Matlab: Applications en mécanique

LA207, Université Pierre et Marie Curie.

TP 5 : Poutre ployant sous son poids

Nous allons étudier la manière dont une poutre ploie sous l'effet de son poids propre. Considérons une poutre d'un matériau donné ayant une épaisseur donnée : plus cette poutre sera longue, plus le poids aura tendance à la courber. L'image ci-dessous montre la déformée en flexion d'une poutre en caoutchouc dont la longueur croît progressivement. Ces résultats ont été obtenus expérimentalement. L'objet de ce TP est de modéliser au mieux le phénomène de flexion observé.

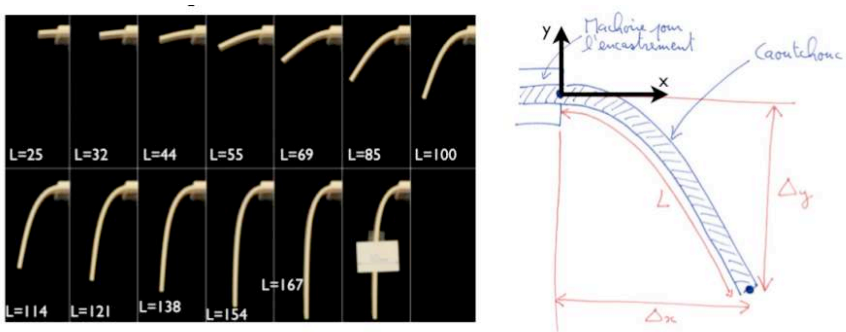

Figure 1: Poutre en flexion

Les paramètres du système sont : la densité linéique de la poutre $\lambda = 0.45$ (kilogrammes par mètre), la longueur de la poutre L et la rigidité en flexion de la poutre B (en Newton-mètres carrés).

La poutre déformée est caractérisée par la position de son extrémité : la "flèche" Δy suivant y et Δx selon x, comme décrit sur la figure de droite. Les longueurs de poutres sont données en millimètres sur la figure. On ne connaît pas la valeur de la rigidité, et nous allons utiliser diverses méthodes pour la déterminer.

Il est possible d'écrire un système d'équations différentielles non linéaires décrivant la manière dont une poutre va se déformer sous l'effet de forces externes, comme par exemple ici sous l'effet de son poids : ce sont les équations

de Euler-Bernoulli. Ces équations sont difficiles à résoudre dans le cas général, mais lorsque la déformation est de faible amplitude (flèche petite par rapport à la longueur de la poutre) on peut écrire une approximation linéarisée de ces équations. On en déduit une formule explicite pour la forme de la poutre soumise à son poids:

$$y = -\frac{1}{6}\frac{\lambda g}{B}\left(\frac{(x-L)^4}{4} + xL^3 - \frac{L^4}{4}\right), \quad x \in [0, L].$$

Dans ce TP nous allons utiliser cette formule pour estimer la valeur de la rigidité de la poutre B, et tester la validité de l'approximation linéarisée lorsque la déformatic est de grande amplitude.

1 Manipulations préliminaires

Dans un premier temps, récupérez l'image sagging.jpg dans le dossier de partage et chargez-la dans matlab.

On s'intéresse tout d'abord à la poutre de longueur $L = 55mm$.

Effectuez un relevé de profil de cette poutre puis opérez le changement de référentiel adéquat de sorte à avoir les points de mesure en mètres et la poutre orientée comme sur le graphique de droite de la figure 1.

2 Etude du phénomène de flexion

Nous allons ici utiliser différentes méthodes afin de déterminer la rigidité B, qui caractérise la résistance du matériau à la déformation élastique en flexion. Ainsi, plus la valeur de B sera faible, plus la poutre risque de ployer sous son poids, et réciproquement.

2.1 Faibles déformations

1. Sur un même graphique, représentez la forme analytique et les points de mesure et estimez la valeur de B avec deux chiffres significatifs en raisonnant de proche en proche.

2. Donnez l'expression analytique du point à l'extrémité libre de la poutre et déduisez-en une nouvelle estimation de la rigidité. Tracez sur un même graphique les points mesurés et la formule pour cette nouvelle valeur de la rigidité.

