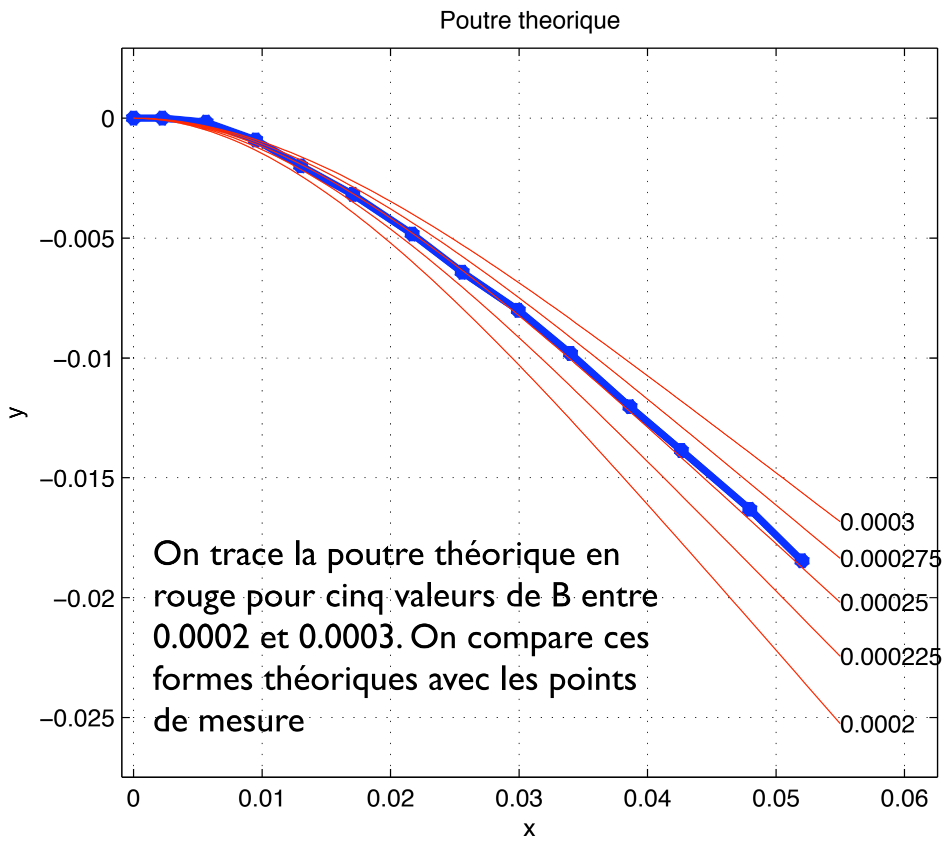


Points de mesure et changement de référentiel pour l=55mm

```
clf; clear all



a=imread('sagging.jpg');
image(a);


% mesures pour L-55
tt=1000*[
    2.0345    0.3031
    2.0662    0.2863
    2.1077    0.2672
    2.1390    0.2530
    2.1750    0.2357
    2.2067    0.2216
    2.2408    0.2092
    2.2712    0.1968
    2.3073    0.1839
    2.3389    0.1746
    2.3663    0.1662
    2.3963    0.1604
    2.4229    0.1591
    2.4403    0.1591
];



% taille d'un pixel
pixsize=0.1282e-3;
x=tt(:,1); y=tt(:,2);

% changement de referentiel
x=x-x(end);y=y-y(end);x=-x;y=-y;
x=x*pixsize; y=y*pixsize;

% on trace les points de mesure
subplot(2,1,1);
plot(x,y,'*-');
xlabel('x');ylabel('y'); title('mesures L=55');
```

