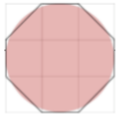
Matlab : applications en mécanique.
LA207, TP2

Université Pierre et Marie Curie.
Licence de mécanique. TP noté

0) Introduction

Pour tous les cercles, il existe un rapport constant entre le périmètre et le diamètre, et entre l'aire et le carré du rayon. Cette constante a été nommée π.



Dans l'illustration, le disque a pour diamètre 9. L'aire du disque est légèrement supérieure à l'aire de l'octogone irrégulier obtenu en rognant les coins du carré de côté 9. Cet octogone a pour aire 63, l'aire du disque est alors évaluée à 64 soit l'aire d'un carré de côté 8. On en tire:

$$\pi \approx \frac{A}{r^2} = \frac{64}{(9/2)^2} = \frac{256}{81} \approx 3.1601$$

Cette approximation nous vient d'un ancien papyrus égyptien (cf. Wikipedia).

Les développements limités nous offrent une méthode itérative pour calculer les décimales de π. Par exemple:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

1) Préparation du script

Dans votre répertoire d'utilisateur sous linux, créez le répertoire matlab2
Dans l'éditeur de texte de Matlab, créez un nouveau script, que vous nommez series.m que vous enregistrez dans le répertoire matlab2.
Le script commence avec les commandes:
clear all (qui efface toutes les variables)
clf (qui nettoie la fenêtre graphique)

Pour exécuter ce script (faire faire à Matlab les commandes qui sont écrites dans ce script), cliquez sur le bouton: 

dans le menu de l'éditeur, ou bien tapez sur la touche F5, ou bien écrivez le nom du script à l'invite.

2) Sommes et produits

Ecrire un code avec une boucle for qui calcule la somme des entiers entre 1 et 10:
1+2+3+4+5+ ... +10=55

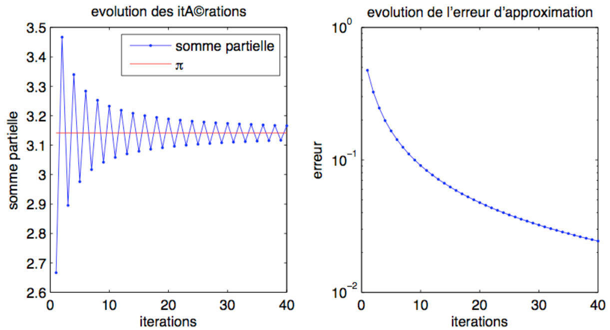
Ecrire un code avec une boucle for qui calcule le produit des entiers entre 1 et 10:
1*2*3* ... *10=3628800

Calcul de pi par une série: On sait que arctan(1) est égal à pi/4, donc on peut utiliser la série définie dans notre introduction pour calculer une approximation de pi, on définit ainsi:

$$P(n) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Donc P(n) tend vers pi/4 lorsque n tend vers l'infini. Ecrivez un code avec une boucle for qui calcule p(n) pour une valeur donnée de n.

On va maintenant tracer un graphique qui montre comment cette série converge. Reproduisez ce graphique ci dessous. On a représenté l'évolution de P en fonction du nombre d'itérations n (en bleu). On compare avec la valeur numérique de pi (en rouge). Dans un second sous-graphique, on trace l'erreur, qui tend vers zéro, c'est à dire |pi-P(n)|, dans un graphique semi logarithmique (fonction semilogy)



Faites la même chose pour la série suivante, due au Mathématition indien Ramanujan: (elle converge très rapidement!)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

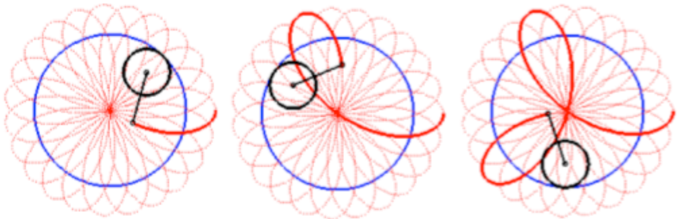
Sauriez-vous coder ce produit? (Il tend vers pi/2)

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}}}} \times \cdots$$

3) Courbes paramétrées

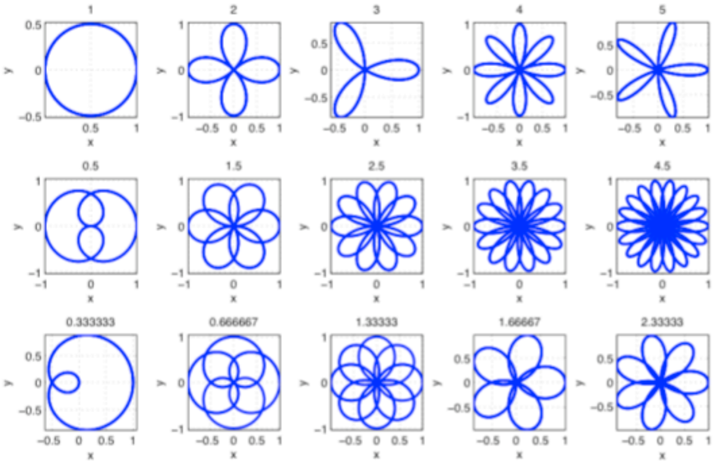
Les hypotrochoides sont les courbes décrites par un point lié à un disque roulant sans glisser intérieurement à un cercle de base. Ce sont donc les courbes que l'on obtient avec un spirographe avec disque interne. (voir le site www.mathcurve.com, et la première image de ce TP). Ce qui nous intéresse ici, c'est que bien que la formule mathématique soit toujours la même, la forme de ces courbes peut changer beaucoup lorsque l'on fait varier les paramètres qui la définissent. Nous allons nous intéresser aux rosaces, qui sont un cas particulier d'hypotrochoide.

La représentation cartésienne des rosaces est $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, avec la définition du rapport entre le rayon et l'angle: $r = \cos(n\theta)$; ou n est le seul paramètre. Saurez-vous reproduire la figure suivante, qui représente une série de rosaces pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, $n = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$, $n = 1/3, 2/3, 4/3, 5/3, 7/3$?



Explication du tracé d'une rosace par un procédé mécanique de roulement

Figure matlab à reproduire



4) Rendre le compte-rendu

1) Exportez votre compte-rendu au format pdf
2) Connectez vous à l'adresse URL: australe.upmc.fr
3) Remettez votre compte-rendu comme «devoir évalué»
4) Attendez de voir le message de confirmation de la remise

Ce TP est noté;
Une seule remise par binôme.

5) Animations Pour aller plus loin

Nous pouvons animer nos graphiques avec une boucle for et la fonction drawnow: par exemple je trace sin(x+p) ou p est une valeur que je fais augmenter progressivement dans une boucle for. A chaque itération de la boucle for, j'utilise drawnow pour que le graphique soit immédiatement affiché à l'écran.

Pour les hypotrochoides, vous pouvez les faire tourner en définissant de la même manière $x=r\cos(\theta+b)$, $y=r\sin(\theta+b)$.