3. Nous allons maintenant mettre en oeuvre la méthode des moindres carrés afin d'estimer une nouvelle fois la valeur de B.

   Cette méthode consiste à minimiser l'erreur totale entre les points mesurés et la formule. Pour une valeur de B donnée, cette erreur E s'écrit :

$$E = (e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 + \cdots + (e_N)^2$$

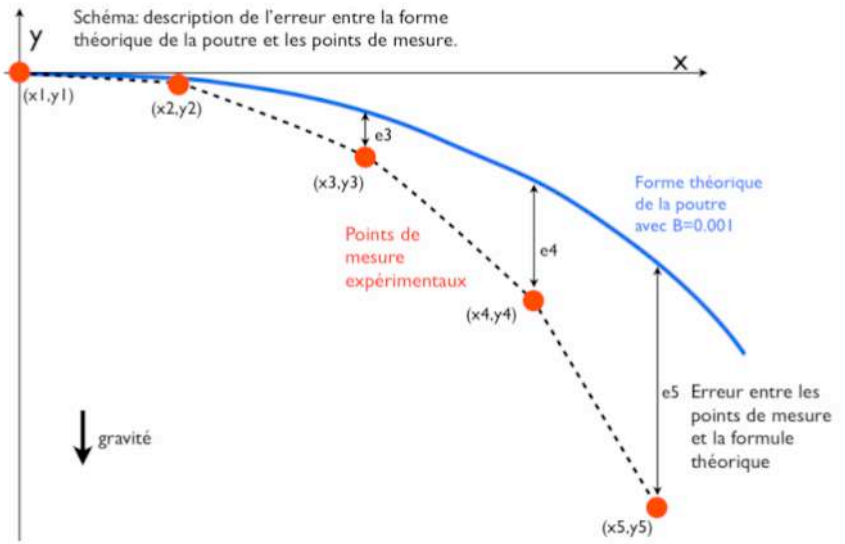

Figure 2: Méthode des moindres carrés

   C'est la somme des carrés des distances entre les points de mesure et la courbe théorique (cf figure 2). Lorsque la valeur de cette erreur est minimale, la valeur de B est optimale. Calculez E pour $B = 0.001$.

4. Calculez maintenant cette erreur pour un grand nombre de valeurs de B dans l'intervalle $[0.0001, 0.001]$.

   Tracez la courbe représentant l'erreur en fonction de B.
   En déduire une estimation de B pour notre expérience, puis tracez sur un même graphe les points de mesure, la formule théorique pour $B = 0.0001$, $B = 0.001$ et B optimal précédemment obtenu.

2.2 Grandes déformations

5. Effectuez maintenant le relevé de profil de la poutre pour $L = 154mm$.
   Utilisez de nouveau la méthode des moindres carrés pour estimer la rigidité et tracez sur un même graphe les points de mesure et la formule pour B optimum.
   Que concluez-vous quant à votre approximation ?

6. Mesurer Δx et Δy (en mètres) avec la fonction `ginput` pour chaque valeur de L, et tracer la courbe Δy en fonction de Δx. C'est la trajectoire que suit l'extrémité libre de la poutre lorsque sa longueur augmente progressivement[1].

7. Sur ce même graphique, tracez Δy et $\Delta x = L$ selon la formule théorique linéaire pour les différentes valeurs de L pour comparaison.

3 Pour aller plus loin

Les paramètres dimensionnels du problème sont L, λ, g, B. On peut montrer que dans ce cas, il existe un unique nombre sans dimension décrivant le problème:

$$\gamma = \frac{\lambda g L^3}{B},$$

c'est le paramètre *élasto-gravitationnel*[2]. Tracez le graphe de $\Delta x/L$ et $\Delta y/L$ en fonction de γ pour nos mesures expérimentales, et comparer avec le resultat du calcul numérique.

[1] Un conseil: mesurez tous les points en une seule fois avec ginput: position du point d'encastrement et position du bout de la poutre, et traitez ensuite les données à partir du tableau des points de mesure

[2] savez-vous montrer que γ est le seul nombre sans dimension du problème ?