2) Etude

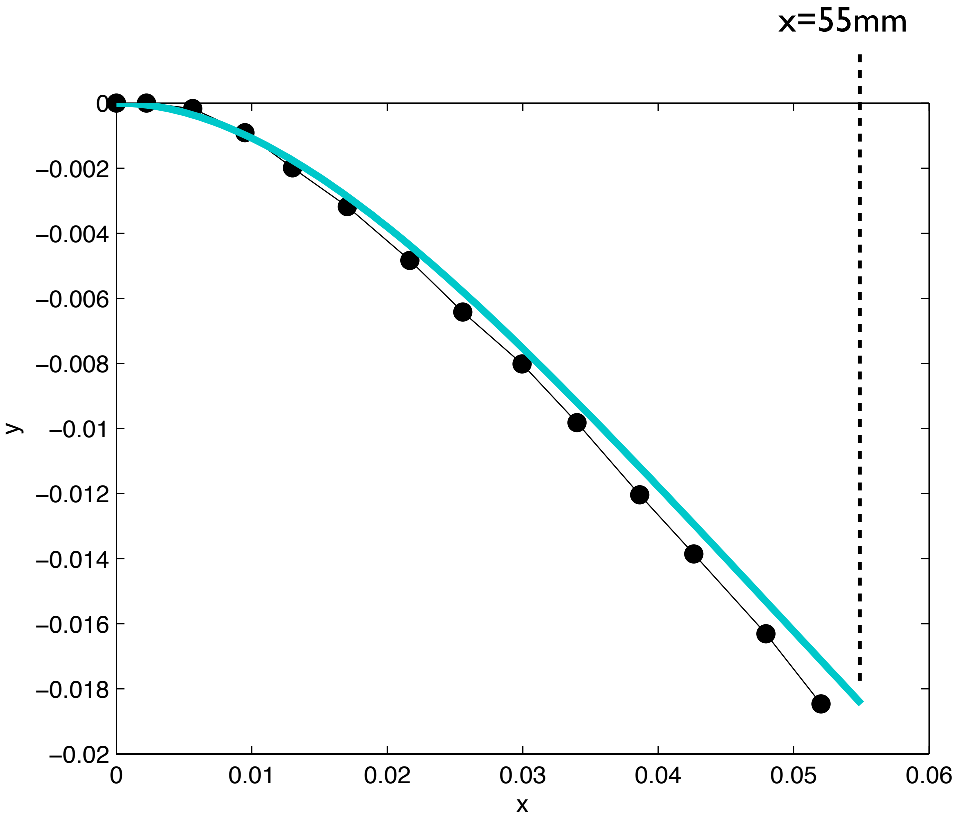
On utilise la formule théorique, et on cherche à faire la comparaison avec nos points de mesure pour une poutre dont la déformation est faible, c'est à dire pour laquelle l'approximation linéaire devrait être bonne.



On trace la poutre théorique en rouge pour cinq valeurs de B entre 0.0002 et 0.0003. On compare ces formes théoriques avec les points de mesure

```
% parametres physiques
L=0.055;
xx=linspace(0,L,100);
lambda=0.45;g=9.81;
B=0.00026;
B=2.55e-4;
B=2.7e-6
B=0.001

% boucle pour plusieurs valeurs de B
for B=linspace(0.0002,0.0003,5)
    yy=-lambda*g/B*(0.25*(xx-L).^4+L^3*xx-L^4/4)/6;
    hold on; plot(xx,yy,'r-');

    % on ajoute en texte la valeur de B
    text(xx(end),yy(end),num2str(B));
end

% annotations
xlabel('x');ylabel('y'); title('Poutre theorique');
```

Une première méthode pour estimer la rigidité.

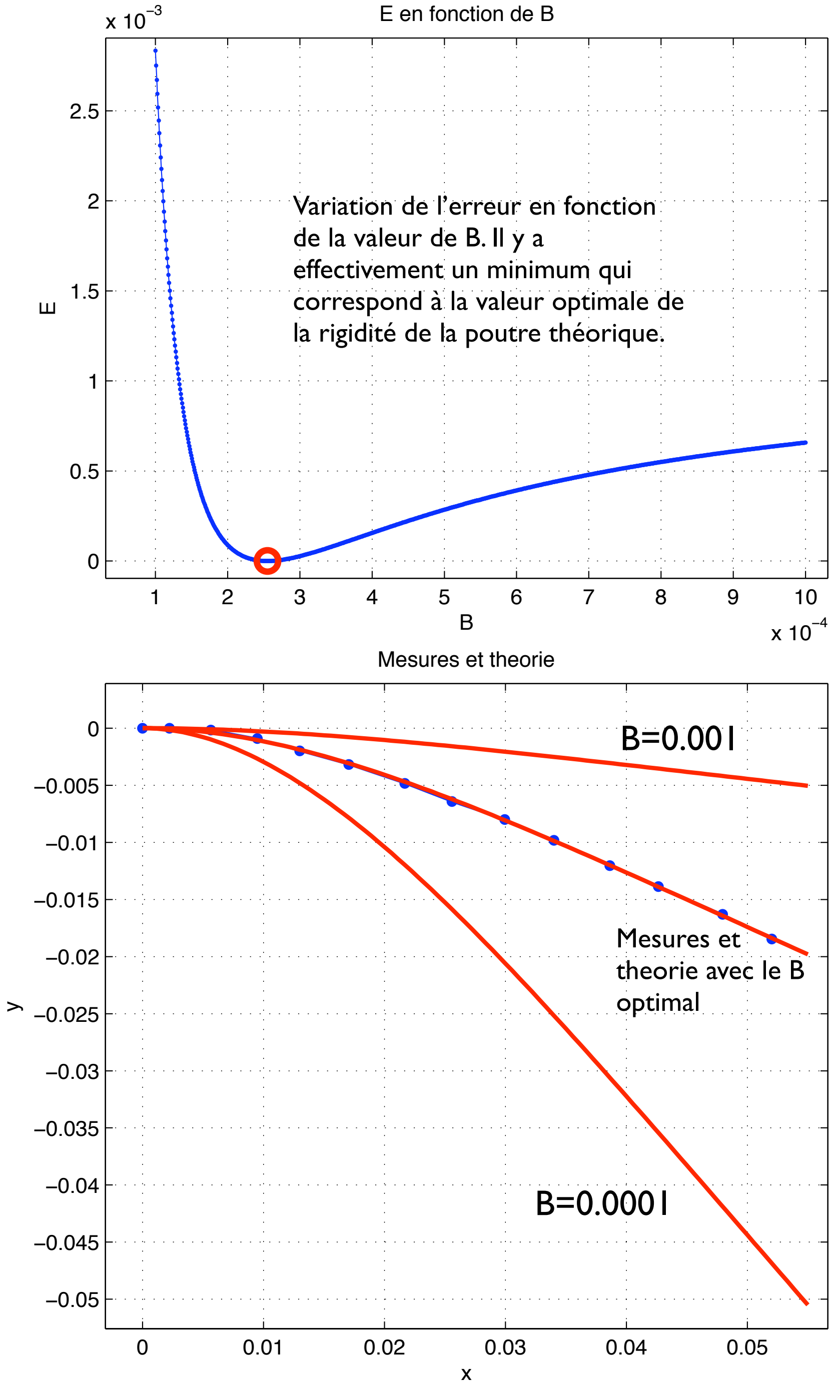


Estimation de B à partir de la formule théorique en utilisant le bout libre de la poutre.

Effectivement, la flèche est identique, mais la théorie néglige le rétrécissement de la poutre selon l'axe x, donc l'accord n'est pas excellent.

```
% juste en utilisant le dernier point:
Bdp=-lambda*g*L^4/(8*y(1));
yy=-(lambda*g/Bdp)*(0.25*(xx-L).^4+L^3*xx-L^4/4)/6;
plot(x,y,'k.-',xx,yy,'k-');
xlabel('x');ylabel('y'); title('Poutre theorique');
```

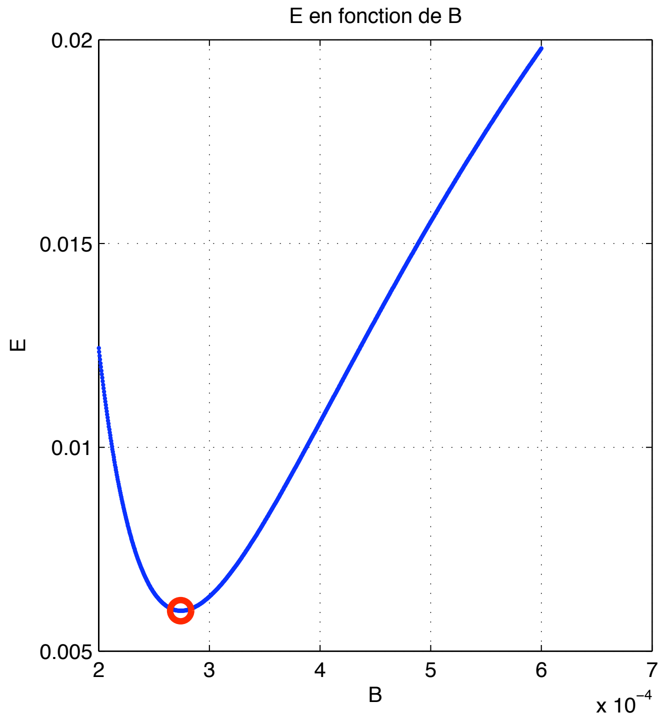
Méthode des moindres carrés.

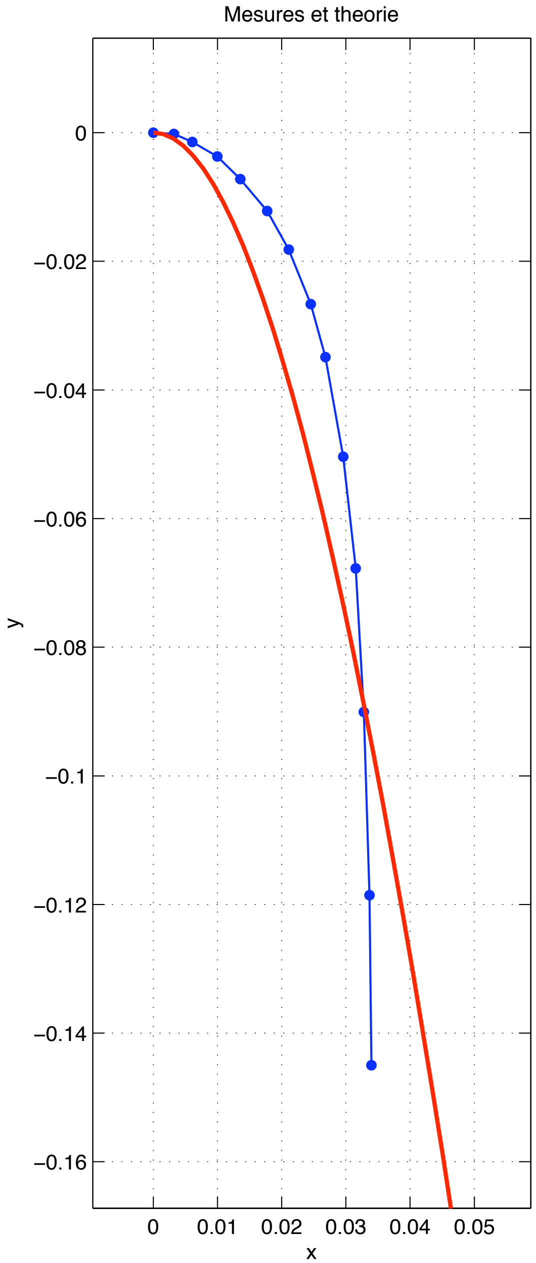


L'accord entre la théorie linéaire et les points de mesure est excellent pour la valeur optimale de B. On le voit de deux manières: d'une part la valeur numérique de l'erreur minimum est très faible: 1.8195e-07
et de plus la ligne rouge sur le sous-graphique du bas recouvre bien les points de mesure. La meilleure valeur de B ici est 2.5495e-04. Nous pouvons donc déduire que nous avons une bonne mesure de la rigidité de la poutre.

```
% Boucle sur B et calcul de l erreur E
subplot(2,1,1);
bvec=linspace(0.0001,0.001,1000);
evec=0*bvec;
for ind=1:length(bvec);
    B=bvec(ind); % la valeur de B

    %  forme theorique
    yy=-lambda*g/B*(0.25*(x-L).^4+L^3*x-L^4/4)/6;

    % calcul de l erreur
    evec(ind)=sum((y-yy).^2);
end

% on trace la courbe
plot(bvec,evec,'b.-');
xlabel('B');ylabel('E'); title('E en fonction de B');

% on trouve la valeur optimale de B
[emin,loc]=min(evec);
Bopt=bvec(loc);

% on trace cette valeur optimale sur le graphique
hold on;
plot(Bopt,emin,'ro','markersize',10,'linewidth',3);
grid on



% on trace maintenant la poutre theorique
subplot(2,1,2);
plot(x,y,'b.-','linewidth',1,'markersize',15); hold on
for B=[0.0001,0.001,Bopt];
    yy=-lambda*g/B*(0.25*(xx-L).^4+L^3*xx-L^4/4)/6;
    plot(xx,yy,'r','linewidth',2); hold on
end
grid on

xlabel('x');ylabel('y'); title('Mesures et theorie');
```

En grandes déformations



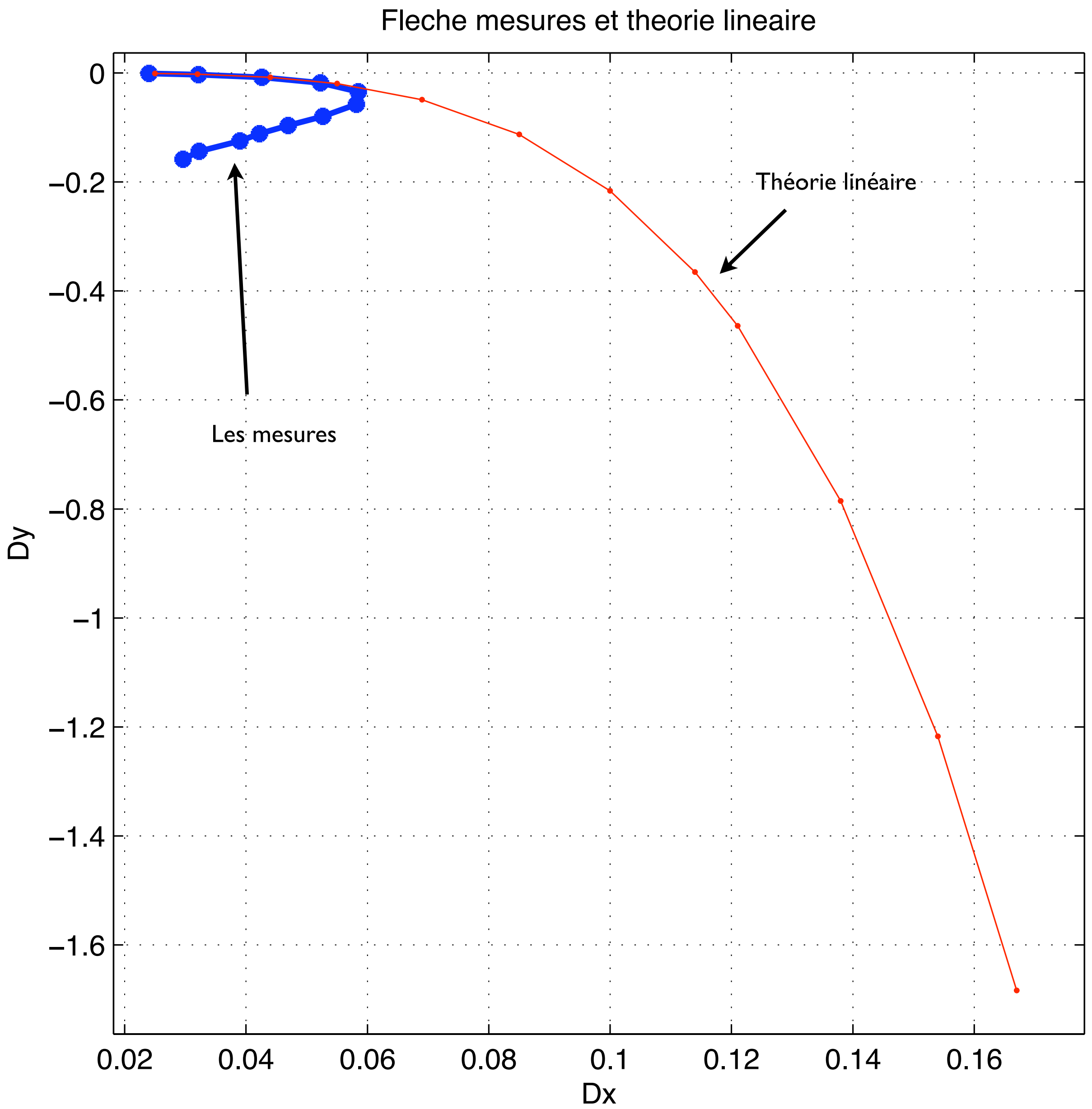


Voici les mêmes manipulations, mais avec la poutre de longueur L=154mm. On voit maintenant que même avec la valeur optimale de B, celle qui minimise l'erreur, l'accord entre la théorie linéaire et les points de mesure n'est pas satisfaisant. De plus la valeur numérique de l'erreur minimale est bien plus élevée que précédemment.

Nous somme maintenant en dehors de la limite de validité de la formule linéaire pour la description de la déformation de la poutre.

Ici nous avons représenté les formes de poutres avec un rapport d'aspect naturel avec la fonction axis equal, pour bien voir comment la poutre pend.

Variation de la flèche avec la longueur



Pour des poutres de faible longueur, l'ffaissement est faible: la flèche est petite par rapport à la longueur, dans ce contexte on voit que la théorie linéaire marche bien.

Par contre lorsque la poutre commence à pendre, cette approximation n'est plus valide.